African Diaspora Journal of Mathematics
Proceedings of Geometry and Physics V
Volume 9, Number 2, pp. 1–16 (2010)
ISSN 1539-854X
www.african-j-math.org

INTÉGRABILITÉ ALGÉBRIQUE : UNE INTRODUCTION

POL VANHAECKE*
Laboratoire de Mathématiques et Applications, UMR 6086 du CNRS,
Université de Poitiers, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

Abstract

La plupart des systèmes intégrables classiques admettent une complexification naturelle, où les tores de Liouville deviennent des tores algébriques complexes (variétés abéliennes). Le fait d'introduire un temps complexe et des coordonnées complexes nous fait découvrir les structures algébriques et géometriques sous-jacentes et plusieurs constructions classiques (linéarisation, coordonnées action-angle, solutions explicites, symétries cachées, ...) deviennent explicites, et pour des classes d'exemples même systématiques. A partir de la notion générale d'intégrabilité (au sens de Liouville) sur une variété de Poisson (réelle ou complexe) et après quelques rappels sur les variétés abéliennes, les systèmes algébriquement intégrables seront introduits et leurs propriétés de base seront illustrées sur quelques exemples simples. Pour finir, le critère de Kowalevski-Painlevé sera expliqué et illustré par deux exemples.

AMS Subject Classification: 70G55; 37J35; 37J30.

Keywords: Systèmes intégrables, intégrabilité algébrique.

1 Introduction

Les systèmes intégrables apparaissent en mécanique classique comme systèmes mécaniques avec un nombre suffisant de constantes de mouvement, souvent provenant d'une symétrie (invariance par rotation, par translation, ...), impliquant qu'une intégration explicite des équations de mouvement soit possible. Citons le problème des deux corps, les toupies d'Euler et de Lagrange. La toupie (intégrable) de Kowalevski est *différente*, car son intégrabilité n'est pas une conséquence d'une symétrie (au sens strict) du système. Également remarquable est la façon à laquelle Kowalevski a découvert cette toupie (c.-à-d. la relation entre ses trois moments d'inertie par rapport au point fixe et la position de son centre de gravité) : elle cherche toutes les toupies qui admettent des familles de solutions *complexes* (donc le temps t est complexe), plus précisément elle cherche des solutions de Laurent, dépendant d'un nombre suffisant de paramètres. Cette technique a été reprise par Adler et van Moerbeke dans les années '80, où ils l'ont utilisée, avec succès,

*E-mail address: Pol.vanhaecke@math.univ-poitiers.fr

pour trouver de nouveaux systèmes intégrables ; en même temps, ils ont introduit la notion d'intégrabilité algébrique (a.c.i.) et ils ont dévéloppé des techniques pour étudier la géométrie des systèmes a.c.i., basées sur les solutions de Laurent. Dans le livre [4], dont une partie importante est consacrée à l'intégrabilité algébrique dans ce sens, nous avons élaboré ces techniques, pour démontrer l'intégrabilité algébrique d'un système intégrable, en utilisant ses éventuelles solutions de Laurent. On y trouvera aussi la preuve que tout système a.c.i. admet des solutions de Laurent, justifiant ainsi le critère utilisé par Kowalevski.

L'introduction à l'intégrabilité algébrique, présentée ici, correspond fidèlement à un mini-cours (de trois heures) donné à Dakar en mai 2007. Dans une première partie, j'expliquerai l'intégrabilité au sens de Liouville pour des systèmes hamiltoniens sur une variété de Poisson. Dans la deuxième partie, je montre d'abord que la notion d'intégrabilité au sens de Liouville est une notion trop faible dans le contexte des variétés de Poisson holomorphes ou algébriques. Ceci sera illustré par une suite d'exemples simples, qui montrent quel est le problème et comment il peut être détecté en analysant l'existence de solutions de Laurent pour les équations de mouvement. Le résultat final est un critère efficace d'obstruction à l'intégrabilité algébrique. Voir [4] pour un autre critère d'intégrabilité algébrique, pour d'autres exemples, des applications à la géométrie des variétés abéliennes, le lien avec la théorie de Lie, ...

Je tiens a remercier Aissa Wade de m'avoir invité à faire ce mini-cours, devant un public aussi varié que intéressé.

2 Liouville intégrabilité

Dans cette section nous décrivons la notion d'intégrabilité au sens de Liouville dans le contexte des variétés de Poisson. C'est la généralisation naturelle de la notion d'intégrabilité au sens de Liouville pour les variétés symplectiques (voir par exemple [5]). En effet, c'est plus naturel de considérer des systèmes intégrables sur les variétés de Poisson, que sur des variétés symplectiques, car les morphismes naturels des systèmes intégrables sont des morphismes de Poisson, plutôt que des morphismes symplectiques.

Les variétés, considérées dans cette section sont toujours des variétés réelles lisses. Pour M une telle variété, l'algèbre de fonctions lisses sur un ouvert U de M sera notée $\mathcal{F}(U)$ et pour tout champ de vecteurs $\mathcal{V}$ sur U, on notera $\mathcal{V}[F]$ la dérivée d'une fonction $F \in \mathcal{F}(U)$ selon $\mathcal{V}$. Comme dans le cours de Jean-Paul Dufour, une *variété de Poisson* (M,π) est une variété réelle lisse M, muni d'un champ de bivecteurs π de carré nul pour le crochet de Schouten ($[\pi,\pi]_S = 0$). Pour tout ouvert U, la restriction de π à U sera aussi notée π et pour tous $F,G \in \mathcal{F}(U)$ on notera indifféremment $\{F,G\}$ ou $\pi[F,G]$ leur *crochet de Poisson*. Le *champ hamiltonien* $\mathcal{X}_H$ associé à $H \in \mathcal{F}(U)$ est le champ de vecteurs sur U, défini par $\mathcal{X}_H[F] := \{F,H\}$ pour tous $F \in \mathcal{F}(U)$. Avec cette convention de signe, on a :

$$[\mathcal{X}_F, \mathcal{X}_G] = \mathcal{X}_{\{G,F\}}, \tag{2.1}$$

pour tous $F,G \in \mathcal{F}(U)$. On appelle Casimir toute fonction $F \in \mathcal{F}(M)$ telle que $\mathcal{X}_F = 0$. Les Casimirs forment une sous-algèbre de Poisson de $\mathcal{F}(M)$.

2.1 Fonctions en involution

Dans ce paragraphe, on s'intéressera à des fonctions en involution.

Définition 2.1. Soit (M,π) une variété de Poisson et soit $S \subset \mathcal{F}(M)$. On dit que S est *involutive* si $\{F,G\} = 0$ pour tous $F,G \in S$.

Proposition 2.2. *Soit (M,π) une variété de Poisson et soit $S \subset \mathcal{F}(M)$ involutive.*

(1) La sous-algèbre de $\mathcal{F}(M)$, engendrée par S et les Casimirs, est involutive ;

(2) Les champs de vecteurs $\mathcal{X}_F$ avec $F \in S$, commutent deux à deux ;

(3) Pour $S = \{F_1,\ldots,F_s\}$, notons

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{F} : & M & \to & \mathbb{R}^s \\ & m & \mapsto & (F_1(m),\ldots,F_s(m)). \end{array}$$

Les champs de vecteurs $\mathcal{X}_F$ avec $F \in S$, sont tangents aux fibres lisses $\mathbf{F}_c := \mathbf{F}^{-1}(c)$ de $\mathbf{F}$.

Preuve. (1) est une conséquence immédiate du fait que π est une bidérivation et (2) de l'identité de Jacobi pour π. Pour $1 \leqslant i,j \leqslant s$ on a : $\mathsf{d}F_j(\mathcal{X}_{F_i}) = \mathcal{X}_{F_i}[F_j] = \left\{F_j,F_i\right\} = 0$. Donc, pour tout $m \in M$,

$$\mathcal{X}_{F_i}(m) \in \bigcap_{j=1}^{s} \left\{v \in T_mM \mid \mathsf{d}_mF_j(v) = 0\right\}.$$

Ce dernier espace est l'espace tangent de $\mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)}$ en m si $\mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)}$ est lisse (il suffit en effet que $\mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)}$ soit lisse en m). □

Définition 2.3. Soit M une variété réelle lisse et soit $S = \{F_1,\ldots,F_s\}$ une partie de $\mathcal{F}(M)$. On dit que S est *indépendante* si l'ouvert

$$\mathcal{U}_{\mathbf{F}} := \{m \in M \mid \mathsf{d}_mF_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{d}_mF_s \neq 0\}$$

est un ouvert dense de M.

Selon le théorème de Sard, si $\{F_1,\ldots,F_s\}$ est indépendante alors pour $c = (c_1,\ldots,c_s)$ générique, l'ensemble $\mathbf{F}_c := \{m \in M \mid \forall i,\ F_i(m) = c_i\}$ est une sous-variété lisse de dimension $\dim M - s$.

Proposition 2.4. *Soit (M,π) une variété de Poisson de dimension n et de rang maximum $2r$. Soit $S = \{F_1,\ldots,F_s\} \subset \mathcal{F}(M)$ indépendante.*

(1) Si $S \subset \mathrm{Cas}(M)$, alors $s \leqslant n-2r$;

(2) Si S est involutive, alors $s \leqslant n-r$;

(3) Si S est involutive et $s = n-r$, alors

$$\dim \operatorname{span}\{\mathcal{X}_{F_1}(m),\ldots,\mathcal{X}_{F_s}(m)\} \leqslant r$$

pour tout $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}}$, avec égalité pour tout m appartenant à l'ouvert $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_r$, où

$$M_r := \{m \in M \mid \mathrm{Rk}_m\{\cdot,\cdot\} = 2r\}.$$

Preuve. Pour $m \in M$, notons par $\tilde{\pi}_m$ le tenseur de Poisson en m, vu comme application linéaire $T_m^*M \to T_mM$. Donc, pour tout $F \in \mathcal{F}(M)$,

$$\tilde{\pi}_m(\mathrm{d}_mF) = \mathcal{X}_F(m) = \{\cdot, F\}(m).$$

Le rang de $\tilde{\pi}_m$ est le rang de la structure de Poisson en m, et pour tout $F \in \mathrm{Cas}(M)$ le covecteur d_mF appartient à $\mathrm{Ker}\,\tilde{\pi}_m$, dont la dimension est $\dim M - \mathrm{Rk}_m\{\cdot,\cdot\}$. Soit $\mathbf{F} = \{F_1, \ldots, F_s\}$ indépendante et soit m un élément de l'ensemble ouvert non-vide $\mathcal{U}_\mathbf{F} \cap M_r$. Supposons d'abord que chaque élément de $\mathbf{F}$ soit un Casimir. Puisque $\mathrm{d}_mF_1, \ldots, \mathrm{d}_mF_s$ sont indépendants, on a :

$$s \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,\tilde{\pi}_m = \dim M - 2r$$

ce qui prouve *(1)*. Supposons ensuite que $\mathbf{F}$ soit involutive et considérons la fibre $\mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)}$, où m appartient toujours à $\mathcal{U}_\mathbf{F} \cap M_r$, de sorte que la restriction de $\mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)}$ à un voisinage U de m soit une sous-variété de dimension $\dim M - s$ de U, passant par m. Cette dimension est un majorant pour la dimension d_m de $\mathrm{span}\{\mathcal{X}_{F_1}(m), \ldots, \mathcal{X}_{F_s}(m)\}$, parce que ces s vecteurs sont tangents à $\mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)}$. En plus, $d_m \geqslant s - \dim \mathrm{Ker}\,\tilde{\pi}_m = s + 2r - \dim M$, car les différentielles $\mathrm{d}F_1, \ldots, \mathrm{d}F_s$ sont indépendantes en m. Combinant les deux inégalités pour d_m, on trouve que

$$s + 2r - \dim M = s - \dim \mathrm{Ker}\,\tilde{\pi}_m \leqslant d_m \leqslant \dim M - s, \tag{2.2}$$

ce qui donne *(2)*. Supposons finalement que $s = \dim M - r$. Pour $m \in \mathcal{U}_\mathbf{F} \cap M_r$, les inégalités (2.2) impliquent que

$$r = s - \dim \mathrm{Ker}\,\tilde{\pi}_m \leqslant d_m \leqslant r,$$

et donc $\dim \mathrm{span}\{\mathcal{X}_{F_1}(m), \ldots, \mathcal{X}_{F_s}(m)\} = d_m = r$. □

Définition 2.5. Soit (M, π) une variété de Poisson de dimension n et de rang $2r$. On dit que $\mathbf{F} = \{F_1, \ldots, F_s\}$ est un *système intégrable* sur M si

(1) $\mathbf{F}$ est indépendant ;

(2) $\mathbf{F}$ est involutif ;

(3) $s = n - r$.

On dit aussi *intégrable au sens de Liouville*.

Proposition 2.6. *Soit $(M, \pi, \mathbf{F})$ un système intégrable. Les champs de vecteurs $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_s}$ définissent sur l'ouvert $\mathcal{U}_\mathbf{F} \cap M_r$ une distribution intégrable (au sens de Frobenius). Les variétés intégrales de cette distribution sont les composantes connexes des fibres de $\mathbf{F}$, restreint à $\mathcal{U}_\mathbf{F} \cap M_r$. De plus, l'ouvert $\mathcal{U}_\mathbf{F} \cap M_r$ est invariant pour les flots des champs $\mathcal{X}_{F_i}$.*

Preuve. D'après la proposition 2.4, les champs $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_s}$ définissent sur $\mathcal{U}_\mathbf{F} \cap M_r$ une distribution de rang r. Elle est intégrable au sens de Liouville, car $\left[\mathcal{X}_{F_i}, \mathcal{X}_{F_j}\right] = \mathcal{X}_{\{F_j, F_i\}} = 0$. Les composantes connexes des fibres de la restriction de $\mathbf{F}$ à $\mathcal{U}_\mathbf{F} \cap M_r$ sont de dimension r

et ils sont en tout point tangents à la distribution. Ce sont donc les variétés intégrales de la distribution. L'ouvert $\mathcal{U}_{\mathbf{F}}$ est alors invariant pour le flot des $\mathcal{X}_{F_i}$, car

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{X}_{F_i}}(\mathrm{d}F_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}F_s) &= \mathrm{d}\iota_{\mathcal{X}_{F_i}}(\mathrm{d}F_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}F_s)\\ &= \mathrm{d}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\mathrm{d}F_1\wedge\ldots\wedge\iota_{\mathcal{X}_{F_i}}\mathrm{d}F_j\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}F_s\\ &= 0,\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière étape :

$$\iota_{\mathcal{X}_{F_i}}\mathrm{d}F_j=\mathrm{d}F_j(\mathcal{X}_{F_i})=\mathcal{X}_{F_i}[F_j]=\left\{F_j,F_i\right\}=0.$$

M_r est aussi invariant pour le flot des $\mathcal{X}_{F_i}$ car la structure de Poisson π est invariante pour ces flots ; en effet, pour tous $F,G\in\mathcal{F}(M)$,

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{X}_{F_i}}\pi\right)(F,G) &= \mathcal{L}_{\mathcal{X}_{F_i}}(\pi(F,G))-\pi\left(\mathcal{L}_{\mathcal{X}_{F_i}}F,G\right)-\pi\left(F,\mathcal{L}_{\mathcal{X}_{F_i}}G\right)\\ &= \mathcal{X}_{F_i}[\{F,G\}]-\{\mathcal{X}_{F_i}[F],G\}-\{F,\mathcal{X}_{F_i}[G]\}\\ &= \{\{F,G\},F_i\}-\{\{F,F_i\},G\}-\{F,\{G,F_i\}\}\\ &= 0,\end{aligned}$$

à cause de l'identité de Jacobi. Donc, l'intersection $\mathcal{U}_{\mathbf{F}}\cap M_r$ est aussi invariante pour le flot de tous les $\mathcal{X}_{F_i}$. □

Théorème 2.7. *Si $(M,\{\cdot,\cdot\},\mathbf{F})$ est un système intégrable, alors pour tout $m\in\mathcal{U}_{\mathbf{F}}\cap M_r$ la courbe intégrale de $\mathcal{X}_{F_i}$, à partir de m, peut être déterminée par quadratures (opérations algébriques, théorème des fonctions inverses, intégration).*

Preuve. Soit $m\in\mathcal{U}_{\mathbf{F}}\cap M_r$. Puisque les vecteurs tangents $\mathcal{X}_{F_1}(m),\ldots,\mathcal{X}_{F_s}(m)$ engendrent un sous-espace de dimension r, on peut supposer que $\mathcal{X}_{F_1}(m),\ldots,\mathcal{X}_{F_r}(m)$ sont indépendants, et donc que les r champs de vecteurs $\mathcal{X}_{F_1},\ldots,\mathcal{X}_{F_r}$ sont indépendants au voisinage de m dans M. On peut supposer que ce voisinage soit inclus dans $\mathcal{U}_{\mathbf{F}}\cap M_r$, car ce dernier est ouvert et contient m. Soit U l'intersection de ce voisinage avec la fibre $\mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)}$, qui est de dimension r ; en réduisant U, si nécessaire, on peut supposer que U soit le domaine d'une carte (U,ϕ) de $\mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)}$, contenant m. Puisque les champs de vecteurs $\mathcal{X}_{F_1},\ldots,\mathcal{X}_{F_r}$ sont indépendants en chaque point de U, il existe des uniques 1-formes $\omega_1,\ldots,\omega_r$ sur U, telles que $\omega_i\left(\mathcal{X}_{F_j}\right)=\delta_{ij}$, pour $1\leqslant i,j\leqslant r$. Ces 1-formes peuvent être calculées en utilisant seulement l'algèbre linéaire. En effet, pour $F\in\mathcal{F}(M)$, on a sur U :

$$\mathrm{d}F=\sum_{i=1}^{r}\{F,F_i\}\,\omega_i \tag{2.3}$$

que l'on applique pour les r fonctions coordonnées $\phi_1\ldots,\phi_r$ de la carte (U,ϕ). Alors

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}\phi_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}\phi_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\{\phi_1,F_1\} & \cdots & \{\phi_1,F_r\}\\ \vdots & & \vdots\\ \{\phi_r,F_1\} & \cdots & \{\phi_r,F_r\}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_r\end{pmatrix}$$

et la matrice $r \times r$ est inversible pour tout $m' \in U$, parce que les vecteurs $\mathcal{X}_{F_i}(m')$ engendrent $T_{m'}U$ pour tout $m' \in U$ et parce que $(\phi_1, \dots, \phi_r)$ est un système de coordonnées sur U. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, la 1-forme ω_i est fermée : les champs de vecteurs $\mathcal{X}_{F_1}, \dots \mathcal{X}_{F_r}$ engendrent l'espace tangent à U en tout point de U et

$$\mathrm{d}\omega_i\left(\mathcal{X}_{F_j}, \mathcal{X}_{F_k}\right) = \mathcal{X}_{F_j}[\omega_i(\mathcal{X}_{F_k})] - \mathcal{X}_{F_k}[\omega_i\left(\mathcal{X}_{F_j}\right)] - \omega_i\left(\left[\mathcal{X}_{F_j}, \mathcal{X}_{F_k}\right]\right)$$

pour tout $1 \leqslant j,k \leqslant r$, ce qui donne zéro, car $\omega_i\left(\mathcal{X}_{F_j}\right)$ est constant et car les champs de vecteurs $\mathcal{X}_{F_j}$ commutent. U étant le domaine d'une carte, ces formes fermées sont exactes et on peut intégrer chacun des 1-formes $\omega_1, \dots, \omega_r$, pour obtenir r fonctions $t_1, \dots, t_r$; les constantes d'intégration sont choisies tel que m corresponde à $t_1 = \cdots = t_r = 0$. Ces fonctions forment un système de coordonnées sur U parce que $\mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_r \neq 0$ sur U, donc, par le théorème des fonctions inverses, on peut écrire les coordonnées $(\phi_1, \dots, \phi_r)$ localement, au voisinage de m, en termes de $(t_1 \dots, t_r)$. Par construction, $\frac{\partial}{\partial t_i} = \mathcal{X}_{F_i}$ dans U. Les fonctions $\phi_i(t_1, \dots, t_r)$ donnent donc la courbe intégrale de $\mathcal{X}_{F_i}$ qui passe par m en prenant $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_r$ égaux à zéro. En utilisant les équations $F_i = c_i$, on calcule la courbe intégrale correspondante de $\mathcal{X}_{F_i}$, comme courbe dans M, utilisant le théorème des fonctions implicites. □

Exemple 2.8. Le premier exemple d'un système intégrable est celui de l'oscillateur harmonique. Sur $T^*\mathbb{R}^n$ avec les coordonnées naturelles $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ (positions + impulsions) on prend la structure de Poisson canonique,

$$\{F, G\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right),$$

et on considère l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^2.$$

Le champ hamiltonien correspondant à H est donné explicitement par

$$\mathcal{X}_H : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q}_i &=& p_i, \\ \dot{p}_i &=& -2\alpha_i q_i, \end{array} \right. \qquad i = 1, \dots, n.$$

Les n fonctions $F_i := p_i^2/2 + \alpha_i q_i^2$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$ sont en involution avec H car

$$\mathcal{X}_H[F_i] = \dot{F}_i = \left(\frac{p_i^2}{2} + \alpha_i q_i^2 \right)^{\cdot} = p_i(-2\alpha_i q_i) + 2\alpha_i q_i p_i = 0.$$

Il est évident que les fonctions F_i sont deux à deux en involution,

$$\left\{ \frac{p_i^2}{2} + \alpha_i q_i^2, \frac{p_j^2}{2} + \alpha_j q_j^2 \right\} = 0,$$

pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Ces fonctions sont indépendantes et $H = \sum_{i=1}^n F_i$. Par conséquent, $(T^*\mathbb{R}^n, \{\cdot, \cdot\}, \{F_1, \dots, F_{n-1}, H\})$ est un système intégrable.

Exemple 2.9. Le système intégrable de Hénon-Heiles est défini à partir de l'hamiltonien
$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + 2q_1^3 + q_1 q_2^2,$$
sur $T^*\mathbb{R}^2$, qu'on munit de la même structure de Poisson que dans l'exemple précédent (pour $n = 2$). Le champ hamiltonien correspondant à H est donné explicitement par
$$\mathcal{X}_H : \left\{ \begin{array}{rclrcl} \dot{q}_1 & = & p_1, & \dot{p}_1 & = & -6q_1^2 - q_2^2, \\ \dot{q}_2 & = & p_2, & \dot{p}_2 & = & -2q_1 q_2. \end{array} \right.$$
Soit K la fonction, définie par
$$K := 4p_2(p_1 q_2 - p_2 q_1) + q_2^2(4q_1^2 + q_2^2).$$
On trouve, par un calcul direct,
$$\begin{aligned} \dot{K} &= -8q_1 q_2(p_1 q_2 - p_2 q_1) + 4p_2(-6q_1^2 q_2 - q_2^3 + 2q_1^2 q_2) \\ &\quad +8q_1 q_2^2 p_1 + 8q_1^2 q_2 p_2 + 4q_2^3 p_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$
Il est clair que H et K sont indépendants. Donc, $(T^*\mathbb{R}^2, \{\cdot,\cdot\}, (H,K))$ est un système intégrable.

Théorème 2.10 (Liouville)**.** *Soit* $(M, \{\cdot,\cdot\}, \mathbf{F})$ *un système intégrable, avec* $\dim M = n$, $\mathrm{Rk}\{\cdot,\cdot\} = 2r$ *et* $\mathbf{F} = \{F_1, \ldots, F_s\}$ *(donc* $n = r + s$*). Soit* $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_r$*. Si le flot de chacun des* $\mathcal{X}_{F_i}$ *est complet sur la variété invariante* $\mathbf{F}_m$*, il existe un difféomorphisme de* $\mathbf{F}_m$ *sur le cylindre* $\mathbb{R}^{r-q} \times \mathbb{T}^q$ *(*$0 \leqslant q \leqslant r$*) tel que les champs* $\mathcal{X}_{F_i}$*, transportés sur* $\mathbb{R}^{r-q} \times \mathbb{T}^q$ *par ce difféomorphisme, soient constants (invariant par translation). En particulier, si* $\mathbf{F}_m$ *est compact, alors* $\mathbf{F}_m$ *est difféomorphe à un tore (et les champs* $\mathcal{X}_{F_i}$ *y sont constants).*

Preuve. On peut supposer que $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_r}$ soient indépendants en m. Alors $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_r}$ sont indépendants sur $\mathbf{F}_m$, car pour $i = 1, \ldots, s$,
$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}_{F_i}}(\mathcal{X}_{F_1} \wedge \ldots \wedge \mathcal{X}_{F_r}) = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{X}_{F_1} \wedge \ldots \wedge \left[\mathcal{X}_{F_i}, \mathcal{X}_{F_j}\right] \wedge \ldots \wedge \mathcal{X}_{F_r} = 0.$$
On définit une action de $\mathbb{R}^r$ sur $\mathbf{F}_m$ par
$$((t_1, \ldots, t_r), m) \mapsto \Phi_{t_1}^{(1)} \circ \cdots \circ \Phi_{t_r}^{(r)}(m),$$
où $\Phi^{(i)}$ est le flot de $\mathcal{X}_{F_i}$. C'est une action : les flots des champs $\mathcal{X}_{F_i}$ commutent car ces champs commutent, $\left[\mathcal{X}_{F_i}, \mathcal{X}_{F_j}\right] = 0$. L'action est transitive : la distribution est engendrée par $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_r}$ au voisinage de la feuille, donc $\mathbf{F}_m$ est une variété intégrale de la distribution définie par $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_r}$. Le stabilisateur est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^r$ car les champs de vecteurs $\mathcal{X}_{F_1}, \ldots, \mathcal{X}_{F_r}$ sont indépendants en m. L'action induit donc un difféomorphisme entre $\mathbb{R}^r/\Lambda$ et $\mathbf{F}_m$, où Λ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^r$, $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^q$. Par construction, le flot est linéaire en termes de $(t_1, \ldots, t_r)$. Topologiquement,
$$\mathbf{F}_m = \mathbb{R}^r/\Lambda = (\mathbb{R}^{r-q} \times \mathbb{R}^q)/\mathbb{Z}^q = \mathbb{R}^{r-q} \times \mathbb{T}^q,$$
donc $\mathbf{F}_m$ est difféomorphe à un cylindre. Si $\mathbf{F}_m$ est compact, alors $\mathbb{R}^{r-q} \times \mathbb{T}^q$ est compact, donc $q = r$ et $\mathbf{F}_m$ est difféomorphe à un tore. Ces tores sont appelés les *tores de Liouville*. $\square$

Exemple 2.11. Les conditions qui figurent dans le théorème de Liouville ne sont pas toujours satisfaites et la topologie des variétés invariantes $\mathbf{F}_m$ peut être assez compliquée. Voici une classe d'exemples, qui donne déjà dans le cas de dimension 2 des topologies assez variées. Sur $\mathbb{C}^2$ on considère la structure de Poisson

$$\{\cdot,\cdot\} := \frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

La partie réelle et imaginaire de $\{\cdot,\cdot\}$ sont des structures de Poisson (réelles) sur $\mathbb{R}^2$. Écrivant $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$, pour $i = 1,2$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

et on pose

$$\begin{aligned}
\{\cdot,\cdot\}_{\Re} &:= 4\Re\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \\
&= \Re\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}\right) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\{\cdot,\cdot\}_{\Im} := \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Soit F une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^2$,

$$F = G + \sqrt{-1}H,$$

où G et H sont la partie réelle resp. imaginaire de F. On voit G et H comme des fonctions lisses sur $\mathbb{R}^4$. Par un calcul direct,

$$\begin{aligned}
\{\cdot,G\}_{\Re} &= \frac{\partial G}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial G}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial G}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial y_2}, \\
\{\cdot,H\}_{\Im} &= \frac{\partial H}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}.
\end{aligned}$$

Les équations de Cauchy-Riemann pour F,

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial G}{\partial y_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1,2) \tag{2.4}$$

impliquent alors que $\{\cdot,G\}_{\Re} = \{\cdot,H\}_{\Im}$. Ensuite,

$$\{H,G\}_{\Re} = \{H,H\}_{\Im} = 0, \qquad \text{et} \qquad \{G,H\}_{\Im} = \{G,G\}_{\Re} = 0.$$

Donc (G,H) est involutive par rapport à $\{\cdot,\cdot\}_{\Re}$ et par rapport à $\{\cdot,\cdot\}_{\Im}$. On vérifie que si F n'est pas constante, alors $\left\{m \in \mathbb{R}^4 \mid \mathrm{d}_m G \wedge \mathrm{d}_m H \neq 0\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}^4$. Dans ce cas, $(\mathbb{R}^4, \{\cdot,\cdot\}_{\Re}, (G,H))$ est un système intégrable (et $(\mathbb{R}^4, \{\cdot,\cdot\}_{\Im}, (G,H))$ aussi). Les variétés invariantes sont les composantes connexes des fibres de l'application F, ce sont donc des surfaces de Riemann (non-compactes) ; topologiquement ce sont des surfaces topologiques non-compactes, de genre quelconque.

Pour terminer ce bref aperçu sur l'intégrabilité au sens de Liouville, voici 4 théorèmes importants qui complèteraient le matériel de base, présenté ici.

(1) Le théorème des actions-angles, qui donne une description de ce qui se passe au voisinage des tores de Liouville (voir [14, 9] pour le cas symplectique, [13] pour le cas Poisson) ;

(2) Le théorème d'Adler-Kostant-Symes, qui donne une construction de grandes familles de fonctions en involution, basée sur des décompositions d'algèbres de Lie (voir [4]) ;

(3) Les théorèmes de Ziglin et de Morales-Ruiz, donnant des obstructions à l'intégrabilité, basée sur la théorie de Galois différentielle (voir [15]) ;

(4) Le théorème de convexité d'Atiyah-Sternberg, qui dit que si l'application moment d'un système intégrable sur une variété symplectique compacte engendre l'action d'un tore, alors son image est un polytope convexe (voir [6]).

3 Intégrabilité algébrique

Dans la suite, au lieu de travailler sur $\mathbb{R}$ nous travaillerons sur $\mathbb{C}$. La variété différentielle lisse M sera une variété affine lisse ; pour nous, $\mathbb{C}^n$ suffit. Comme algèbre de fonctions $\mathcal{F}(M)$ sur M nous prenons les fonctions régulières, c.-à-d. les fonctions polynômes en n variables, si $M = \mathbb{C}^n$. La structure de Poisson sera une bidérivation de $\mathcal{F}(M)$, qui satisfait à l'identité de Jacobi. Les courbes intégrales seront maintenant définies sur des ouverts de $\mathbb{C}$, plutôt que sur des intervalles. Si, par exemple, une structure de Poisson polynomiale est donnée sur $\mathbb{R}^n$, on peut complexifier la structure de Poisson en tensorisant tout par $\mathbb{C}$.

Dans le contexte complexe, on peut définir la notion d'intégrabilité au sens de Liouville comme dans le cas réel. En examinant les preuves données ci-dessus, on vérifie facilement que les propriétés suivantes restent valables pour un système intégrable complexe $(M, \{\cdot,\cdot\}, \mathbf{F})$, où $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$.

(1) Les champs intégrables commutent, $\left[\mathcal{X}_{F_i}, \mathcal{X}_{F_j}\right] = 0$;

(2) Ces champs sont tangents aux fibres lisses de l'application

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{F} & : & M & \to & \mathbb{C}^s \\ & & m & \mapsto & (F_1(m), \dots, F_s(m)); \end{array}$$

(3) Ces champs définissent une distribution intégrable sur $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_r$, qui est ici un ouvert de Zariski (donc dense) ;

(4) Pour $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_r$, la courbe intégrale de $\mathcal{X}_{F_i}$ peut être déterminée par quadratures.

Ce qui ne marche pas, c'est le théorème de Liouville. Que se passe-t-il avec les tores de Liouville ? Peuvent-elles devenir des tores complexes compactes ? Sûrement pas, car le principe du maximum implique que dans l'espace affine $M = \mathbb{C}^n$, il n'y a pas de sous-variétés holomorphes compactes. Un autre problème (plus grave ?!) est que en général les solutions d'un système intégrable ne sont pas uniformes ("single-valued"). Voyons ça sur un exemple simple.

Exemple 3.1. Sur $M = \mathbb{C}^2$ avec la structure de Poisson canonique, définie par $\{x,y\} = 1$, on considère l'hamiltonien $H = y^2 - x^5$. On a : $\mathrm{d}H = 2y\mathrm{d}y - 5x^4\mathrm{d}x$, et donc $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La structure est symplectique, donc $M_r = M_1 = \mathbb{C}^2$, ce qui donne $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_r = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Les fibres de H $(= \mathbf{F})$ au-dessus de $c \in \mathbb{C}^*$ (ce qu'on note comme avant $\mathbf{F}_c$) sont entièrement contenues dans $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_r$, car $H(0,0) = 0$. Le champ hamiltonien est donné par

$$\mathcal{X}_H : \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & 2y, \\ \dot{y} & = & 5x^4. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Pour $c \in \mathbb{C}^*$, le champ de vecteurs $\mathcal{X}_H$ est tangent à la fibre $\mathbf{F}_c$, qui est explicitement donnée par

$$\mathbf{F}_c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^5 + c \right\}.$$

C'est une courbe lisse, aussi appelée surface de Riemann. Topologiquement, $\mathbf{F}_c$ est une surface topologique compacte de genre 2, privée d'un point, qu'on appellera le point à l'infini, et que l'on notera P_∞. On a que $\mathcal{X}_H$ est un champ de vecteurs holomorphe sur $\mathbf{F}_c$ $(c \neq 0)$ qui ne s'annulle en aucun point de $\mathbf{F}_c$. Pour voir ce qui se passe au voisinage du point P_∞ on prend un paramètre local[1] z, défini par $x = 1/z^2$, ce qui donne la paramétrisation suivante

$$x = \frac{1}{z^2}, \qquad y = \frac{1}{z^5}\left(1 + \frac{cz^{10}}{2} + \cdots\right).$$

On peut maintenant écrire le champ hamiltonien $\mathcal{X}_H$ au voisinage de P_∞ en termes de ce paramètre local z, ce qui donne, à partir de $\dot{x} = 2y$,

$$\dot{z} = -\frac{1}{z^2}(1 + O(z)). \tag{3.2}$$

Il est important de noter que $\mathcal{X}_H(z) \to \infty$ quand $z \to 0$. On ne peut donc pas étendre $\mathcal{X}_H$ sur la surface de Riemann compactifiée ! Ensuite, si on intègre (3.2) en l'écrivant comme $-z^2\mathrm{d}z(1 + O(z^{10})) = \mathrm{d}t$, on trouve

$$z(t) = \sqrt[3]{-3t(1 + O(t))}.$$

$z(t)$ n'est pas une fonction uniforme de t au voisinage de 0 : il est bien connu qu'il existe dans aucun voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, une fonction non-triviale dont le cube est la fonction identité $(t \mapsto t)$.

En dimension supérieure, le même phénomème se produit, en général, mais il est difficile de le détecter avec la méthode de l'exemple 3.1, car en dimension supérieure il n'y a pas un point mais une hypersurface à l'infini, et le paramètre local devient un système de paramètres, difficile à calculer ! Toutefois, il y a une autre méthode, déjà employée par Sophie Kovalewksi, qui est très efficace en toute dimension. Elle consiste à la recherche de solutions de Laurent des équations différentielles qui décrivent le champ intégrable. Montrons d'abord que dans le cas de l'exemple précédent, de telles solutions (strictes) n'existent pas.

[1] Un paramètre local n'est rien que l'inverse d'une carte holomorphe en dimension 1 ; il s'agit ici d'une carte holomorphe en un point du compactifié ("à l'infini"). Consultez l'excellent livre [7] pour des méthodes pour déterminer un paramètre local.

Exemple 3.2. On cherche des solutions de Laurent de (3.1), sans utiliser le paramètre local z. En éliminant y, on peut écrire (3.1) comme $\ddot{x} = 10x^4$. On cherche d'abord $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ avec $n > 0$ ("strict") tel que

$$x(t) = \frac{a}{t^n}(1 + O(t))$$

soit une solution (formelle, pour commencer) de $\ddot{x} = 10x^4$. Une substitution simple donne

$$\frac{n(n+1)a}{t^{n+2}}(1 + O(t)) = \frac{10a^4}{t^{4n}}(1 + O(t)).$$

Puisque $a \neq 0$, on a $4n = n + 2$, et donc $n = 2/3 \notin \mathbb{Z}$. Il n'existe donc pas de solutions de Laurent strictes (i.e., qui ne soient pas des solutions de Taylor) formelles, et en particulier pas de telles solutions convergentes.

Dans des bons cas, à définir plus tard, des solutions de Laurent (strictes) formelles, mêmes convergentes, existent. Montrons ça d'abord sur un exemple, qui est une petite, mais importante, modification de l'exemple (3.1), pour lequel le lecteur pourra facilement vérifier, en prenant en paramètre local, que le champ hamiltonien peut être étendu sur la surface de Riemann compactifiée.

Exemple 3.3. On considère sur $M = \mathbb{C}^2$, toujours avec la structure de Poisson canonique, l'hamiltonien $H = y^2 - x^3$. On écrit le champ hamiltonien

$$X_H : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2y, \\ \dot{y} & = & 3x^2, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

sous la forme $\ddot{x} = 6x^2$ et on cherche des solutions de Laurent $x(t) = \frac{a}{t^n}(1 + O(t))$ de (3.3), avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On voit bien que $a = 1$, $n = 2$ marche, mais il y a plus : si on cherche à déterminer les termes suivants dans la série, en posant

$$x(t) = \frac{1}{t^2}(1 + a_k t^k + O(t^{k+1})),$$

on trouve par une simple substitution que $a_k = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant 5$, et surtout, pour $n = 6$, que le paramètre a_6 peut être choisi arbitrairement ! En effet, on a :

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{1}{t^2}(1 + at^6 + O(t^7)), \\ \ddot{x}(t) & = & \dfrac{6}{t^4} + 12at^2 + O(t^3), \\ 6x^2(t) & = & 6\left(\dfrac{1}{t^4} + 2at^2 + O(t^3)\right). \end{array}$$

Les autres coefficients étant déterminés uniquement à partir de ces premiers, on a une solution (formelle, on peut montrer qu'elle est convergente pour $|t|$ petit non-nul):

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{1}{t^2} + at^4 + O(t^5), \\ y(t) & = & \dfrac{\dot{x}(t)}{2} = -\dfrac{1}{t^3} + 2at^3 + O(t^4). \end{array}$$

Substitué dans l'hamiltonien $H = y^2 - x^3$, on trouve

$$\begin{aligned} H(x(t),y(t)) &= y^2(t) - x^3(t) \\ &= \frac{1}{t^6} - 4a + O(t) - \left(\frac{1}{t^6} + 3a + O(t)\right) \\ &= -7a + O(t). \end{aligned}$$

En effet, puisque H est une constante de mouvement, $H(x(t),y(t))$ est indépendant de t, i.e., $H(x(t),y(t)) = c$, où $c \in \mathbb{C}$ est une constante qui dépend uniquement de la condition initiale, et on a : $-7a = c$.

On voit dans l'exemple que le paramètre libre nous permet d'avoir une solution de Laurent pour chaque variété intégrale $\mathbf{F}_c$! C'est pour cette raison que, dans les "bons" cas, il existe des solutions, dépendant d'un (ou de plusieurs) paramètres. Pour donner un énoncé plus précis, nous introduisons, suivant [2], la notion d'intégrabilité algébrique (voir aussi le livre [4]).

Définition 3.4. Soit $(\mathbb{C}^n, \{\cdot,\cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable, où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson polynomial et $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s)$ est constitué de polynômes. On dit que c'est un système *algébriquement complètement intégrable* (système *a.c.i.*) si

(1) Pour $c \in \mathbb{C}^s$ générique, la fibre $\mathbf{F}_c$ est isomorphe à une partie affine d'un tore complexe algébrique,

$$\mathbf{F}_c \simeq \left(\mathbb{C}^{n-s}/\Lambda_c\right) \setminus \mathcal{D}_c,$$

où Λ_c est un réseau dans $\mathbb{C}^{n-s}$ et $\mathcal{D}_c$ est une hypersurface algébrique de $\mathbb{C}^{n-s}/\Lambda_c$;

(2) Les champs de vecteurs $\mathcal{X}_{F_i}$, restreints à $\mathbf{F}_c$ (avec c générique) sont constants.

Un tore complexe algébrique $\mathbb{C}^r/\Lambda$, aussi appelé tore complexe projectif ou variété abélienne, est par définition un tore $\mathbb{C}^r/\Lambda$ qu'on peut plonger dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$. Pour $r = 1$, $\mathbb{C}/\Lambda$ est toujours algébrique, on parle d'une *courbe elliptique*. Pour $r > 1$, $\mathbb{C}^r/\Lambda$ n'est pas algébrique en général (ça dépend de Λ).

Exemple 3.5. L'exemple principal d'une variété abélienne, qui est aussi l'exemple le plus important dans la théorie des systèmes intégrables (mais pas le seul !), est la jacobienne d'une surface de Riemann. Rappelons brièvement la construction. Soit Γ une surface de Riemann compacte de genre $g > 0$. On a : $\dim \Omega^1(\Gamma) = g$ (différentielles holomorphes sur Γ) et $\operatorname{Rk} H_1(\Gamma,\mathbb{Z}) = 2g$ (premier groupe d'homologie de Γ). On a une inclusion :

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & H_1(\Gamma,\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & \left(\Omega^1(\Gamma)\right)^* \\ & [\gamma] & \mapsto & \int_\gamma \end{array}$$

c.-à-d. pour tout $\omega \in \Omega^1(\Gamma)$, on définit $\Psi([\gamma])(\omega) := \int_\gamma \omega$. Puisque Ψ est injectif, son image est un réseau dans $\left(\Omega^1(\Gamma)\right)^*$ et

$$\operatorname{Jac}(\Gamma) := \frac{\left(\Omega^1(\Gamma)\right)^*}{\Psi(H_1(\Gamma,\mathbb{Z}))}$$

est un tore complexe de dimension g, appelé la (variété) *jacobienne* de Γ. On démontre que $\operatorname{Jac}(\Gamma)$ est algébrique, donc est une variété abélienne.

Voici un exemple, à la fois simple et compliqué, d'un système algébriquement complètement intégrable (voir [4] et [10] pour deux preuves différentes).

Exemple 3.6. Sur $\mathbb{C}^5$ avec des coordonnées $x_1,\ldots,x_5$, on considère la structure de Poisson, définie par

$$\{x_i,x_j\} = x_i x_j(\delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j}),$$

où $x_6 := x_1$ et $x_0 := x_5$. On vérifie facilement que $H_0 := x_1x_2x_3x_4x_5$ est un Casimir et que la structure de Poisson est de rang 4, presque partout. Les deux hamiltoniens

$$\begin{aligned} H_1 &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5, \\ H_2 &= x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+x_4x_1+x_5x_2, \end{aligned}$$

sont en involution et H_0,H_1,H_2 sont indépendants, donc $(\mathbb{C}^5,\{\cdot,\cdot\},(H_0,H_1,H_2))$ est un système intégrable. Pour $c := (c_1,c_2) \in \mathbb{C}^2$ on considère la courbe affine

$$\Gamma_c := \left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid (x^3-c_1x^2+c_2x)^2-4x = y^2\right\}.$$

On montre alors que, pour tout c tel que Γ_c soit lisse, la surface affine

$$\left\{(x_1,\ldots,x_5)\in\mathbb{C}^5 \mid H_0(x)=1,\, H_1(x)=c_1,\, H_2(x)=c_2\right\}$$

est isomorphe à $\mathrm{Jac}(\Gamma_c)\setminus\mathcal{D}_c$, où $\mathcal{D}_c$ est constitué de 5 copies de Γ_c dans $\mathrm{Jac}(\Gamma_c)$. De plus, les flots de $\mathcal{X}_{H_1}$ et de $\mathcal{X}_{H_2}$ sont linéaires sur chaque $\mathrm{Jac}(\Gamma_c)$. Ce système intégrable est donc a.c.i. Voir Figure 1. pour la configuration précise des 5 copies de Γ_c dans $\mathrm{Jac}(\Gamma_c)$.

Figure 1. Le diviseur $\cup_{i=1}^5\mathcal{D}_c^{(i)}$ est constitué de cinq courbes de genre deux, qui se coupent en cinq points, qui est chacun un point triple du diviseur. Pour rendre la figure exacte, il faut identifier les deux points d'étiquette P_1, ainsi que les deux points d'étiquette P_5, de sorte que les courbes $\mathcal{D}_c^{(2)}$ et $\mathcal{D}_c^{(5)}$ soient tangentes, ainsi que les deux courbes $\mathcal{D}_c^{(1)}$ et $\mathcal{D}_c^{(4)}$.

Voici l'énoncé précis, portant sur l'existence de séries de Laurent pour les systèmes a.c.i.

Théorème 3.7. *Soit* $(M,\{\cdot,\cdot\},\mathbf{F})$ *un système a.c.i. irréductible. Il existe pour chacun des* X_{F_i} *des solutions de Laurent qui dépendent de* $\dim M-1$ *paramètres libres.*

Nous renvoyons à [4] pour la notion d'irréductibilité d'un système a.c.i. (on demande que la fibre générique, qui est un ouvert dans une variété abélienne, soit irréductible ; en gros une variété abélienne est irréductible si elle n'est pas le produit de tores de dimension plus petite) ainsi que pour la preuve du théorème, qui utilise de façon essentielle la théorie des variétés abéliennes.

Le théorème 3.7 s'avère très efficace pour sélectionner, dans une famille d'hamiltoniens donnée, ceux qui sont intégrables et/ou a.c.i. Utilisé à ce fin, on l'appelle le *critère de Kowalevski-Painlevé*. Voici deux exemples.

Exemple 3.8. Sur $\mathbb{C}^4$, avec la structure de Poisson canonique, on considère la famille d'hamiltoniens (dépendants de ε)

$$H=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)+\frac{\varepsilon}{3}x_1^3+x_1x_2^2.$$

Le champ hamiltonien est alors donné par :

$$X_H:\left\{\begin{array}{lllllll}\dot{x}_1&=&y_1,&\quad&\dot{y}_1&=&-\varepsilon x_1^2-x_2^2,\\ \dot{x}_2&=&y_2,&&\dot{y}_2&=&-2x_1x_2.\end{array}\right.$$

Les solutions de Laurent sont de la forme

$$x_i(t)=\frac{1}{t^2}\sum_{k\geq 0}x_i^{(k)}t^k,\qquad i=1,2.$$

avec $\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)}\right)=\left(-\frac{6}{\varepsilon},0\right)$ ou $\left(-3,\pm 3\sqrt{2-\varepsilon}\right)$ et les coefficients suivants sont déterminés récursivement, mais linéairement, par les coefficients précédents, avec comme matrice, à l'étape k, la matrice

$$K_1(k):=\begin{pmatrix}(k+1)(k-6)&0\\0&(k-2)(k-3)-12/\varepsilon\end{pmatrix}$$

pour la première solution, et

$$K_2(k):=\begin{pmatrix}(k-2)(k-3)-6\varepsilon&\pm 6\sqrt{2-\varepsilon}\\ \pm 6\sqrt{2-\varepsilon}&(k-5)k\end{pmatrix}$$

pour la deuxième. Selon le critère de Kowalevski-Painlevé, pour que H soit un des hamiltoniens d'un système a.c.i., il faut que $\det K_1$ ou $\det K_2$ ait 3 racines non-négatives. Puisque $\det K_1(k)=(k+1)(k-6)((k-2)(k-3)-12/\varepsilon)$ et $\det K_2(k)=(k+1)(k-6)(k^2-5k+6(2-\varepsilon))$, on peut conclure que, dans ce cas,

$$\varepsilon\in\{1,2,4/3,6\}.$$

L'existence de séries de Laurent dépendant de 2 paramètres libres (une extension du critère de Kowalevski-Painlevé) montrent que seulement $\varepsilon=1$ et $\varepsilon=6$ peuvent correspondre à un système a.c.i. (et, en effet, c'est le cas !).

Exemple 3.9. Dans le deuxième exemple, du à Adler et van Moerbeke [3], on donne une caractérisation des réseaux de Toda périodiques, en utilisant le critère de Kowalevski-Painlevé. Soient $e_0, e_1, \ldots, e_\ell$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^{\ell+1}$, tels que

(1) Les vecteurs $e_0, e_1, \ldots, e_\ell$ sont linéairement dépendants ;

(2) Pour tout i, les vecteurs $e_0, e_1, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_\ell$ sont linéairement indépendants ;

(3) Si $\sum_{i=0}^{\ell} \xi_i e_i = 0$ et $\sum_{i=0}^{\ell} \xi_i = 0$ alors $(\xi_0, \ldots, \xi_\ell) = (0, \ldots, 0)$.

Il est clair que tout système *générique* de $\ell+1$ vecteurs *dépendants* dans $\mathbb{R}^{\ell+1}$ satisfait à ces trois conditions. Soit $A = (a_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant \ell}$ la matrice, dont les éléments sont définis par

$$a_{ij} := 2\frac{\langle e_i \,|\, e_j \rangle}{\langle e_j \,|\, e_j \rangle}.$$

On considère alors sur $\mathbb{C}^{2(\ell+1)}$, dont on note les coordonnées $x = (x_0, \ldots, x_\ell)$ et $y = (y_0, \ldots, y_\ell)$ le champ de vecteurs

$$X_A : \begin{cases} \dot{x} & = & x \cdot y, \\ \dot{y} & = & Ax, \end{cases}$$

où $x \cdot y = (x_0 y_0, \ldots, x_\ell y_\ell)$. Alors, en utilisant le critère de Kowalevski-Painlevé, on montre que X_A est un champ de vecteurs d'un système a.c.i. irréductible, seulement si A est la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie affine (éventuellement twistée). Réciproquement, si A est une telle matrice, alors X_A est le champ intégrable (au sens de Liouville) ; le fait qu'elle appartienne à un système a.c.i. (irréductible) a été établi pour des cas particuliers d'algèbres de Lie, mais pas en toute généralité. Ces systèmes intégrables sont dans la littérature connus comme les systèmes de Toda périodiques généralisés.

References

[1] Mark Adler and Pierre van Moerbeke, *Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory*, Adv. in Math. **38** (1980), no. 3, 318–379.

[2] ______, *The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 3–51.

[3] ______, *The Toda lattice, Dynkin diagrams, singularities and abelian varieties*, Invent. Math. **103** (1991), no. 2, 223–278.

[4] Mark Adler, Pierre van Moerbeke, and Pol Vanhaecke, *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 47, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[5] V. I. Arnol′d, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1991, Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, Corrected reprint of the second (1989) edition.

[6] Michael Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15.

[7] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[8] Ron Donagi and Eyal Markman, *Spectral covers, algebraically completely integrable, Hamiltonian systems, and moduli of bundles*, Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), Lecture Notes in Math., vol. 1620, Springer, Berlin, 1996, pp. 1–119.

[9] J. J. Duistermaat, *On global action-angle coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 6, 687–706.

[10] Rui Loja Fernandes and Pol Vanhaecke, *Hyperelliptic Prym varieties and integrable systems*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), no. 1, 169–196.

[11] Luc Haine, *The algebraic complete integrability of geodesic flow on* $\mathrm{SO}(N)$, Comm. Math. Phys. **94** (1984), no. 2, 271–287.

[12] Nigel Hitchin, *Stable bundles and integrable systems*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 1, 91–114.

[13] Camille Laurent-Gengoux, Eva Miranda and Pol Vanhaecke, *Action-angle coordinates for integrable systems on Poisson manifolds*, arXiv:math-ph/0805.1679.

[14] P. Libermann and C.-M. Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics*, volume 35 of *Mathematics and its Applications*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the French by B. E. Schwarzbach.

[15] Juan J. Morales Ruiz, *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Mathematics, vol. 179, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[16] Izu Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progress in Mathematics, vol. 118, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[17] Pol Vanhaecke, *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, second ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1638, Springer-Verlag, Berlin, 2001.