Functiones et Approximatio
56.2 (2017), 239–258
doi: 10.7169/facm/1609

LE PREMIER COEFFICIENT NÉGATIF DES FONCTIONS L DE PUISSANCES SYMÉTRIQUES

Kamel Mazhouda, Khadija Mbarki, Jie Wu

Abstract: Désignons par $\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n)$ le n-ème coefficient dans la série de Dirichlet représentant la fonction L de puissances symétriques $L(s, \mathrm{sym}^m f)$ associée à une forme primitive f de poids k et de niveau N. Dans ce papier, on étudie la taille de l'entier le plus petit n tel que $\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n) < 0$ et $(n, N) = 1$. En désignant par $n_{\mathrm{sym}^m f}$ cet entier, on montre que

$$n_{\mathrm{sym}^3 f} \ll (k^4 N^3)^{6/31} \qquad \text{et} \qquad n_{\mathrm{sym}^4 f} \ll (k^4 N^4)^{5/36},$$

où les constantes impliquées sont absolues.

Keywords: Formes modulaires, fonctions L, coefficients de Fourier, signes.

1. Introduction

Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $N \geqslant 1$ un entier sans facteur carré. Notons $\mathcal{H}_k^*(N)$ l'ensemble des formes holomorphes primitives de poids k pour le groupe de congruence $\Gamma_0(N)$. Chaque $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$ a un développement de Fourier en ∞ qu'on note

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n z} \qquad (\Im m\, z > 0),$$

où $\lambda_f(n)$ est le n-ème coefficient de Fourier normalisé de f et vérifie la relation de Hecke

$$\lambda_f(n)\lambda_f(m) = \sum_{\substack{d \mid (m,n) \\ (d,N)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

pour tous les entiers positifs m et n. Un résultat de Deligne [3, 4] implique que pour chaque nombre premier p il existe deux nombres complexes $\alpha_f(p)$ et $\beta_f(p)$

Ce travail est soutenu par le projet de recherche Franco-Tunisien CNRS-DGRST Code 14/R 1501.

2010 Mathematics Subject Classification: primary: 11F12, 11F30; secondary: 11M41

tels que

$$\begin{cases} |\alpha_f(p)| = \alpha_f(p)\beta_f(p) = 1 & \text{si } p \nmid N \\ \alpha_f(p) = \varepsilon_f(p)p^{-1/2}, \ \beta_f(p) = 0 & \text{si } p \mid N \end{cases} \tag{1.1}$$

avec $|\varepsilon_f(p)| = 1$, et

$$\lambda_f(p^\nu) = \begin{cases} \alpha_f(p)^\nu + \alpha_f(p)^{\nu-1}\beta_f(p) + \cdots + \beta_f(p)^\nu & \text{si } p \nmid N \\ \big(\varepsilon_f(p)p^{-1/2}\big)^\nu & \text{si } p \mid N \end{cases} \tag{1.2}$$

pour tout entier $\nu \geqslant 1$. Par conséquence, on a

$$|\lambda_f(n)| \leqslant d(n) \qquad (n \geqslant 1), \tag{1.3}$$

où $d(n)$ est le nombre des diviseurs de n. De plus pour chaque $p \nmid N$, il existe un unique $\theta_f(p) \in [0, \pi]$ tel que

$$\lambda_f(p) = 2\cos\theta_f(p). \tag{1.4}$$

Si m est un entier positif et $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$ alors on construit la m-ème puissance symétrique de f qu'on note $\mathrm{sym}^m f$. Quand $m = 1, 2, 3, 4$, on sait que $\mathrm{sym}^m f$ est une forme automorphe. Dans le cas général, c'est prédit par la conjecture de Langlands-Serre [5]. Il est aisé de la définir via sa fonction L. On définit alors pour $\Re e\, s > 1$

$$L(s, \mathrm{sym}^m f) = \prod_p \prod_{0 \leqslant j \leqslant m} \big(1 - \alpha_f(p)^{m-j}\beta_f(p)^j p^{-s}\big)^{-1} = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n) n^{-s}.$$

Il est facile de voir que la fonction $n \mapsto \lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n)$ est réelle multiplicative et satisfait

$$|\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n)| \leqslant d_{m+1}(n) \qquad (n \geqslant 1), \tag{1.5}$$

où $d_2(n) = d(n)$ et $d_{m+1}(n) = \sum_{d|n} d_m(d)$. Posons

$$L_\infty(s, \mathrm{sym}^m f) := \begin{cases} \displaystyle\prod_{0 \leqslant j \leqslant n} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \left(j + \tfrac{1}{2}\right)(k-1)\right) & \text{si } m = 2n+1 \\ \displaystyle\Gamma_{\mathbb{R}}(s + \delta_{2\nmid n}) \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \Gamma_{\mathbb{C}}(s + j(k-1)) & \text{si } m = 2n \end{cases}$$

avec $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ et

$$\delta_{2\nmid n} := \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \nmid n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.6}$$

La fonction complétée $\Lambda(s, \mathrm{sym}^m f)$ est définie par

$$\Lambda(s, \mathrm{sym}^m f) := L_\infty(s, \mathrm{sym}^m f) L(s, \mathrm{sym}^m f).$$

Pour $m \in \{1,2,3,4\}$, il est connu (voir [2]) que $\Lambda(s, \mathrm{sym}^m f)$ est une fonction entière et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(s, \mathrm{sym}^m f) = \varepsilon_{\mathrm{sym}^m f} \Lambda(1-s, \mathrm{sym}^m f)$$

sur $\mathbb{C}$, où $\varepsilon_{\mathrm{sym}^m f} = \pm 1$. Elles sont démontrées si $m = 1$, par Gelbart et Jacquet [6] si $m = 2$ et par Kim et Shahidi si $m = 3, 4$. En fait, Kim et Shahidi [7] ont établi l'équation fonctionnelle et le prolongement méromorphe de $L(s, \mathrm{sym}^m f)$ sur $\mathbb{C}$ pour $m = 5, \ldots, 9$ et l'holomorphie et la non-annulation de $L(s, \mathrm{sym}^m f)$ dans le demi-plan $\Re e\, s \geqslant 1$ pour $m = 5, \ldots, 8$. Pour $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ et $m = 1, 2, 3, 4$ ou $m \geqslant 5$ sous la conjecture de Langlands-Serre, on a la borne de convexité

$$L(\sigma + \mathrm{i}\tau, \mathrm{sym}^m f) \ll_f \big(N^m(|\tau| + k)^m(|\tau| + k^{\delta_{2\nmid m}})\big)^{(1-\sigma)/2+\varepsilon}, \tag{1.7}$$

où $\delta_{2\nmid m}$ est défini par (1.6) (voir [1]).

Dans cet article, nous nous intéressons au problème du premier changement de signes de la suite des coefficiens de Dirichlet de $L(s, \mathrm{sym}^m f)$. Désignons par $n_{\mathrm{sym}^m f}$ le plus petit entier n tel que

$$\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n) < 0 \qquad \text{et} \qquad (n, N) = 1;$$

et cherchons des bornes de $n_{\mathrm{sym}^m f}$ en terme du conducteur de $L(s, \mathrm{sym}^m f)$ donné par

$$Q_{\mathrm{sym}^m f} := \begin{cases} k^m N^m & \text{si } m \text{ est pair,} \\ k^{m+1} N^m & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases} \tag{1.8}$$

Pour $m = 1$, Iwaniec, Kohnen & Sengupta [8] ont montré que

$$n_{\mathrm{sym}^1 f} \ll (k^2 N)^{29/60},$$

où la constante impliquée est absolue. L'exposant $\frac{29}{60}$ a été amélioré en $\frac{9}{20}$ et $\frac{3}{8}$ par Kowalski, Lau, Soundararajan & Wu [9] et par Matomäki [12], respectivement. Quand $m = 2$, Lau, Liu et Wu [10, Theorem 1] ont établi que

$$n_{\mathrm{sym}^2 f} \ll (k^2 N^2)^{40/113},$$

où la constante dans le symbole de Vinogradov est absolue.

Dans cet article, nous traitons le cas où $m = 3, 4$. Nous avons le résultat suivant.

Théor?me 1.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $N \geqslant 1$ un entier sans facteur carré et $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$. Alors on a*

$$n_{\mathrm{sym}^3 f} \ll Q_{\mathrm{sym}^3 f}^{6/31} \qquad \text{et} \qquad n_{\mathrm{sym}^4 f} \ll Q_{\mathrm{sym}^4 f}^{5/36},$$

où les constantes impliquées sont absolues.

Remarque. Soient $L(s,\pi)$ la fonction automorphe associée à une représentation cuspidale irréductible π de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ et $\lambda_\pi(n)$ le n-ème coefficient de Dirichlet de $L(s,\pi)$. Désignons par n_π le plus petit entier n tel que

$$\lambda_\pi(n) < 0 \qquad \text{et} \qquad (n, N_\pi) = 1,$$

où N_π est le conducteur arithmétique de $L(s,\pi)$. En désignant par Q_π le conducteur analytique de $L(s,\pi)$, Qu [13] a montré que $n_\pi \ll_{m,\varepsilon} Q_\pi^{1609:m/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, où la constante impliquée ne dépend que de m et ε. L'exposant $m/2$ a été réduit à 1 pour $m \geqslant 2$ par Liu, Qu & Wu [11]. Puisque $\mathrm{sym}^m f$ est un cas particulier de représentations cuspidales irréductibles π de $GL_{m+1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, notre théorème améliore le résultat de Liu, Qu & Wu dans ce cas particulier pour $m = 3, 4$.

2. Une expression de $\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p^\nu)$ en $\theta_f(p)$

Soit $U_m(u)$ le polynôme de Tchebychef de second espèce de degré m. Il est bien connu que (voir par exemple [14])

$$\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p) = \lambda_f(p^m) = U_m(\cos\theta_f(p)) = \frac{\sin((m+1)\theta_f(p))}{\sin\theta_f(p)} \qquad (p \nmid N). \tag{2.1}$$

Par conséquent, si n est un entier sans facteur carré premier avec N, on a

$$\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n) = \lambda_f(n^m). \tag{2.2}$$

La démonstration du Théorème 1.1 se base sur la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $N \geqslant 1$ un entier sans facteur carré et $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$. Pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $\nu \geqslant 0$, on a*

$$\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p^\nu) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\sin((\nu+j)\theta_f(p))}{\sin(j\theta_f(p))} \qquad (p \nmid N), \tag{2.3}$$

où $\theta_f(p)$ est défini comme dans (1.4).

D'abord, nous établirons une formule de récurrence de $\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p^\nu)$ sur m.

Lemme 2.2. *Sous les notations de la Proposition 2.1, on a*

$$\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p^\nu) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[m\nu-(m+1)j]\theta_f(p)} \lambda_{\mathrm{sym}^{m-1} f}(p^j) \tag{2.4}$$

pour tous entiers $\nu \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ et tout nombre premier p.

Démonstration. Pour la simplicité de notations, on écrit

$$\alpha := \alpha_f(p), \qquad \beta := \beta_f(p), \qquad \theta = \theta_f(p).$$

Le produit eulérien de $L(s, \mathrm{sym}^m f)$ est

$$L(s, \mathrm{sym}^m f) = \prod_p L_p(s, \mathrm{sym}^m f)$$

avec

$$\begin{aligned} L_p(s, \mathrm{sym}^m f) &= \prod_{\ell=0}^{m} \left(1 - \frac{\alpha^\ell \beta^{m-\ell}}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{\ell=0}^{m} \left(1 - \frac{\alpha^{2\ell-m}}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \prod_{\ell=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(2\ell-m)\nu}}{p^{\nu s}}. \end{aligned}$$

En développant le produit, on trouve

$$\begin{aligned} L_p(s, \mathrm{sym}^m f) &= \sum_{\nu_0=0}^{\infty} \frac{\alpha^{-m\nu_0}}{p^{\nu_0 s}} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\alpha^{-(m-2)\nu_1}}{p^{\nu_1 s}} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\alpha^{-(m-4)\nu_2}}{p^{\nu_2 s}} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m\nu_m}}{p^{\nu_m s}} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\nu s}} \sum_{\substack{(\nu_0,\dots,\nu_m)\in\mathbb{N}^{m+1} \\ \nu_0+\cdots+\nu_m=\nu}} \alpha^{\sum_{\ell=0}^{m}(2\ell-m)\nu_\ell}. \end{aligned}$$

En identifiant le coefficient de $p^{-\nu s}$, on obtient

$$\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p^\nu) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\nu\theta} \sum_{\substack{(\nu_0,\dots,\nu_m)\in\mathbb{N}^{m+1} \\ \nu_0+\cdots+\nu_m=\nu}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\sum_{\ell=0}^{m} \ell\nu_\ell\theta} \tag{2.5}$$

pour tout entier $\nu \geqslant 0$ et tout nombre premier p. De plus on peut écrire

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p^\nu) &= \sum_{0\leqslant\nu_m\leqslant\nu} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu m\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2m\nu_m\theta} \sum_{\substack{(\nu_0,\dots,\nu_{m-1})\in\mathbb{N}^m \\ \nu_0+\cdots+\nu_{m-1}=\nu-\nu_m}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\sum_{\ell=0}^{m-1} \ell\nu_\ell\theta} \\ &= \sum_{0\leqslant\nu_m\leqslant\nu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}((m+1)\nu_m-\nu)\theta} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu-\nu_m)(m-1)\theta} \sum_{\substack{(\nu_0,\dots,\nu_{m-1})\in\mathbb{N}^m \\ \nu_0+\cdots+\nu_{m-1}=\nu-\nu_m}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\sum_{\ell=0}^{m-1} \ell\nu_\ell\theta} \\ &= \sum_{0\leqslant\nu_m\leqslant\nu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}((m+1)\nu_m-\nu)\theta} \lambda_{\mathrm{sym}^{m-1} f}(p^{\nu-\nu_m}). \end{aligned}$$

D'où on obtient (2.4) par un simple changement de variable $j = \nu - \nu_m$. ■

Maintenant nous somme prêts à démontrer la Proposition 2.1.

Pour la simplicité de notations, on écrit $\theta = \theta_f(p)$. On démontrera (2.3) par récurrence sur m. Évidemment quand $m = 1$, cette formule est vraie pour tout $\nu \geqslant 0$, grâce à (2.1). On suppose qu'elle est vraie pour m et tout $\nu \geqslant 0$, et on veut démontrer qu'elle est aussi vraie pour $m+1$ et tout $\nu \geqslant 0$. Pour cela, on utilise la formule (2.4) et l'hypothèse de récurrence à écrire

$$\lambda_{\mathrm{sym}^{m+1} f}(p^\nu) = \sum_{j=0}^{\nu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(m+1)\nu-(r+2)j]\theta} \prod_{k=1}^{m} \frac{\sin[(j+k)\theta]}{\sin(k\theta)}.$$

En reportant la relation d'Euler

$$\prod_{k=1}^{m} \sin[(j+k)\theta] = \frac{1}{(2\mathrm{i})^m} \prod_{k=1}^{m} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j+k)\theta}\big)$$

dans la formule précédente, on peut trouver que

$$\lambda_{\mathrm{sym}^{m+1} f}(p^\nu) \prod_{k=1}^{m} \sin(k\theta) = \frac{1}{(2\mathrm{i})^m} \sum_{j=0}^{\nu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(m+1)\nu-(m+2)j]\theta} \prod_{k=1}^{m} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j+k)\theta}\big).$$

D'où

$$\lambda_{\mathrm{sym}^{m+1} f}(p^\nu) \prod_{k=1}^{m+1} \sin(k\theta) = \frac{1}{(2\mathrm{i})^{m+1}} \Sigma_\nu$$

avec

$$\Sigma_\nu := \sum_{j=0}^{\nu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(m+1)\nu-(m+2)j]\theta} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m+1)\theta}\big) \prod_{k=1}^{m} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j+k)\theta}\big).$$

Donc il suffit de montrer que pour tout $\nu \geqslant 0$ on a

$$\Sigma_\nu = \prod_{k=1}^{m+1} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+k)\theta}\big). \tag{2.6}$$

Ensuite on va vérifier (2.6) par récurrence sur $\nu \geqslant 0$ pour tout $m \geqslant 1$ fixé. Évidemment quand $\nu = 0$, la relation (2.6) est trivialement vraie pour tout $m \geqslant 1$. Mainenant on suppose qu'elle est vraie pour ν, et on veut démontrer qu'elle est aussi vraie pour $\nu + 1$. En utilisant la définition de $\Sigma_{\nu+1}$ et en séparant le dernier terme, il est facile de voir que

$$\Sigma_{\nu+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta} \Sigma_\nu + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1)\theta} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m+1)\theta}\big) \prod_{k=1}^{m} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta}\big).$$

En tenant compte de l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Sigma_{\nu+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta} &\prod_{k=1}^{m+1} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+k)\theta}\big) \\ &+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1)\theta} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m+1)\theta}\big) \prod_{k=1}^{m} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta}\big).\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $k = k' + 1$ dans le premier produit, il suit

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\nu+1} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta} \prod_{k=0}^{m} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta}\big) \\
&\qquad + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1)\theta}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m+1)\theta}\big) \prod_{k=1}^{m} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta}\big) \\
&= \prod_{k=1}^{m} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta}\big) \times \\
&\qquad \times \Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1)\theta}\big) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1)\theta}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m+1)\theta}\big)\Big] \\
&= \prod_{k=1}^{m+1} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\nu+1+k)\theta}\big).
\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration.

3. Ensemble des nombres premiers mauvais

Maintenant, on a besoin d'introduire quelques objets.

Lemme 3.1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $N \geqslant 1$ un entier sans facteur carré, $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $D \in \mathbb{N}^*$. En posant*

$$\mathscr{P}_{f,m}^{D} := \bigcup_{1 \leqslant \nu \leqslant D} \{p : \lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p^\nu) = 0\}, \tag{3.1}$$

on a

$$|\mathscr{P}_{f,m}^{D}| \ll_{D,m} \log(kN), \tag{3.2}$$

où la constante impliquée ne dépend que de D et m.

Démonstration. D'après (2.3), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{f,m}^{D} &= \bigcup_{1 \leqslant \nu \leqslant D} \left\{p : \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \frac{\sin((\nu+j)\theta_f(p))}{\sin(j\theta_f(p))} = 0\right\} \\
&\subset \bigcup_{1 \leqslant \nu \leqslant D} \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} \bigcup_{\substack{1 \leqslant d \leqslant \nu+j-1 \\ d \neq (\nu+j)/2}} \left\{p : \theta_f(p) = \frac{d\pi}{\nu+j}\right\} \\
&= \bigcup_{1 \leqslant \nu \leqslant D} \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} \bigcup_{\substack{1 \leqslant d \leqslant \nu+j-1 \\ d \neq (\nu+j)/2}} \left\{p : \lambda_f(p) = 2\cos\left(\frac{d\pi}{\nu+j}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Puisque $\cos\big(\frac{d\pi}{\nu+j}\big) \neq 0$ pour $1 \leqslant \nu \leqslant D$, $1 \leqslant j \leqslant m$ et $1 \leqslant d \leqslant \nu + j - 1$ tels que $d \neq (\nu + j)/2$, le Lemma 2.4 de [10] implique bien (3.2). ■

Lemme 3.2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $N \geqslant 1$ un entier sans facteur carré, $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $D \in \mathbb{N}^*$. On pose*

$$N_{f,m}^D := \prod_{p \in \mathscr{P}_{f,m}^D \text{ ou } p \mid N} p, \tag{3.3}$$

où $\mathscr{P}_{f,m}^D$ est défini par (3.1). Alors on a

$$\prod_{p \mid N_{f,m}^D} \big(1 - p^{-1}\big) \gg_{D,m} (\log_2(kN))^{-2}. \tag{3.4}$$

où la constante impliquée ne dépend que de D et m.

Démonstration. On désigne par $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers distincts de n et par p_n le n-ème nombre premier. En utilisant le théorème des nombres premiers, on peut déduire que

$$\begin{aligned}\prod_{p \mid N_{f,m}^D} \big(1 - p^{-1}\big) &= \exp\Big(- \sum_{p \mid N_{f,m}^D} p^{-1} + O(1)\Big) \\ &\gg \exp\Big(- \sum_{p \leqslant p_{|\mathscr{P}_{f,m}^D|}} p^{-1} - \sum_{p \leqslant p_{\omega(N)}} p^{-1}\Big) \\ &\gg \exp\big(- \log_2 p_{|\mathscr{P}_{f,m}^D|} - \log_2 p_{\omega(N)}\big).\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que $p_n \sim n \log n$ et $\omega(n) \ll (\log n)/\log_2 n$. Il suit, grâce au Lemme 3.1, que

$$\begin{aligned}\prod_{p \mid N_{f,m}^D} \big(1 - p^{-1}\big) &\gg \exp\big(- \log_2(|\mathscr{P}_{f,m}^D| + 3) - \log_2(\omega(N_{f,m}^D) + 3)\big). \\ &\gg \exp\big(- 2\log_3(kN)\big),\end{aligned}$$

puisque

$$\log N_{f,m}^D \leqslant \sum_{p \leqslant p_{|\mathscr{P}_{f,m}^D|}} \log p + \sum_{p \leqslant p_{\omega(N)}} \log p \ll p_{|\mathscr{P}_{f,m}^D|} + p_{\omega(N)} \ll_{D,m} \log(kN).$$

Cela achève la démonstration. ■

4. Minoration de $\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p)$ sous l'hypothèse de positivité

Pour $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$ et $m = 1, 2, 3, 4$, soit $y = y_{f,m}$ le plus grand entier tel que

$$\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n) \geqslant 0 \text{ pour tout } n \leqslant y \text{ et } (n, N) = 1. \tag{4.1}$$

Le but de cette section est de donner une borne inférieure effective de $\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p)$ pour $p \leqslant y$ (i.e, sous l'hypothèse de positivité). Puisque les cas où $m = 1, 2$ ont été traités dans [9] et [10] respectivement, nous considérons $m = 3, 4$.

Pour $m = 3$, on a le résultat suivant.

Lemme 4.1. *Soient $k \geqslant 2$ pair, $N \geqslant 1$ sans facteur carré et $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$.*

(i) *Pour $d \geqslant 0$, on a*

$$\theta_f(p) \in \begin{cases}]0, \frac{1}{3d+4}\pi[\cup]\frac{2d+1}{3d+2}\pi, \frac{2d+3}{3d+4}\pi[& \textit{si } p \leqslant y^{\frac{1}{3d+1}} \textit{ avec } p \nmid N_{f,3}^D, \\ ]0, \frac{1}{3d+5}\pi[\cup]\frac{2d+3}{3d+5}\pi, \frac{2d+3}{3d+4}\pi[& \textit{si } p \leqslant y^{\frac{1}{3d+2}} \textit{ avec } p \nmid N_{f,3}^D, \\ ]0, \frac{1}{3d+6}\pi[\cup]\frac{2d+3}{3d+5}\pi, \frac{2d+3}{3d+4}\pi[& \textit{si } p \leqslant y^{\frac{1}{3d+3}} \textit{ avec } p \nmid N_{f,3}^D. \end{cases} \tag{4.2}$$

(ii) *Pour $d \geqslant 0$, on a*

$$\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p) \geqslant U_3\big[\cos\big(\tfrac{2d+3}{3d+4}\pi\big)\big] \qquad (p \leqslant y^{\frac{1}{3d+1}},\ p \nmid N_{f,3}^D), \tag{4.3}$$

où $U_3(u)$ est le troisième polynôme de Tchebychev de 2ème espèce.

Démonstration. Pour la simplicité de notation, on écrit $\theta_f(p) = \theta$.

A. *D'abord on montre que (4.2) est vraie pour $d = 0$.*

- Quand $p \leqslant y$ avec $p \nmid N_{f,3}^D$, on a

$$\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p) = \frac{\sin(4\theta)}{\sin\theta} > 0. \tag{4.4}$$

Puisque $\theta \in]0, \pi[$, on a $\sin\theta > 0$. D'après (4.4), on a $\sin(4\theta) > 0$. En tenant compte de $4\theta \in]0, 4\pi[$, on doit avoir $4\theta \in]0, \pi[\cup]2\pi, 3\pi[$. Par conséquent, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{4}\pi[\cup]\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{4}\pi[. \tag{4.5}$$

- Quand $p \leqslant y^{\frac{1}{2}}$ avec $p \nmid N_{f,3}^D$, on a

$$\frac{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p^2)}{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p)} = \frac{\sin(5\theta)}{\sin(2\theta)} > 0. \tag{4.6}$$

Si $\theta \in]0, \frac{1}{4}\pi[$, alors $\sin(2\theta) > 0$. D'après (4.6), on a $\sin(5\theta) > 0$. En tenant compte de $5\theta \in]0, \frac{5}{4}\pi[$, on doit avoir $5\theta \in]0, \pi[$, d'où $\theta \in]0, \frac{1}{5}\pi[$.
Si $\theta \in]\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi[$, alors $\sin(2\theta) < 0$. D'après (4.6), on a $\sin(5\theta) < 0$. En tenant compte de $5\theta \in]\frac{5}{2}\pi, \frac{15}{4}\pi[$, on doit avoir $5\theta \in]3\pi, \frac{15}{4}\pi[$, d'où $\theta \in]\frac{3}{5}\pi, \frac{3}{4}\pi[$.
Par conséquent, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{5}\pi[\cup]\tfrac{3}{5}\pi, \tfrac{3}{4}\pi[. \tag{4.7}$$

- Quand $p \leqslant y^{\frac{1}{3}}$ avec $p \nmid N_{f,3}^D$, on a

$$\frac{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p^3)}{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p^2)} = \frac{\sin(6\theta)}{\sin(3\theta)} > 0. \tag{4.8}$$

Si $\theta \in]0, \frac{1}{5}\pi[\cup]\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi[$, alors $3\theta \in]0, \frac{3}{5}\pi[\cup]2\pi, \frac{9}{4}\pi[$. On a $\sin(3\theta) > 0$. D'après (4.8), on a $\sin(6\theta) > 0$. En tenant compte de $6\theta \in]0, \frac{6}{5}\pi[\cup]4\pi, \frac{9}{2}\pi[$, on doit avoir $6\theta \in]0, \pi[\cup]4\pi, \frac{9}{2}\pi[$, d'où $\theta \in]0, \frac{1}{6}\pi[\cup]\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi[$.
Si $\theta \in]\frac{3}{5}\pi, \frac{2}{3}\pi[$, on a $\sin(3\theta) < 0$ et $\sin(6\theta) < 0$. Donc (4.8) est vérifiée.
Par conséquent, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{6}\pi[\cup]\tfrac{3}{5}\pi, \tfrac{3}{4}\pi[. \tag{4.9}$$

En compte de (4.5), (4.7) et (4.9), on voit que (4.2) est vraie pour $d = 0$.

B. *En supposant que* (4.2) *est vraie pour* d*, on montre qu'elle a lieu pour* $d+1$.

- Quand $p \leqslant y^{\frac{1}{3(d+1)+1}}$ avec $p \nmid N_{f,3}^D$, on a

$$\frac{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p^{3(d+1)+1})}{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p^{3(d+1)})} = \frac{\sin((3d+7)\theta)}{\sin((3d+4)\theta)} > 0. \tag{4.10}$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{3d+6}\pi[\cup]\tfrac{2d+3}{3d+5}\pi, \tfrac{2d+3}{3d+4}\pi[,$$

d'où

$$(3d+4)\theta \in]0, \tfrac{3d+4}{3d+6}\pi[\cup]((2d+3) - \tfrac{2d+3}{3d+5})\pi, (2d+3)\pi[\Rightarrow \sin((3d+4)\theta) > 0.$$

L'inégalité (4.10) implique que $\sin((3d+7)\theta) > 0$. Puisque

$$(3d+7)\theta \in]0, \tfrac{3d+7}{3d+6}\pi[\cup](2d+4+\tfrac{d+1}{3d+5})\pi, (2d+5+\tfrac{1}{3d+4})\pi[,$$

on doit avoir

$$(3d+7)\theta \in]0, \pi[\cup](2d+4+\tfrac{d+1}{3d+5})\pi, (2d+5)\pi[.$$

Par conséquent, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{3d+7}\pi[\cup]\tfrac{2d+3}{3d+5}\pi, \tfrac{2d+5}{3d+7}\pi[=]0, \tfrac{1}{3(d+1)+4}\pi[\cup]\tfrac{2(d+1)+1}{3(d+1)+2}\pi, \tfrac{2(d+1)+3}{3(d+1)+4}\pi[. \tag{4.11}$$

- Quand $p \leqslant y^{\frac{1}{3(d+1)+2}}$ avec $p \nmid N_{f,3}^D$, on a

$$\frac{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p^{3(d+1)+2})}{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p^{3(d+1)+1})} = \frac{\sin((3d+8)\theta)}{\sin((3d+5)\theta)} > 0. \tag{4.12}$$

Si $\theta \in]0, \frac{1}{3d+7}\pi[$, on a $\sin((3d+5)\theta) > 0$. D'après (4.12), on a $\sin((3d+8)\theta) > 0$. En tenant compte de $(3d+8)\theta \in]0, \frac{3d+8}{3d+7}\pi[$, on doit avoir

$$(3d+8)\theta \in]0, \pi[, \qquad \text{i.e.,} \qquad \theta \in]0, \tfrac{1}{3d+8}\pi[.$$

Si $\theta \in]\frac{2d+3}{3d+5}\pi, \frac{2d+5}{3d+7}\pi[$, on a $\sin((3d+5)\theta) < 0$. D'après (4.12), nous obtenons $\sin((3d+8)\theta) < 0$. En compte de $(3d+8)\theta \in](2d+5-\frac{1}{3d+5})\pi, (2d+5+\frac{2d+5}{3d+7})\pi[$, on doit avoir $(3d+8)\theta \in](2d+5)\pi, (2d+5+\frac{2d+5}{3d+7})\pi[$, d'où $\theta \in]\frac{2d+5}{3d+8}\pi, \frac{2d+5}{3d+7}\pi[$.
Par conséquent, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{3d+8}\pi[\cup]\tfrac{2d+5}{3d+8}\pi, \tfrac{2d+5}{3d+7}\pi[=]0, \tfrac{1}{3(d+1)+5}\pi[\cup]\tfrac{2(d+1)+3}{3(d+1)+5}\pi, \tfrac{2(d+1)+3}{3(d+1)+4}\pi[. \tag{4.13}$$

- Quand $p \leqslant y^{\frac{1}{3(d+1)+3}}$ avec $p \nmid N_{f,3}^D$, on a

$$\frac{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p^{3(d+1)+3})}{\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}(p^{3(d+1)+2})} = \frac{\sin((3d+9)\theta)}{\sin((3d+6)\theta)} > 0. \tag{4.14}$$

Si $\theta \in]0, \frac{1}{3d+8}\pi[\cup]\frac{2}{3}\pi, \frac{2d+5}{3d+7}\pi[$, on a $\sin((3d+6)\theta) > 0$. D'après (4.14) on obtient $\sin((3d+9)\theta) > 0$. En compte de $(3d+9)\theta \in]0, \frac{3d+9}{3d+8}\pi[\cup](2d+6)\pi, (2d+6+\frac{d+3}{3d+7})\pi[$, nous devons avoir que $(3d+9)\theta \in]0, \pi[\cup](2d+6)\pi, (2d+6+\frac{d+3}{3d+7})\pi[$, d'où $\theta \in]0, \frac{1}{3d+9}\pi[\cup]\frac{2}{3}\pi, \frac{2d+5}{3d+7}\pi[$.
Si $\theta \in]\frac{2d+5}{3d+8}\pi, \frac{2}{3}\pi[$, alors $\sin((3d+6)\theta) < 0$ et $\sin((3d+9)\theta) < 0$. Donc (4.14) est vérifiée.
Par conséquent, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{3d+9}\pi[\cup]\tfrac{2d+5}{3d+8}\pi, \tfrac{2d+5}{3d+7}\pi[=]0, \tfrac{1}{3(d+1)+6}\pi[\cup]\tfrac{2(d+1)+3}{3(d+1)+5}\pi, \tfrac{2(d+1)+3}{3(d+1)+4}\pi[. \tag{4.15}$$

En combinant (4.11), (4.13) et (4.15), on voit que (4.2) est vraie pour $d+1$.

C. *Enfin, on démontre l'assertion* (ii).

La fonction $u(\theta) = U_3(\cos\theta) = 8\cos^3\theta - 4\cos\theta$ a 3 racines $\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi$ sur $[0, \pi]$. Puisque $u'(\theta) = -24(\cos^2\theta - \frac{1}{6})\sin\theta$, la fonction $u(\theta)$ est décroissante sur $[0, \arccos\big(\frac{\sqrt{6}}{6}\big)]\cup[\pi - \arccos\big(\frac{\sqrt{6}}{6}\big), \pi]$ et croissante sur $[\arccos\big(\frac{\sqrt{6}}{6}\big), \pi - \arccos\big(\frac{\sqrt{6}}{6}\big)]$. En tenant compte de $\frac{1}{3d+4}\pi \leqslant \frac{1}{4}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi \leqslant \frac{2d+1}{3d+2}\pi < \frac{2d+3}{3d+4}\pi \leqslant \frac{3}{4}\pi$ pour tout $d \geqslant 0$ et le fait que

$$\min\big\{u(\tfrac{1}{3d+4}\pi),\, u(\tfrac{2d+1}{3d+2}\pi)\big\} \geqslant u(\tfrac{2d+3}{3d+4}\pi),$$

la valeur minimale de $u(\theta)$ sur $[0, \frac{1}{3d+4}\pi] \cup [\frac{2d+1}{3d+2}\pi, \frac{2d+3}{3d+4}\pi]$ est égale à $u(\frac{2d+3}{3d+4}\pi)$.

Cela achève la démonstration. ■

Pour $m = 4$, on a le résultat suivant.

Lemme 4.2. *Soient $k \geqslant 2$ pair, $N \geqslant 1$ sans facteur carré et $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$.*

(i) *Pour $d \geqslant 0$, on a*

$$\theta_f(p) \in \begin{cases}]0, \frac{1}{2d+5}\pi[\cup]\frac{d+2}{2d+5}\pi, \frac{d+3}{2d+5}\pi[\cup]\frac{2d+4}{2d+5}\pi, \pi[& (p \leqslant y^{\frac{1}{2d+1}},\ p \nmid N_{f,4}^D), \\ ]0, \frac{1}{2d+6}\pi[\cup]\frac{d+2}{2d+5}\pi, \frac{d+3}{2d+5}\pi[\cup]\frac{2d+5}{2d+6}\pi, \pi[& (p \leqslant y^{\frac{1}{2d+2}},\ p \nmid N_{f,4}^D). \end{cases} \tag{4.16}$$

(ii) *Pour $d \geqslant 0$, on a*

$$\lambda_{\mathrm{sym}^4 f}(p) \geqslant U_4\big[\cos\big(\tfrac{d+2}{2d+5}\pi\big)\big] \qquad (p \leqslant y^{\frac{1}{2d+1}},\ p \nmid N_{f,4}^D), \tag{4.17}$$

où $U_4(u)$ est le quatrième polynôme de Tchebychev de 2ème espèce.

Démonstration. Pour la simplicité de notation, on écrit $\theta_f(p) = \theta$.

A. *D'abord on montre que* (4.16) *est vraie pour $d = 0$.*

- Quand $p \leqslant y$ avec $p \nmid N_{f,4}^D$, on a

$$\lambda_{\mathrm{sym}^4 f}(p) = \frac{\sin(5\theta)}{\sin\theta} > 0. \tag{4.18}$$

Puisque $\theta \in]0,\pi[$, on a $\sin\theta > 0$. L'inégalité (4.18) implique $\sin(5\theta) > 0$. En tenant compte de $5\theta \in]0, 5\pi[$, on doit avoir $5\theta \in]0,\pi[\cup]2\pi,3\pi[\cup]4\pi,5\pi[$. Par conséquent, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{5}\pi[\cup]\tfrac{2}{5}\pi, \tfrac{3}{5}\pi[\cup]\tfrac{4}{5}\pi, \pi[. \tag{4.19}$$

- Quand $p \leqslant y^{\frac{1}{2}}$ avec $p \nmid N_{f,4}^D$, on a

$$\frac{\lambda_{\mathrm{sym}^4 f}(p^2)}{\lambda_{\mathrm{sym}^4 f}(p)} = \frac{\sin(6\theta)}{\sin(2\theta)} > 0. \tag{4.20}$$

Si $\theta \in]0, \frac{1}{5}\pi[\cup]\frac{2}{5}\pi, \frac{1}{2}\pi[$, alors $\sin(2\theta) > 0$. D'après (4.20), on a $\sin(6\theta) > 0$. En tenant compte de $6\theta \in]0, \frac{6}{5}\pi[\cup]\frac{12}{5}\pi, 3\pi[$, on doit avoir $6\theta \in]0,\pi[\cup]\frac{12}{5}\pi, 3\pi[$, d'où $\theta \in]0, \frac{1}{6}\pi[\cup]\frac{2}{5}\pi, \frac{1}{2}\pi[$.
Si $\theta \in]\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{5}\pi[\cup]\frac{4}{5}\pi, \pi[$, alors $\sin(2\theta) < 0$. D'après (4.6), on a $\sin(6\theta) < 0$. En tenant compte de $6\theta \in]3\pi, \frac{18}{5}\pi[\cup]\frac{24}{5}\pi, 6\pi[$, on doit avoir $6\theta \in]3\pi, \frac{18}{5}\pi[\cup]5\pi, 6\pi[$, d'où $\theta \in]\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{5}\pi[\cup]\frac{5}{6}\pi, \pi[$.
Par conséquent, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{6}\pi[\cup]\tfrac{2}{5}\pi, \tfrac{3}{5}\pi[\cup]\tfrac{5}{6}\pi, \pi[. \tag{4.21}$$

En compte de (4.19) et (4.21), on voit que (4.16) est vraie pour $d = 0$.

B. *En supposant que* (4.16) *est vraie pour d, on veut montrer qu'elle est aussi vraie pour $d + 1$.*

- Quand $p \leqslant y^{\frac{1}{2(d+1)+1}}$ avec $p \nmid N_{f,4}^D$, on a

$$\frac{\lambda_{\mathrm{sym}^4 f}(p^{2(d+1)+1})}{\lambda_{\mathrm{sym}^4 f}(p^{2(d+1)})} = \frac{\sin((2d+7)\theta)}{\sin((2d+3)\theta)} > 0. \tag{4.22}$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{2d+6}\pi[\cup]\tfrac{d+2}{2d+5}\pi, \tfrac{d+3}{2d+5}\pi[\cup]\tfrac{2d+5}{2d+6}\pi, \pi[.$$

On discute deux possibilités:

(a) Si $\theta \in]0, \frac{1}{2d+6}\pi[\cup]\frac{2d+5}{2d+6}\pi, \pi[$, alors $\sin((2d+3)\theta) > 0$. D'après (4.22), on a $\sin((2d+7)\theta) > 0$. En compte de $(2d+7)\theta \in]0, \frac{2d+7}{2d+6}\pi[\cup](2d+6-\frac{1}{2d+6})\pi, (2d+7)\pi[$, on doit avoir $(2d+7)\theta \in]0,\pi[\cup](2d+6)\pi, (2d+7)\pi[$, d'où

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{2d+7}\pi[\cup]\tfrac{2d+6}{2d+7}\pi, \pi[=]0, \tfrac{1}{2(d+1)+5}\pi[\cup]\tfrac{2(d+1)+4}{2(d+1)+5}\pi, \pi[. \tag{4.23}$$

(b) Si $\theta \in]\frac{d+2}{2d+5}\pi, \frac{d+3}{2d+5}\pi[$, on a $(2d+3)\theta \in](d+1+\frac{1}{2d+5})\pi, (d+2-\frac{1}{2d+5})\pi[$. Cela implique que

$$\sin((2d+3)\theta) \begin{cases} > 0 & (2 \nmid d) \\ < 0 & (2 \mid d) \end{cases} \overset{(4.22)}{\Longrightarrow} \sin((2d+7)\theta) \begin{cases} > 0 & (2 \nmid d), \\ < 0 & (2 \mid d). \end{cases}$$

En tenant compte de $(2d+7)\theta \in](d+3-\frac{1}{2d+5})\pi, (d+4+\frac{1}{2d+5})\pi[$, nous devons avoir $(2d+7)\theta \in](d+3)\pi, (d+4)\pi[$, d'où

$$\theta \in]\tfrac{d+3}{2d+7}\pi, \tfrac{d+4}{2d+7}\pi[=]\tfrac{(d+1)+2}{2(d+1)+5}\pi, \tfrac{(d+1)+3}{2(d+1)+5}\pi[. \tag{4.24}$$

Par conséquent, on a, grâce à (4.23) et (4.24), que

$$\theta \in]0, \tfrac{1}{2(d+1)+5}\pi[\cup]\tfrac{(d+1)+2}{2(d+1)+5}\pi, \tfrac{(d+1)+3}{2(d+1)+5}\pi[\cup]\tfrac{2(d+1)+4}{2(d+1)+5}\pi, \pi[. \tag{4.25}$$

- Quand $p \leqslant y^{\frac{1}{2(d+1)+2}}$ avec $p \nmid N_{f,4}^D$, on a

$$\frac{\lambda_{\mathrm{sym}^4 f}(p^{2(d+1)+2})}{\lambda_{\mathrm{sym}^4 f}(p^{2(d+1)+1})} = \frac{\sin([2d+8]\theta)}{\sin((2d+4)\theta)} > 0. \tag{4.26}$$

On discute deux possibilités:

(a) Si

$$\theta \in \begin{cases}]0, \frac{1}{2d+7}\pi[\cup]\frac{1}{2}\pi, \frac{d+4}{2d+7}\pi[& (2 \mid d), \\ ]0, \frac{1}{2d+7}\pi[\cup]\frac{d+3}{2d+7}\pi, \frac{1}{2}\pi[& (2 \nmid d), \end{cases}$$

alors

$$(2d+4)\theta \in \begin{cases}]0, \frac{2d+4}{2d+7}\pi[\cup](d+2)\pi, (d+3-\frac{d+5}{2d+7})\pi[& (2 \mid d), \\ ]0, \frac{2d+4}{2d+7}\pi[\cup](d+1+\frac{d+5}{2d+7})\pi, (d+2)\pi[& (2 \nmid d). \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $\sin((2d+4)\theta) > 0$. D'après (4.26), on a $\sin((2d+8)\theta) > 0$. En tenant compte de

$$(2d+8)\theta \in \begin{cases}]0, \frac{2d+8}{2d+7}\pi[\cup](d+4)\pi, (d+4+\frac{d+4}{2d+7})\pi[& (2 \mid d), \\ ]0, \frac{2d+8}{2d+7}\pi[\cup](d+3+\frac{d+3}{2d+7})\pi, (d+4)\pi[& (2 \nmid d), \end{cases}$$

on doit avoir

$$(2d+8)\theta \in \begin{cases}]0, \pi[\cup](d+4)\pi, (d+4+\frac{d+4}{2d+7})\pi[& (2 \mid d), \\ ]0, \pi[\cup](d+3+\frac{d+3}{2d+7})\pi, (d+4)\pi[& (2 \nmid d), \end{cases}$$

d'où

$$\theta \in \begin{cases}]0, \frac{1}{2d+8}\pi[\cup]\frac{d+4}{2d+8}\pi, \frac{d+4}{2d+7}\pi[& (2 \mid d), \\ ]0, \frac{1}{2d+8}\pi[\cup]\frac{d+3}{2d+7}\pi, \frac{d+4}{2d+8}\pi[& (2 \nmid d). \end{cases} \tag{4.27}$$

(b) Si

$$\theta \in \begin{cases}]\frac{d+3}{2d+7}\pi, \frac{1}{2}\pi[\cup]\frac{2d+6}{2d+7}\pi, \pi[& (2 \mid d), \\ ]\frac{1}{2}\pi, \frac{d+4}{2d+7}\pi[\cup]\frac{2d+6}{2d+7}\pi, \pi[& (2 \nmid d), \end{cases}$$

alors

$$(2d+4)\theta \in \begin{cases}](d+1+\frac{d+5}{2d+7})\pi, (d+2)\pi[& \\ \qquad \cup](2d+3+\frac{3}{2d+7})\pi, (2d+4)\pi[& (2 \mid d), \\ ](d+2)\pi, (d+3-\frac{d+5}{2d+7})\pi[& \\ \qquad \cup](2d+3+\frac{3}{2d+7})\pi, (2d+4)\pi[& (2 \nmid d). \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $\sin((2d+4)\theta) < 0$. D'après (4.26), on a $\sin((2d+8)\theta) < 0$. En tenant compte de

$$(2d+8)\theta \in \begin{cases}](d+3+\frac{d+3}{2d+7})\pi, (d+4)\pi[& \\ \qquad \cup](2d+7-\frac{1}{2d+7})\pi, (2d+8)\pi[& (2 \mid d), \\ ](d+4)\pi, (d+4+\frac{d+4}{2d+7})\pi[& \\ \qquad \cup](2d+7-\frac{1}{2d+7})\pi, (2d+8)\pi[& (2 \nmid d), \end{cases}$$

on doit avoir

$$(2d+8)\theta \in \begin{cases}](d+3+\frac{d+3}{2d+7})\pi, (d+4)\pi[& \\ \qquad \cup](2d+7)\pi, (2d+8)\pi[& (2 \mid d), \\ ](d+4)\pi, (d+4+\frac{d+4}{2d+7})\pi[& \\ \qquad \cup](2d+7)\pi, (2d+8)\pi[& (2 \nmid d), \end{cases}$$

d'où

$$\theta \in \begin{cases}]\frac{d+3}{2d+7}\pi, \frac{d+4}{2d+8}\pi[\cup]\frac{2d+7}{2d+8}\pi, \pi[& (2 \mid d), \\ ]\frac{d+4}{2d+8}\pi, \frac{d+4}{2d+7}\pi[\cup]\frac{2d+7}{2d+8}\pi, \pi[& (2 \nmid d). \end{cases} \tag{4.28}$$

Par conséquent, on obtient, grâce à (4.27) et (4.28),

$$\begin{aligned} \theta &\in]0, \tfrac{1}{2d+8}\pi[\cup]\tfrac{d+3}{2d+7}\pi, \tfrac{d+4}{2d+7}\pi[\cup]\tfrac{2d+7}{2d+8}\pi, \pi[\\ &=]0, \tfrac{1}{2(d+1)+6}\pi[\cup]\tfrac{(d+1)+2}{2(d+1)+5}\pi, \tfrac{(d+1)+3}{2(d+1)+5}\pi[\cup]\tfrac{2d+7}{2d+8}\pi, \pi[. \end{aligned} \tag{4.29}$$

En combinant (4.25) et (4.29), on voit que (4.16) est vraie pour $d+1$.

C. *Enfin, on va démontrer l'assertion* (ii).

La fonction $u(\theta) = U_4(\cos\theta) = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$ a 4 racines $\frac{1}{5}\pi$, $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$ sur $[0, \pi]$. Puisque $u'(\theta) = -32(\cos^2\theta - \frac{3}{8})\sin(2\theta)$, la fonction $u(\theta)$ est décroissante sur $[0, \arccos(\sqrt{3/8})] \cup [\frac{1}{2}\pi, \pi - \arccos(\sqrt{3/8})]$, et croissante sur $[\arccos(\sqrt{3/8}), \frac{1}{2}\pi] \cup [\pi - \arccos(\sqrt{3/8}), \pi]$. En tenant compte de

$$\tfrac{1}{2d+5}\pi \leqslant \tfrac{1}{5}\pi, \qquad \tfrac{2}{5}\pi \leqslant \tfrac{d+2}{2d+5} < \tfrac{d+3}{2d+5}\pi \leqslant \tfrac{3}{5}\pi, \qquad \tfrac{4}{5}\pi < \tfrac{2d+4}{2d+5}\pi \leqslant \pi$$

et le fait que

$$\min\left\{u(\tfrac{1}{2d+5}\pi),\, u(\tfrac{d+3}{2d+5}\pi),\, u(\tfrac{2d+4}{2d+5}\pi)\right\} \geqslant u(\tfrac{d+2}{2d+5}\pi),$$

la valeur minimale de $u(\theta)$ sur $[0, \frac{1}{2d+5}\pi] \cup [\frac{d+2}{2d+5}\pi, \frac{d+3}{2d+5}\pi] \cup [\frac{2d+4}{2d+5}\pi, \pi]$ est égale à $u(\frac{d+2}{2d+5}\pi)$.

Cela achève la démonstration. ∎

5. Fonction h et sa moyenne

Fixons un entier $D > 1$, et définissons

$$u_{m,d} := \begin{cases} \frac{1}{m(D-d+1)+1} & \text{si } m \text{ est impair} \\ \frac{1}{(m/2)(D-d+1)+1} & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases} \qquad (d = 1, 2, \ldots, D)$$

et

$$\kappa_{m,d} := \begin{cases} U_m\left[\cos\left(\frac{(m-1)(D-d)+m}{m(D-d)+m+1}\pi\right)\right] & \text{si } m \text{ est impair} \\ U_m\left[\cos\left(\frac{(m/2-1)(D-d)+m-2}{(m/2)(D-d)+m+1}\pi\right)\right] & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases} \qquad (d = 0, 1, \ldots, D).$$

En tenant compte de (4.3) et (4.17), nous pouvons introduire une fonction multiplicative $h = h_{m,y}$ comme dans [9, 12]. Pour tout nombre premier $p \nmid N_{f,m}^D$ et tout entier $\nu \geqslant 1$, on définit

$$h(p^\nu) := \begin{cases} \kappa_m\left(\frac{\log p}{\log y}\right) & \text{si } \nu = 1 \\ 0 & \text{si } \nu \geqslant 2 \end{cases} \tag{5.1}$$

avec

$$\kappa_m(t) := \begin{cases} -(m+1) & \text{si } t \geqslant 1 \\ U_m\left[\cos\left(\frac{(m-1)d+m}{md+m+1}\pi\right)\right] & \text{si } \frac{1}{m(d+1)+1} \leqslant t < \frac{1}{md+1} \quad (0 \leqslant d < D) \\ U_m\left[\cos\left(\frac{(m-1)D+m}{mD+m+1}\pi\right)\right] & \text{si } t < \frac{1}{mD+1} \end{cases}$$

si m est impair; et

$$\kappa_m(t) := \begin{cases} -\mathrm{sym}_-^m & \text{si } t \geqslant 1 \\ U_m\left[\cos\left(\frac{(m/2-1)d+m-2}{(m/2)d+m+1}\pi\right)\right] & \text{si } \frac{1}{(m/2)(d+1)+1} \leqslant t < \frac{1}{(m/2)d+1} \\ & \quad (0 \leqslant d < D) \\ U_m\left[\cos\left(\frac{(m/2-1)D+m-2}{(m/2)D+m+1}\pi\right)\right] & \text{si } t < \frac{1}{(m/2)D+1} \end{cases}$$

si m est pair avec

$$\mathrm{sym}_-^m := \max_{\theta\in[0,\pi]} (-U_m(\cos\theta)) > 0.$$

En particulier, on a $\mathrm{sym}_-^4 = \frac{5}{4}$.

Soit $\sigma_m(u)$ la fonction définie comme l'unique solution de l'équation intégrale

$$\begin{cases} u\sigma_m(u) = \displaystyle\int_0^u \sigma_m(t)\kappa_m(u-t)\mathrm{d}t & (u > u_{m,1}), \\ \sigma_m(u) = u^{\kappa_{m,0}-1} & (0 < u \leqslant u_{m,1}). \end{cases} \tag{5.2}$$

Par le Lemme 8 de [12], elle est aussi l'unique solution continue d'une équation différentielle (avec la même condition initiale) de la forme

$$\big(u^{1-\kappa_{m,0}}\sigma_m(u)\big)' = u^{-\kappa_{m,0}}\sum_{d=1}^{D'}(\kappa_{m,d}-\kappa_{m,d-1})\sigma_m(u-u_{m,d})$$

pour $u > u_{m,1}$ et $u \neq u_{m,2}, \dots, u_{m,D}$, où $D' = D'_{D,m,u}\ (\leqslant D)$ est l'entier tel que $u_{m,D'} < u$ et $u_{m,D'+1} > u$.

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 5.1. *Soient $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, $m = 3, 4$ et $U \geqslant 1$ un réel positif. Alors on a*

(i) *Alors, on a*

$$\sum_{\substack{n \leqslant y^u \\ (n, N_{f,m}^D)=1}} h_{m,y}(n) = \frac{\sigma_m(u) + o_U(1)}{\Gamma(\kappa_{m,0})}\Pi_{N_{f,m}^D,\kappa_{m,0}}\, y^u\,(\log y^u)^{\kappa_{m,0}-1} \tag{5.3}$$

uniformément pour $y \geqslant Q_{\mathrm{sym}^m f}^{1/100}$ et $U^{-1} \leqslant u \leqslant U$, où

$$\begin{aligned}\Pi_{N_{f,m}^D,\kappa_{m,0}} &:= \left(\frac{\varphi(N_{f,m}^D)}{N_{f,m}^D}\right)^{\kappa_{m,0}} \prod_{p \mid N_{f,m}^D}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa_{m,0}}\left(1+\frac{\kappa_{m,0}}{p}\right) \\ &\gg_{D,m} (\log_2(kN))^{-2\kappa_{m,0}}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

(ii) *Soit $\mathfrak{u}_m$ la solution de l'équation $\sigma_m(u) = 0$. Alors on a*

$$\mathfrak{u}_3 > 2{,}59037, \qquad \mathfrak{u}_4 > 3{,}60373 \tag{5.5}$$

et

$$\sigma_m(u) > 0 \qquad (u < \mathfrak{u}_m). \tag{5.6}$$

Démonstration. La formule asymptotique (5.3) dans la première assertion est essentiellement le Lemme 6 de [12]. La minoration (5.4) est une conséquence de (3.4).

Les calculs numériques dans la deuxième assertion peuvent être réalisés à l'aide du logiciel Mathematica version 10. ■

6. Preuve du Théorème 1.1

Pour $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 1$, on définit

$$S_{\mathrm{sym}^m f}(x) := \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n, N_{f,m}^D)=1}} \lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n)\mu(n)^2 \log^m\Big(\frac{x}{n}\Big),$$

où $\mu(n)$ est la fonction de Möbius.

Le résultat voulu provient de la majoration et de la minoration de $S_{\mathrm{sym}^m f}(y^u)$ pour $u < \mathfrak{u}_m$. On commence par minorer la somme en question.

6.1. Minoration de $S_{\mathrm{sym}^m f}(y^u)$

Lemme 6.1. *Soient $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$, $m = 3, 4$ et $\mathfrak{u}_m$ donné comme dans* (5.5)*. Alors pour $u < \mathfrak{u}_m$, on a*

$$S_{\mathrm{sym}^m f}(y^u) \gg_{D,m,u} y^u (\log y^u)^{\kappa_{m,0}-1}(\log_2(kN))^{-2\kappa_{m,0}}$$

uniformément pour $y \geqslant Q_{\mathrm{sym}^m f}^{1/100}$, où la constante impliquée ne dépend que de D, m et u.

Démonstration. Soit $h(n) = h_{m,y}(n)$ la fonction multiplicative définie comme dans (5.1). On introduit également une fonction multiplicative $g = g_{m,y}$ définie par la convolution

$$\lambda_{\mathrm{sym}^m f} = g * h.$$

Par la définition de h, (4.3) et (4.17), on a

$$g(p) = \lambda_{\mathrm{sym}^m f}(p) - h(p) \geqslant 0$$

pour tout nombre premier $p \nmid N_{f,m}^D$. De plus, par multiplicativité, on a $g(n) \geqslant 0$ pour tout entier sans facteur carré n tel que $(n, N_{f,m}^D) = 1$. D'autre part, grâce au Lemme 5.1, on a

$$\sum_{\substack{\ell \leqslant y^u/d \\ (\ell, N_{f,m}^D)=1}} h(\ell)\mu(\ell)^2 \log^m\Big(\frac{y^u}{d\ell}\Big) \geqslant 0$$

pour $u < \mathfrak{u}_m$) et $d \geqslant 1$. D'où l'on peut déduire que pour $u < \mathfrak{u}_m$ on a

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{sym}^m f}(y^u) &= \sum_{\substack{n \leqslant y^u \\ (n, N_{f,m}^D)=1}} (g*h)(n)\mu(n)^2 \log^m\left(\frac{y^u}{n}\right) \quad (n = \ell d) \\ &= \sum_{\substack{d \leqslant y^u \\ (d, N_{f,m}^D)=1}} g(d)\mu(d)^2 \sum_{\substack{\ell \leqslant y^u/d \\ (\ell, N_{f,m}^D)=1}} h(\ell)\mu(\ell)^2 \log^m\left(\frac{y^u}{d\ell}\right) \\ &\geqslant \sum_{\substack{\ell \leqslant y^u \\ (\ell, N_{f,m}^D)=1}} h(\ell)\mu(\ell)^2 \log^m\left(\frac{y^u}{\ell}\right), \end{aligned} \tag{6.1}$$

puisque $g(1) = 1$.

Maintenant la minoration souhaitée découle immédiatement de (6.1), (5.4) et (5.3) du Lemme 5.1. ■

6.2. Majoration de $S_{\mathrm{sym}^m f}(x)$

Lemme 6.2. *Soient $f \in \mathcal{H}_k^*(N)$ et $m = 1, 2, 3, 4$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$S_{\mathrm{sym}^m f}(x) \ll_\varepsilon Q_{\mathrm{sym}^m f}^{1/4+\varepsilon} x^{1/2+\varepsilon} \tag{6.2}$$

uniformément pour $x \geqslant 3$, où la constante impliquée ne dépend que de ε.

Démonstration. Si $\Re e\, s > 1$, alors

$$\sum_{n \geqslant 1}^{\flat} \frac{\lambda_{\mathrm{sym}^m f}(n)}{n^s} = \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{\lambda_f(p^m)}{p^s}\right)$$

puisque la fonction $\lambda_{\mathrm{sym}^3 f}$ est multiplicative sur les entiers sans facteur carré premiers avec N. Le membre de droite de cette égalité est égal à $L(s, \mathrm{sym}^m f) G_{f,m}(s)$. D'après l'inégalité (1.5) appliquée pour $m = 3, 4$, la fonction $G_{f,m}(s)$ est une série de Dirichlet qui converge uniformément et absolument dans le demi-plan $\Re e\, s \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Par application de la formule de Perron, on a

$$S_{\mathrm{sym}^m f}(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{1+\varepsilon-\mathrm{i}\infty}^{1+\varepsilon+\mathrm{i}\infty} L(s, \mathrm{sym}^m f) G_{f,m}(s) \frac{x^s}{s^{m+1}} \mathrm{d}s.$$

En transformant l'intégration sur le segment $\Re e\, s = 1 + \varepsilon$ au segment $\Re e\, s = \frac{1}{2} + \varepsilon$, il suit que

$$S_{\mathrm{sym}^m f}(x) \ll_\varepsilon x^{1/2+\varepsilon} (N^m k^{m+\delta_{2\nmid m}})^{1/4+\varepsilon},$$

où l'on a déjà utilisé (1.7) à déduire

$$\begin{aligned}\int_{1/2+\varepsilon-\mathrm{i}\infty}^{1/2+\varepsilon+\mathrm{i}\infty} & L(s,\mathrm{sym}^m f)G_{f,m}(s)\frac{x^s}{s^m}\mathrm{d}s \\ & \ll_\varepsilon x^{1/2+\varepsilon}(N^m k^{m+\delta_{2\nmid m}})^{1/4+\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{(|\tau|+1)^{3(m+1)/4-\varepsilon}} \\ & \ll_\varepsilon x^{1/2+\varepsilon}(N^m k^{m+\delta_{2\nmid m}})^{1/4+\varepsilon} \qquad (m=1,2,3,4),\end{aligned}$$

et les constantes impliquées ne dépendent que de ε. ■

6.3. Fin de la démonstration du Théorème 1.1

Fixons D un entier suffisamment grand. En combinant les Lemmes 6.1 et 6.2, on trouve que

$$y^u(\log y^u)^{\kappa_{m,0}-1}(\log_2(kN))^{-2\kappa_{m,0}} \ll_{D,m,u} S_{\mathrm{sym}^m f}(y^u) \ll_\varepsilon Q_{\mathrm{sym}^m f}^{1/4+\varepsilon}(y^u)^{1/2+\varepsilon}$$

pour $m=3,4$, $y \geqslant Q_{\mathrm{sym}^m f}^{1/100+\varepsilon}$ et $1 \leqslant u < \mathfrak{u}_m$. D'où

$$y \ll_{D,m,u,\varepsilon} Q_{\mathrm{sym}^m f}^{1/(2u)+\varepsilon}$$

pour $m=3,4$, $y \geqslant Q_{\mathrm{sym}^m f}^{1/100+\varepsilon}$ et $1 \leqslant u < \mathfrak{u}_m$. Cela implique le Théorème 1.1 en tenant compte de (5.5).

Remerciements. Les auteurs adressent leur reconnaissance au Professeur E. Royer pour son aide pendant la préparation de cet article.

Références

[1] D.R. Heath-Brown, *Convexity bounds for L-functions*, Acta Arith. **136** (2009), no. 4, 391–395.
[2] J. Cogdell and P. Michel, *On the complex moments of symmetric power L-functions at* $s=1$, Int. Math. Res. Not. **31** (2004), 1562–1618.
[3] P. Deligne, *La conjecture de Weil, I*, Publ. Math. IHES **48** (1974), 273–308.
[4] P. Deligne, *La conjecture de Weil, II*, Publ. Math. IHES **52** (1981), 313–428.
[5] G. Gelbart, *Notes on Langlands pictures of Automorphic forms and L−functions. Lecture X: Langlands program*, (Mars 2009).
[6] S. Gelbart and H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3), Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978), no. 4, 471–542.
[7] H.H. Kim and F. Shahidi, *Cuspidality of symmetric powers with applications*, Duke Math. J. **112** (2002), no. 1, 177–197.

[8] W. Kohnen, J. Sengupta and H. Iwaniec, *The first negative Hecke eigenvalue*, Int. J. Number Theory **3** (2007), 355–363.

[9] E. Kowalski, Y.-K. Lau, K. Soundararajan and J. Wu, *On modular signs*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **149** (2010), 389–411.

[10] Y.-K. Lau, J.-Y. Liu and J. Wu, *The first negative coefficient of symmetric square L-functions*, Ramanujan J. **27** (2012), 419–441.

[11] J.-Y. Liu, Y. Qu and J. Wu, *Two Linnik-type problems for automorphic L-functions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **151** (2011), 219–227.

[12] K. Matomäki, *On signs of Fourier coefficients of cusp forms*, Math. Proc. Cambridge. Philos. Soc. **152** (2012), 207–222.

[13] Y. Qu, *Linnik-type problems for automorphic L-functions*, J. Number Theory **130** (2010), no. 3, 786–802.

[14] E. Royer and J. Wu, *Special values of symmetric power L-functions and Hecke eigenvalues*, Journal de théorie des nombres de bordeaux **19** (2007), 703–753.

Addresses: Kamel Mazhouda and Khadija Mbarki: Faculté des sciences de Monastir, Département de Mathématiques, Monastir 5000, Tunisie;
Jie Wu: Institut Elie Cartan de Lorraine, CNRS, Université de Lorraine, INRIA, Boulevard des Aiguillettes, B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France.

E-mail: kamel.mazhouda@fsm.rnu.tn, mbarkikhadija@yahoo.fr, jie.wu@univ-lorraine.fr

Received: 19 July 2015; **revised:** 2 June 2016