Functiones et Approximatio
XXXIX.2 (2008), 315–334

QUELQUES INÉGALITÉS EFFECTIVES ENTRE DES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES USUELLES

Jean-Louis Nicolas

A Władysław Narkiewicz pour son
soixante-dixième anniversaire,
en très amical hommage.

Abstract: Let us denote by $\tau(n)$ and $\sigma(n)$ the number and the sum of the divisors of n and by φ Euler's function. We give effective upper bounds for $\frac{n}{\varphi(n)}$ in terms of $\varphi(n)$, and for $\frac{\sigma(n)}{n}$ in terms of $\tau(n)$.
Keywords: Euler's function, sum of divisors function, champion numbers, highly composite numbers.

1. Introduction

Soit n un entier positif. Nous utilisons les fonctions arithmétiques classiques:

$$\tau(n)=\sum_{d\,|\,n}1,\quad \sigma(n)=\sum_{d\,|\,n}d,\quad \omega(n)=\sum_{\substack{p\,|\,n\\ p\ \text{premier}}}1,\quad \pi(x)=\sum_{\substack{p\,\le\,x\\ p\ \text{premier}}}1$$

tandis que φ désigne la fonction d'Euler. On note p_k le k-ième nombre premier et $\gamma\approx 0.57721566$ la constante d'Euler.

Dans cet article, nous nous intéressons aux grandes valeurs des fonctions $\frac{\sigma(n)}{n}$ et $\frac{n}{\varphi(n)}$. L'ordre maximum de ces deux fonctions est $e^\gamma\log\log n$ (cf. [4, Th. 323 et Th. 328]).

De façon plus précise, Rosser et Schoenfeld ont montré dans [12]

$$\frac{\sigma(n)}{n}\le\frac{n}{\varphi(n)}\le e^\gamma\log\log n+\frac{2.50637}{\log\log n},\quad n\ge 3 \tag{1.1}$$

tandis qu'il est prouvé dans [7] qu'il existe une infinité de nombres n pour lesquels $\frac{n}{\varphi(n)}>e^\gamma\log\log n$. Notons que $e^\gamma\approx 1.7810724$.

Mathematics Subject Classification: 11N56.
Recherche financée par le CNRS, Institut Camille Jordan, UMR 5208.

Le comportement de $\frac{\sigma(n)}{n}$ est différent: dans [11], il est démontré que l'hypothèse de Riemann est équivalente à

$$\forall n \geq 5041, \qquad \frac{\sigma(n)}{n} \leq e^{\gamma} \log\log n.$$

Nous prouverons

Théorème 1.1. *Pour $n \geq 3$, on a*

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq e^{\gamma} \log\log \varphi(n) + 3.65278\ldots \tag{1.2}$$

avec égalité pour $n = 6$; pour $n \geq 211$, on a

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq 3 \log\log \varphi(n) \tag{1.3}$$

et pour $n \geq 7$, on a

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq e^{\gamma} \log\log \varphi(n) + \frac{2.95503\ldots}{\log\log \varphi(n)} \tag{1.4}$$

avec égalité pour $n = 30030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$.

L'inégalité (1.2) répond à une question posée par A. Schinzel dans [13].

Dans l'article [14, formule (17)], G. Tenenbaum démontre la relation

$$\frac{\sigma(n)}{n} \ll \log\log(2\tau(n)). \tag{1.5}$$

Le théorème suivant donne une forme effective à cette inégalité.

Théorème 1.2. *On a pour tout $n \geq 2$*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq 2.59790\ldots \log\log\left(3\tau(n)\right) \tag{1.6}$$

avec égalité pour $n = M_1 \stackrel{def}{=\!=} 2^8 3^5 5^3 7^2 11^2 13^2 \prod_{17 \leq p \leq 113} p$, et

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq e^{\gamma} \log\log\left(e\tau(n)\right) + e^{\gamma} \log\log\log\left(e^e \tau(n)\right) + 0.941444079\ldots \tag{1.7}$$

avec égalité pour

$$n = M_2 \stackrel{def}{=\!=} 2^{18} 3^{11} 5^7 7^6 \prod_{11 \leq p \leq 19} p^4 \prod_{23 \leq p \leq 47} p^3 \prod_{53 \leq p \leq 277} p^2 \prod_{281 \leq p \leq 45439} p.$$

Les coefficients 3 dans (1.6) et e et e^e dans (1.7) pourraient être modifiés. Ces quantités ont été choisies assez grandes de façon que les valeurs prises par la fonction log log pour les petites valeurs de la variable ne soient pas prépondérantes.

La démonstration des formules des théorèmes 1.1 et 1.2 se fait de la façon suivante: on commence par les prouver pour n ou $\tau(n)$ suffisamment grand. Il reste alors un nombre fini de valeurs de n ou $\tau(n)$ à examiner. Mais ce nombre de valeurs est très grand, ce qui interdit une étude systématique par ordinateur. On construit alors une sous-famille beaucoup plus petite de nombres pour lesquels il suffira de faire les calculs.

Pour le théorème 1.1, cette sous-famille est constituée par les nombres $N_k = \prod_{1\le i\le k} p_i$. Pour le théorème 1.2, ce sont les nombres (σ,τ)–superchampions définis au paragraphe 3 et qui ressemblent aux nombres hautement composés supérieurs introduits par Ramanujan (cf. [8, 9]).

Dans l'article [12], Rosser et Schoenfeld démontrent un peu plus que la formule (1.1). En fait, ils montrent que cette formule dans laquelle la constante 2.50637 est remplacée par 5/2 est vérifiée pour tout nombre $n \ge 3$ à l'exception de $n = 223092870 = 2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19\times23$. On peut obtenir un résultat similaire pour les majorations des théorèmes 1.1 et 1.2. Nous le ferons explicitement pour (1.6).

Théorème 1.3. *L'inégalité*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \le \frac{2597}{1000}\log\log\left(3\tau(n)\right) \tag{1.8}$$

est vérifiée pour tout $n \ge 2$ à l'exception de 12 nombres.

La démonstration du théorème 1.3 sera donnée au paragraphe 5. Elle utilise la notion de bénéfice qui précise le comportement d'un nombre ordinaire par rapport à un nombre (σ,τ)–superchampion.

2. Démonstration du théorème 1.1

Nous notons $N_k = 2\times 3\times\ldots\times p_k$ le produit des k premiers nombres premiers. Démontrons d'abord trois lemmes.

2.1. Trois lemmes

Lemme 2.1. *Soit $k \ge 1$ et un entier n vérifiant $N_k < n < N_{k+1}$. Alors on a*

$$\frac{n}{\varphi(n)} < \frac{N_k}{\varphi(N_k)} = \prod_{2\,\le\, p\,\le\, p_k} \frac{p}{p-1}. \tag{2.1}$$

Soit $\ell \ge 1$ et $n > N_\ell$; on a

$$\varphi(n) > \varphi(N_\ell) = \prod_{2\,\le\, p\,\le\, p_\ell} (p-1). \tag{2.2}$$

Démonstration. Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_j^{\alpha_j}$ la décomposition en facteurs premiers de n. Puisque $n < N_{k+1}$, le nombre $j = \omega(n)$ vérifie $j \le k$ et l'on a

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \prod_{i=1}^{j} \frac{1}{1 - 1/q_i} \le \prod_{i=1}^{j} \frac{1}{1 - 1/p_i} = \frac{N_j}{\varphi(N_j)} \le \frac{N_k}{\varphi(N_k)}. \tag{2.3}$$

De plus, la première inégalité de (2.3) est stricte car $n \ne N_k$ et l'on ne peut avoir $j = k$ et $q_i = p_i$ pour $1 \le i \le k$. Ceci démontre la relation (2.1).

Prouvons maintenant (2.2). Puisque $n > N_\ell$, il existe $k \ge \ell$ tel que $N_k \le n < N_{k+1}$.

Si $k = \ell$, on a $N_\ell = N_k < n < N_{k+1}$ et (2.1) entraîne $\frac{n}{\varphi(n)} < \frac{N_\ell}{\varphi(N_\ell)}$, soit $\varphi(n) > \frac{n}{N_\ell}\varphi(N_\ell) > \varphi(N_\ell)$.

Si $k > \ell$, (2.1) entraîne $\frac{n}{\varphi(n)} \le \frac{N_k}{\varphi(N_k)}$, et l'on a $\varphi(n) \ge \frac{n}{N_k}\varphi(N_k) \ge \varphi(N_k) > \varphi(N_\ell)$. ∎

Remarque. Les nombres M tels que $m > M \implies \varphi(m) > \varphi(M)$ ont été appelés “sparsely totient” et étudiés par Masser et Shiu (cf. [5]). La formule (2.2) montre que les nombres N_ℓ sont “sparsely totient”.

Lemme 2.2. *Soit $k \ge 1$ et $f : [\varphi(N_k), +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante vérifiant*

$$\frac{N_k}{\varphi(N_k)} \le f(\varphi(N_k)).$$

Soit n vérifiant $N_k < n < N_{k+1}$, on a

$$\frac{n}{\varphi(n)} < f(\varphi(n)).$$

Démonstration. Par le lemme 2.1 et nos hypothèses, on a $\varphi(n) > \varphi(N_k)$ et

$$\frac{n}{\varphi(n)} < \frac{N_k}{\varphi(N_k)} \le f(\varphi(N_k)) < f(\varphi(n)) \ .$$ ∎

Lemme 2.3. *Pour $n \ge 7$, on a $\varphi(n) \ge \sqrt{n}$.*

Démonstration. Utilisons la minoration très simple (cf. [10, p. 319]) :

$$\varphi(n) \ge \frac{n \log 2}{\log(2n)}.$$

Il est facile de voir que pour t réel, $t \ge 40$, on a $\frac{t \log 2}{\log(2t)} \ge \sqrt{t}$, puis on vérifie le lemme pour $7 \le n \le 39$. ∎

2.2. Les grandes valeurs de n : $\mathbf{n \geq N_{14}}$

Posons $b = 2.51$ et $g(t) = e^\gamma \log\log t + \frac{b}{\log\log t}$. La fonction g est croissante pour $t \geq 27 > \exp(\exp(\sqrt{be^{-\gamma}}))$.

Soit $n \geq N_6 = 30030$. Le lemme 2.1 entraîne $\varphi(n) \geq \varphi(N_6) = 5760$ tandis que, par le lemme 2.3, on a

$$\log\log n \leq \log\log\varphi(n) + \log 2.$$

Par (1.1) et la croissance de g, il suit

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\varphi(n)} \leq g(n) &\leq e^\gamma\left(\log\log\varphi(n) + \log 2\right) + \frac{b}{\log\log\varphi(n) + \log 2} \\
&\leq e^\gamma \log\log\varphi(n) + e^\gamma \log 2 + \frac{b}{\log\log 5760 + \log 2} \\
&\leq e^\gamma \log\log\varphi(n) + 2.12\ . \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

On déduit de l'inégalité (2.4)

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq \log\log\varphi(n)\left[e^\gamma + \frac{2.12}{\log\log\varphi(n)}\right] \leq \log\log\varphi(n)\left[e^\gamma + \frac{2.12}{\log\log 5760}\right]$$

ce qui montre, pour $n \geq 30030$,

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq 3\log\log\varphi(n). \qquad (2.5)$$

Pour $n \geq 30030$, il vient alors en posant

$$\begin{aligned}
u = \log\log\varphi(n) &\geq \log\log 5760 > 2.15, \\
\log n \leq \log\varphi(n) &\left(1 + \frac{\log\log\log\varphi(n) + \log 3}{\log\varphi(n)}\right) \\
\log\log n \leq \log\log\varphi(n) &+ \frac{\log\log\log\varphi(n) + \log 3}{\log\varphi(n)} = u + \frac{h(u)}{u}
\end{aligned}$$

avec

$$h(u) = u(\log u + \log 3)e^{-u}.$$

Par la croissance de la fonction g et (1.1), la majoration ci-dessus implique

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq e^\gamma\left(u + \frac{h(u)}{u}\right) + \frac{b}{u + h(u)/u} \leq e^\gamma u + \frac{b + e^\gamma h(u)}{u}\cdot \qquad (2.6)$$

Or la fonction $u \mapsto h(u)$ est décroissante pour $u > 1.64$, et l'on a $e^\gamma h(u) < 0.43$ pour $u \geq 3.55$.

Pour $n \geq N_{14} = \prod_{p\leq 43} p$, on a par le lemme 2.1, $\varphi(n) \geq \varphi(N_{14}) = 1.85\ldots\ 10^{15}$, $u = \log\log\varphi(n) \geq \log\log\varphi(N_{14}) > 3.55$ et (2.6) implique

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq e^\gamma \log\log\varphi(n) + \frac{2.94}{\log\log\varphi(n)}, \quad n \geq N_{14}. \qquad (2.7)$$

2.3. Les petites valeurs de n

Démonstration de (1.2)

La formule (2.4) a été établie pour $n \geq 30030$. Pour démontrer (1.2), il suffit de calculer $G(n) = \frac{n}{\varphi(n)} - e^\gamma \log\log\varphi(n)$ pour $3 \leq n \leq 30029$.

Mais on peut se contenter de calculer

$n =$	3	4	5	$N_2 = 6$	$N_3 = 30$	$N_4 = 210$	$N_5 = 2310$
$G(n) =$	2.15	2.65	0.67	3.65	2.45	1.96	1.57

et d'appliquer le lemme 2.2 à la fonction

$$f(t) = e^\gamma\left(\log\log t - \log\log\varphi(6)\right) + \frac{6}{\varphi(6)} = e^\gamma \log\log t + G(6).$$

Pour $k \in \{2,3,4,5\}$, on a $\frac{N_k}{\varphi(N_k)} - f(\varphi(N_k)) = G(N_k) - G(6) \leq 0$ et il en résulte $\frac{n}{\varphi(n)} \leq f(\varphi(n)) = e^\gamma \log\log\varphi(n) + G(6)$ pour $N_2 = 6 \leq n < N_6 = 30030$.

Démonstration de (1.3)

La formule (2.5) prouve (1.3) pour $n \geq N_6$. Comme $\frac{N_5}{\varphi(N_5)\log\log\varphi(N_5)} = 2.64\ldots$, le lemme 2.2 appliqué à la fonction $f(t) = 3\log\log t$ démontre (1.3) pour $N_5 = 2310 \leq n < N_6 = 30030$.

Il reste à calculer $\frac{n}{\varphi(n)} - 3\ \log\log\varphi(n)$ pour $n \leq 2309$. Cette quantité est non définie pour $n \in \{1,2\}$ et positive pour

$$n \in \{3,4,5,6,8,10,12,14,18,20,24,30,36,42,60,66,84,90,120,210\}.$$

Pour $n \geq 3$, le maximum de $\frac{n}{\varphi(n)\log\log\varphi(n)}$ est atteint pour $n = 12$ et vaut $9.18458\ldots$

Démonstration de (1.4)

Posons $c_k = \log\log\varphi(N_k)\left[\frac{N_k}{\varphi(N_k)} - e^\gamma \log\log\varphi(N_k)\right]$. On calcule

$k =$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$c_k =$	2.66	2.86	2.96	2.92	2.94	2.93	2.82	2.77	2.68	2.59	2.55

et l'on pose

$$c = \max_{4 \leq k \leq 14} c_k = c_6 \approx 2.9550377\,.$$

La fonction $f(t) = e^\gamma \log\log t + \frac{c}{\log\log t}$ est croissante pour $t \geq 38 > e^{e^{\sqrt{ce^{-\gamma}}}}$. Comme $\varphi(N_4) = \varphi(210) = 48$, on applique le lemme 2.2 à la fonction f pour $4 \leq k \leq 14$; cela prouve (1.4) pour $N_4 \leq n < N_{15}$ et, compte tenu de (2.7), pour $n \geq N_4 = 210$.

Il reste à vérifier (1.4) pour $n \leq 209$. Les exceptions sont $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$; Pour ces valeurs de n, on a $\varphi(n) = 1$ ou 2 et $\log\log\varphi(n)$ est soit non défini soit négatif.

3. Les nombres (σ,τ)–superchampions

Soit ε un nombre réél positif. Il résulte de (1.5) que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon} = 0$ et que $\frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon}$ est borné.

Définition 3.1. *On dit que N est un nombre (σ,τ)–superchampion s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, on ait*

$$\frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon} \leq \frac{\sigma(N)}{N\tau(N)^\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Cette définition suit l'exemple de Ramanujan qui dans [8, §32] a introduit les nombres hautement composés supérieurs. Notons qu'elle entraîne la propriété suivante:

$$\tau(n) \leq \tau(N) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{\sigma(N)}{N}. \tag{3.2}$$

En effet, par la définition 3.1, on a pour tout $n \geq 1$ vérifiant $\tau(n) \leq \tau(N)$

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{\sigma(N)}{N}\left(\frac{\tau(n)}{\tau(N)}\right)^\varepsilon \leq \frac{\sigma(N)}{N}.$$

La fonction $\frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon}$ est multiplicative; pour trouver son maximum, on recherche d'abord pour chaque p premier le maximum de la fonction $\alpha \mapsto \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha\tau(p^\alpha)^\varepsilon}$.

Lemme 3.1. *Posons pour p premier et α entier, $\alpha \geq 1$,*

$$\psi(p,\alpha) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{p+p^2+\ldots+p^\alpha}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\log\left(1 + \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-p}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\log\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^{\alpha+1}-p}}{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \tag{3.3}$$

et $\psi(p,0) = +\infty$. La fonction $\psi(p,\alpha)$ est strictement décroissante en p et en α. On a

$$\lim_{p\to\infty} \psi(p,\alpha) = 0 \qquad et \qquad \lim_{\alpha\to\infty} \psi(p,\alpha) = 0.$$

Soit α_p un nombre en lequel la fonction $\alpha \mapsto \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha\tau(p^\alpha)^\varepsilon}$ atteint son maximum. Alors, on a

$$\psi(p,\alpha_p+1) \leq \varepsilon \leq \psi(p,\alpha_p). \tag{3.4}$$

Démonstration. La décroissance en p et les limites sont faciles à établir. Pour prouver la décroissance en α, nous utiliserons les inégalités

$$\frac{1}{1+t} < \log\left(1+\frac{1}{t}\right) < \frac{1}{t}, \qquad t > 0.$$

On a $\psi(p,1) < \psi(p,0) = +\infty$. Supposons maintenant $\alpha \geq 2$; il vient

$$\begin{aligned}\psi(p,\alpha) &< \frac{1}{(p+p^2+\ldots+p^\alpha)\log(1+1/\alpha)}\\ &= \frac{1}{p\log(1+1/\alpha)}\,\frac{1}{1+p+\ldots+p^{\alpha-1}}\\ &< \frac{1}{p\log(1+1/\alpha)}\log\left(1+\frac{1}{p+p^2+\ldots+p^{\alpha-1}}\right)\\ &= \psi(p,\alpha-1)\frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)}{p\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \leq \psi(p,\alpha-1)\frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)}{2\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\end{aligned}$$

et l'on a

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2 > 1+\frac{2}{\alpha} \geq 1+\frac{1}{\alpha-1}$$

ce qui achève la preuve de la décroissance de $\psi(p,\alpha)$ en α.

On pose ensuite $\theta(p,0) = 0$ et, pour $\alpha \geq 1$,

$$\theta(p,\alpha) = \log\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} - \varepsilon\log\tau(p^\alpha) = \log\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^\alpha}\right) - \varepsilon\log(\alpha+1). \quad (3.5)$$

Pour $\alpha \geq 1$, on a

$$\theta(p,\alpha-1) - \theta(p,\alpha) = \log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(\varepsilon - \psi(p,\alpha)) \quad (3.6)$$

et (3.4) en résulte compte tenu de la décroissance en α de la fonction ψ. ∎

Lemme 3.2. *Soit N un nombre (σ,τ)–superchampion de paramètre ε (autrement dit la fonction $n \mapsto \frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon}$ atteint son maximum en N). Un diviseur premier p de N vérifie $p \leq \frac{1}{2^\varepsilon-1}$. Si $p > q$ sont deux nombres premiers, on a*

$$v_p(N) \leq v_q(N).$$

Démonstration. Par le lemme 3.1, le nombre N s'écrit $N = \prod_p p^{\alpha_p}$ où, pour chaque nombre premier p, α_p vérifie (3.4).

L'inégalité $p > \frac{1}{2^\varepsilon-1}$ est équivalente à $\varepsilon > \frac{\log(1+1/p)}{\log 2} = \psi(p,1)$, ce qui, par (3.4), implique $\alpha_p = 0$.

Par la décroissance en p de $\psi(p,\alpha)$ annoncée dans le lemme 3.1 et par (3.4), on a

$$\psi(p,\alpha_p+1) \leq \varepsilon \leq \psi(p,\alpha_p) < \psi(q,\alpha_p)$$

ce qui, encore par (3.4), entraîne $\alpha_q \geq \alpha_p$. ∎

3.1. Détermination des nombres (σ,τ)–superchampions

Posons

$$\mathcal{E}_p = \{\psi(p,\alpha), \alpha = 1,2,\ldots\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \left(\bigcup_{p \ \text{premier}} \mathcal{E}_p\right) \cup \{+\infty\}. \tag{3.7}$$

D'après le théorème des six exponentielles (cf. [15, p. 14]), si p,q,r sont trois nombres premiers distincts, les ensembles $\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_q$ et $\mathcal{E}_r$ ont une intersection vide (cf. [1, p. 455] et [3, p. 71]).

En fait, si p et q sont deux nombres premiers distincts, il est vraisemblable que l'on a $\mathcal{E}_p \cap \mathcal{E}_q = \emptyset$. Dans les calculs effectués dans cet article, tous les nombres $\varepsilon \geq \psi(2248723,1) \approx 0.00000064156$ et vérifiant $\varepsilon \in \mathcal{E}$ appartiennent à un seul ensemble $\mathcal{E}_p$.

Pour mesurer la proximité de deux éléments distincts ε' et ε'' de $\mathcal{E}$, il est commode de calculer $|g_1(\varepsilon') - g_1(\varepsilon'')|$ avec $g_1(\varepsilon) = \frac{1}{2^\varepsilon - 1}$. Notons que l'on a $g_1(\psi(p,1)) = p$. Pour $\varepsilon'' > \varepsilon' \geq \psi(2248723,1)$, nous avons trouvé

$$\min(g_1(\varepsilon') - g_1(\varepsilon'')) = g_1(\psi(71453,1)) - g_1(\psi(349,2)) \approx 0.0381\ .$$

Ordonnons les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon_0 = +\infty > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots\}.$$

Le lemme suivant, qui est voisin de la proposition 4 de [3], détermine les nombres (σ,τ)–superchampions:

Lemme 3.3. *(i) Soit $i \geq 0$ et $\varepsilon_i > \varepsilon > \varepsilon_{i+1}$. Le maximum de la fonction $n \mapsto \frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon}$ est atteint en un seul nombre*

$$N^{(i)} = \prod_{p < \frac{1}{2^\varepsilon - 1}} p^{\alpha_p}$$

avec α_p défini de façon unique par (3.4).

(ii) Si $\varepsilon = \varepsilon_i$ et si ε appartient à un seul ensemble $\mathcal{E}_p$, la fonction $n \mapsto \frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon}$ atteint son maximum en deux points $N^{(i-1)}$ et $N^{(i)} = pN^{(i-1)}$.

(iii) Si $\varepsilon = \varepsilon_i$ et si $\varepsilon \in \mathcal{E}_q \cap \mathcal{E}_r$, la fonction $n \mapsto \frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon}$ atteint son maximum en quatre points $N^{(i-1)}, qN^{(i-1)}, rN^{(i-1)}$ et $N^{(i)} = qrN^{(i-1)}$.

Démonstration. La démonstration s'appuie sur les lemmes 3.1 et 3.2. On observera que si $\varepsilon = \varepsilon_i = \psi(p,\alpha)$, il y a dans (3.4) deux valeurs possibles pour α_p, $\alpha_p = \alpha$ et $\alpha_p = \alpha - 1$. ■

On lit dans la table ci-dessous que les deux nombres 2 et 120 sont (σ,τ)–superchampions pour les paramètres 1/2 et 1/5 respectivement; de la relation (3.1), on déduit alors les inégalités valables pour $n \geq 1$,

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{\sigma(2)}{2}\sqrt{\frac{\tau(n)}{\tau(2)}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{\tau(n)} \leq 1.061\ \sqrt{\tau(n)} \tag{3.8}$$

i	$N^{(i)}$	$\frac{\sigma(N^{(i)})}{N^{(i)}}$	$\tau(N^{(i)})$	ε
0	1	1	1	$\varepsilon_0 = +\infty > \varepsilon \geq \varepsilon_1 = \log(3/2)/\log 2 = 0.585$
1	2	1.5	2	$\varepsilon_1 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_2 = \log(4/3)/\log 2 = 0.415$
2	6	2	4	$\varepsilon_2 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_3 = \log(7/6)/\log(3/2) = 0.380$
3	12	2.333	6	$\varepsilon_3 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_4 = \log(6/5)/\log 2 = 0.263$
4	60	2.8	12	$\varepsilon_4 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_5 = \log(15/14)/\log(4/3) = 0.240$
5	120	3	16	$\varepsilon_5 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_6 = \log(13/12)/\log(3/2) = 0.197$
6	360	3.25	24	$\varepsilon_6 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_7 = \log(8/7)/\log 2 = 0.193$
7	2520	3.714	48	$\varepsilon_7 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_8 = \log(31/30)/\log(5/4) = 0.147$
8	5040	3.838	60	$\varepsilon_8 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_9 = \log(12/11)/\log 2 = 0.126$
9	55440	4.187	120	$\varepsilon_9 \geq \varepsilon \geq \varepsilon_{10} = \log(14/13)/\log 2 = 0.107$

et

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{\sigma(120)}{120}\left(\frac{\tau(n)}{\tau(120)}\right)^{0.2} = 3\left(\frac{\tau(n)}{16}\right)^{0.2} \leq 1.72305\,\tau(n)^{0.2}. \tag{3.9}$$

Définition 3.2. *Soit $\varepsilon > 0$. On note N_ε^+ (resp. N_ε^-) le plus grand (resp. petit) nombre (σ,τ)–superchampion de paramètre ε.*

Remarque. D'après le lemme (3.3), si $\varepsilon \notin \mathcal{E}$ (cas (i)), on a $N_\varepsilon^+ = N_\varepsilon^-$. Si $\varepsilon = \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ (cas (ii) et cas (iii)), on a $N_\varepsilon^+ = N^{(i)}$ et $N_\varepsilon^- = N^{(i-1)}$.

Le nombre $N^{(i)}$ est un diviseur de $N^{(i+1)}$. Si un nombre (σ,τ)–superchampion N vérifie $N \geq N_\varepsilon^+$, alors, N est un multiple de N_ε^+.

3.2. Aspect géométrique

A chaque entier $n \geq 1$, associons dans un système d'axes xOy le point $(\log\tau(n), \log(\sigma(n)/n))$ appelé *image* de n. La droite $D(\varepsilon, n)$ de pente ε et passant par l'image de n coupe l'axe Oy au point d'ordonnée $\log\frac{\sigma(n)}{n} - \varepsilon\log\tau(n)$.

Il résulte des calculs précédents que l'ensemble des images des entiers $n \geq 1$ a une enveloppe convexe qui est une ligne polygonale dont les pentes des côtés sont les éléments de $\mathcal{E}$ et dont les sommets sont les images des nombres (σ,τ)–superchampions (cf. Fig. 1).

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Si $\varepsilon \notin \mathcal{E}$, la plus haute droite $D(\varepsilon, n)$ va passer par un seul des sommets de l'enveloppe convexe.

Si $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et si ε n'appartient qu'à un seul $\mathcal{E}_p$ (cas (ii) du lemme 3.3), la plus haute droite $D(\varepsilon, n)$ va joindre deux sommets consécutifs de l'enveloppe convexe.

Si $\varepsilon \in \mathcal{E}_q \cap \mathcal{E}_r$ (cas (iii) très peu probable du lemme 3.3), la plus haute droite $D(\varepsilon, n)$ contiendra les images de quatre nombres (σ,τ)–superchampions.

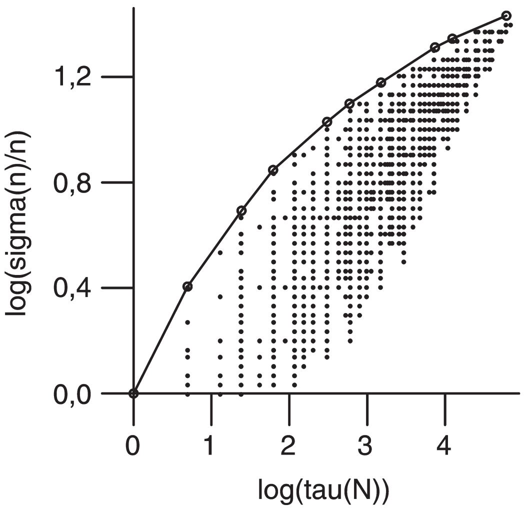

Figure 1: Les images des nombres $1 \leq n \leq 55440$.

4. Démonstration du théorème 1.2

4.1. Deux lemmes

Lemme 4.1. *Soit* $F\colon [u_0, u_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *une fonction logarithmiquement concave. Soit* $\varepsilon \in \mathcal{E}$ *(cf.* (3.7)*) et* N' *et* N'' *deux nombres* (σ,τ)*–superchampions de même paramètre* ε *(cf. lemme 3.3). Soit* n *un nombre entier vérifiant*

$$e^{u_0} \leq \tau(N') \leq \tau(n) \leq \tau(N'') \leq e^{u_1}.$$

Alors, on a

$$\frac{\sigma(n)}{n\,F(\log(\tau(n)))} \leq \max\left(\frac{\sigma(N')}{N'\,F(\log(\tau(N')))}\,,\;\frac{\sigma(N'')}{N''\,F(\log(\tau(N'')))}\right).$$

Démonstration. La démonstration s'inspire de celle de la proposition 1 de [11].

Soit $N \in \{N', N''\}$. On a par (3.1)

$$\log\frac{\sigma(n)}{n} - \varepsilon\log\tau(n) \leq \log\frac{\sigma(N)}{N} - \varepsilon\log\tau(N) \tag{4.1}$$

et

$$\log\frac{\sigma(n)}{n} - \log F(\log\tau(n)) \leq g(\log\tau(n)) + \log\frac{\sigma(N)}{N} - \varepsilon\log\tau(N) \tag{4.2}$$

en posant $g(u) = \varepsilon u - \log F(u)$. La fonction g est convexe sur l'intervalle $[u_0, u_1] \supset [\log \tau(N'), \log \tau(N'')]$. On choisit $N = N'$ ou $N = N''$ pour que

$$g(\log \tau(n)) \le \max\left(g(\log \tau(N')), g(\log \tau(N''))\right) = g(\log \tau(N))$$

et l'inégalité (4.2) entraîne

$$\begin{aligned}\log \frac{\sigma(n)}{n} - \log F(\log \tau(n)) &\le g(\log \tau(N)) + \log \frac{\sigma(N)}{N} - \varepsilon \log \tau(N)\\ &= \log \frac{\sigma(N)}{N\, F(\log(\tau(N)))}\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du lemme 4.1. ■

Lemme 4.2. *Soit a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 des nombres réels vérifiant $a_1 > 0, a_2 \ge 0, a_3 \ge 0$, $a_4 \ge 1, a_5 \ge e$. La fonction*

$$F(u) = a_1 \log(a_4 + u) + a_2 \log\log(a_5 + u) + a_3$$

est logarithmiquement concave pour $u > 0$.

Démonstration. On calcule $F'(u)$, $F''(u)$ et l'on montre que, pour $u > 0$, on a $F(u) > 0$, $F'(u) > 0$ et $F''(u) < 0$ ce qui entraîne $F(u)F''(u) - F'^2(u) < 0$. ■

4.2. Les grandes valeurs de $\omega(n)$

Lemme 4.3. *Soit $k_0 = 15985$ et n tel que $\omega(n) = k \ge k_0$. On a*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \le \frac{n}{\varphi(n)} \le 2.32\ \log\log \tau(n). \tag{4.3}$$

Soit n tel que $\omega(n) = k \ge k_1 = 166000$, on a

$$\frac{\sigma(n)}{n} \le \frac{n}{\varphi(n)} \le e^\gamma \log\log \tau(n) + e^\gamma \log\log\log \tau(n) + 0.94\ . \tag{4.4}$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est une forme effective de la preuve de (1.5) dans [14, formule (17)].

On définit λ_k par $p_k = k(\log k + \log\log k - \lambda_k)$ de sorte que, par le théorème A de [6], on a pour $k \ge k_0$,

$$\lambda_k = \log k + \log\log k - \frac{p_k}{k} \ge 0.9427. \tag{4.5}$$

Nous utiliserons également la majoration (4.10) de [12] et le théorème 6.12 de [2]:

$$\frac{N_k}{\varphi(N_k)} = \prod_{p \,\le\, p_k} \frac{p}{p-1} \le e^\gamma \left(\log p_k + \delta(k)\right) \tag{4.6}$$

avec

$$\delta(k) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{p_k}} & \text{si } p_k \le 10^8 \\ \frac{0.2}{\log p_k} & \text{si } p_k > 10^8. \end{cases} \tag{4.7}$$

De la définition de λ_k, on déduit pour $k \ge k_0 = 15985$,

$$p_k \le k \log k \left(1 + \frac{\log\log k - \lambda_k}{\log k}\right),$$

$$\log p_k \le \log k + \log\log k + \frac{\log\log k - \lambda_k}{\log k} \le \log k + \log\log k + \beta(k) \tag{4.8}$$

avec, par (4.5)

$$\beta(k) = \frac{\log\log k - 0.9427}{\log k}\cdot \tag{4.9}$$

Soit maintenant $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$ un nombre tel que $\omega(n) = k$. On a, comme en (2.3),

$$\frac{\sigma(n)}{n} \le \frac{n}{\varphi(n)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - 1/q_i} \le \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - 1/p_i} = \frac{N_k}{\varphi(N_k)}$$

et, par (4.6),

$$\frac{\sigma(n)}{n} \le \frac{n}{\varphi(n)} \le e^\gamma(\log p_k + \delta(k)). \tag{4.10}$$

Ainsi, (4.8) et (4.10) entraînent pour $k = \omega(n) \ge k_0 = 15985$

$$\frac{\sigma(n)}{n} \le \frac{n}{\varphi(n)} \le e^\gamma(\log k + \log\log k + \beta(k) + \delta(k)). \tag{4.11}$$

Démonstration de (4.3). Comme $p_{k_0} = 175939$, on a, par (4.7), pour $k \ge k_0$,

$$\delta(k) \le \max\left(\frac{2}{\sqrt{175939}}, \frac{0.2}{\log(10^8)}\right) = \frac{0.2}{\log(10^8)} = 0.010857\dots$$

et l'inégalité (4.11) implique pour $k \ge k_0$

$$\frac{n}{\varphi(n)} \le e^\gamma \log k \left(1 + \frac{\log\log k_0 + \beta(k_0) + 0.01086}{\log k_0}\right) \le 2.23\ \log k.$$

Mais $\tau(n) \ge 2^{\omega(n)} = 2^k \ge 2^{k_0}$, donc

$$\begin{aligned} \frac{n}{\varphi(n)} &\le 2.23\ (\log\log \tau(n) - \log\log 2) \\ &\le 2.23\ \log\log\tau(n)\left(1 + \frac{0.37}{\log\log\tau(n)}\right) \\ &\le 2.23\ \log\log\tau(n)\left(1 + \frac{0.37}{\log\log 2^{k_0}}\right) \\ &= 2.31776\dots\ \log\log\tau(n) \end{aligned}$$

ce qui prouve (4.3).

Démonstration de (4.4). Puisque $\tau(n) \geq 2^{\omega(n)}$, on a $k = \omega(n) \leq \frac{\log \tau(n)}{\log 2}$ et il suit

$$\log k \leq \log\log \tau(n) - \log\log 2 = \log\log \tau(n) \left(1 - \frac{\log\log 2}{\log\log \tau(n)}\right)$$

$$\log\log k \leq \log\log\log \tau(n) - \frac{\log\log 2}{\log\log \tau(n)} \leq \log\log\log \tau(n) + \eta(k)$$

avec $\eta(k) = \frac{-\log\log 2}{\log\log 2^k}$ et (4.11) entraîne

$$\frac{n}{\varphi(n)} \leq e^\gamma \log\log \tau(n) + e^\gamma \log\log\log \tau(n) + \varrho(k)$$

avec

$$\varrho(k) = e^\gamma \left(-\log\log 2 + \eta(k) + \beta(k) + \delta(k)\right).$$

Pour $k \geq k_2 = \pi(10^8) + 1 = 5761456$, on a $p_k \geq p_{k_2} = 10^8 + 7$, chacune des fonctions $\eta(k), \beta(k)$ et $\delta(k)$ est décroissante et

$$\varrho(k) \leq \varrho(k_2) = 0.921296\ldots$$

Et pour $k_1 = 166000 \leq k < k_2$, comme $p_{k_1} = 2248723$, on a

$$\varrho(k) \leq \varrho(k_1) = 0.939945\ldots$$

ce qui prouve (4.4). ■

4.3. Preuve de (1.6): les petites valeurs de $\tau(n)$

Soit toujours $k_0 = 15985$, $p_{k_0} = 175939$. On pose $\varepsilon^{(0)} = \log\left(1 + \frac{1}{p_{k_0}}\right) / \log 2$ et l'on génère les nombres (σ, τ)–superchampions N vérifiant $2 \leq N \leq N^+_{\varepsilon^{(0)}}$ (cf. définition 3.2); pour chacun d'entre eux, on calcule

$$f_1(N) = \frac{\sigma(N)}{N \log\log(3\tau(N))}.$$

Soit $\varepsilon^{(1)} = \log(1 + 1/113)/\log 2 \approx 0.012711$; le maximum de $f_1(N)$ est atteint pour

$$N = M_1 = N^+_{\varepsilon^{(1)}} = 2^8 3^5 5^3 7^2 11^2 13^2 \prod_{17 \leq p \leq 113} p$$

et vaut $2.597907\ldots$

On pose $F(u) = \log(u + \log 3)$. Par le lemme 4.2, $F(u)$ est logarithmiquement concave pour $u > 0$. Par la remarque 3.1, il existe i_0 tel que $N^+_{(\varepsilon_0)} = N^{(i_0)}$. En appliquant le lemme 4.1 pour tous les couples $(N^{(i)}, N^{(i+1)})$ vérifiant $2 \leq N^{(i)} < N^{(i+1)} \leq N^+_{\varepsilon^{(0)}} = N^{(i_0)}$, on obtient (1.6) pour tout n tel que $\tau(2) = 2 \leq \tau(n) \leq \tau(N^+_{\varepsilon^{(0)}})$.

4.4. Preuve de (1.6): les grandes valeurs de $\tau(n)$

Supposons maintenant $\tau(n) > \tau(N^+_{\varepsilon^{(0)}}) = \tau(N^{(i_0)})$. Par (3.4), p_{k_0} divise $N^+_{(\varepsilon_0)} = N^{(i_0)}$. Soit $N^{(i)}$ et $N^{(i+1)}$ les deux nombres (σ,τ)–superchampions tels que $\tau(N^{(i)}) \leq \tau(n) < \tau(N^{(i+1)})$ (cf. lemme 3.3 et remarque 3.1). On doit avoir $i \geq i_0$ et, par le lemme 3.2, les nombres premiers $p \leq p_{k_0}$ divisent $N^{(i)}$ et $N^{(i+1)}$; ainsi $\omega(N^{(i)}) \geq k_0$ et $\omega(N^{(i+1)}) \geq k_0$. Par (4.3), on a alors $f_1(N^{(i)}) \leq 2.32$, $f_1(N^{(i+1)}) \leq 2.32$, ce qui entraîne par le lemme 4.1, $f_1(n) \leq 2.32$ et achève la preuve de (1.6).

4.5. Preuve de (1.7): les petites valeurs de $\tau(n)$

La preuve de (1.7) est très voisine. On pose $k_1 = 166000$, $p_{k_1} = 2248723$, $\varepsilon^{(2)} = \log(1+1/p_{k_1})/\log 2 \approx 0.00000064156$ et pour chaque nombre (σ,τ)–superchampion N vérifiant $2 \leq N \leq N^+_{\varepsilon^{(2)}}$, on calcule

$$f_2(N) = \frac{\sigma(N)}{N} - e^\gamma \log\log(e\tau(N)) - e^\gamma \log\log\log(e^e\tau(N)).$$

Soit $\varepsilon^{(3)} = \log(1+1/45439)/\log 2 \approx 0.0000317498$; le maximum de $f_2(N)$ pour $N \leq N^+_{\varepsilon^{(2)}}$ est atteint pour

$$N = M_2 = N^+_{\varepsilon^{(3)}} = 2^{18}3^{11}5^7 7^6 \prod_{11\leq p\leq 19} p^4 \prod_{23\leq p\leq 47} p^3 \prod_{53\leq p\leq 277} p^2 \prod_{281\leq p\leq 45439} p$$

et vaut $\mu = f_2(M_2) \approx 0.9414440795$.

Par le lemme 4.2, la fonction

$$F(u) = e^\gamma \log(1+u) + e^\gamma \log\log(e+u) + \mu \tag{4.12}$$

est logarithmiquement concave. D'après notre calcul, pour chaque nombre (σ,τ)–superchampion, $2 \leq N \leq N^+_{\varepsilon^{(2)}}$, on a $\frac{\sigma(N)}{NF(\log\tau(N))} \leq 1$ et par le lemme 4.1, cela entraîne que pour tout n vérifiant $\tau(2) = 2 \leq \tau(n) \leq \tau(N^+_{\varepsilon^{(2)}})$, on a $\frac{\sigma(n)}{nF(\log\tau(n))} \leq 1$, c'est-à-dire (1.7).

4.6. Preuve de (1.7): les grandes valeurs de $\tau(n)$

Soit maintenant N un nombre (σ,τ)–superchampion supérieur ou égal à $N^+_{\varepsilon^{(2)}}$. Comme dans le paragraphe 4.4, on a $\omega(N) \geq k_1$ et donc, par (4.4) et (4.12),

$$\frac{\sigma(N)}{N} \leq e^\gamma \log\log\tau(N) + e^\gamma \log\log\log\tau(N) + 0.94 < F(\log\tau(N)). \tag{4.13}$$

Supposons $\tau(n) > \tau(N^+_{\varepsilon^{(2)}})$. On définit comme en 4.4 les deux nombres (σ,τ)–superchampions $N^{(i)}$ et $N^{(i+1)}$ tels que $\tau(N^{(i)}) \leq \tau(n) < \tau(N^{(i+1)})$. On a $\omega(N^{(i+1)}) \geq \omega(N^{(i)}) \geq \omega(N^+_{\varepsilon^{(2)}}) \geq k_1$. Par (4.13), il vient

$$\max_{N\in\{N^{(i)},N^{(i+1)}\}} \frac{\sigma(N)}{NF(\log\tau(N))} < 1$$

d'où l'on déduit, par le lemme 4.1, que $\frac{\sigma(n)}{n} < F(\log\tau(n))$, et (1.7) est démontrée.

Notons que, pour $N = M_2$, les valeurs de $\frac{\sigma(N)}{N} \approx 19.0983$ et $\frac{N}{\varphi(N)} \approx 19.1096$ sont très voisines.

5. Démonstration du théorème 1.3

5.1. La méthode des bénéfices

Définition 5.1. *Soit $\varepsilon > 0$ et soit N l'un des nombres (σ,τ)–superchampions qui maximisent la fonction $n \mapsto \frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon}$. Pour $n \geq 1$, on appelle bénéfice de n la quantité (qui dépend de ε)*

$$\operatorname{ben}(n) = \log\frac{\sigma(N)}{N\tau(N)^\varepsilon} - \log\frac{\sigma(n)}{n\tau(n)^\varepsilon} = \log\frac{\sigma(N)/N}{\sigma(n)/n} - \varepsilon\log\frac{\tau(N)}{\tau(n)}\cdot \tag{5.1}$$

Compte tenu de (3.1), on a

$$\operatorname{ben}(n) \geq 0. \tag{5.2}$$

Soit $n = \prod_p p^{\beta_p}$ et $N = \prod_p p^{\alpha_p}$ (où pour chaque p premier, α_p vérifie (3.4)). On a

$$\operatorname{ben}(n) = \sum_{p \text{ premier}} \operatorname{ben}_p(n) \tag{5.3}$$

avec

$$\begin{aligned}
\operatorname{ben}_p(n) &= \log\frac{\sigma(p^{\alpha_p})/p^{\alpha_p}}{\sigma(p^{\beta_p})/p^{\beta_p}} - \varepsilon\log\frac{\tau(p^{\alpha_p})}{\tau(p^{\beta_p})}\\
&= \log\left(\frac{1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^{\alpha_p}}}{1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^{\beta_p}}}\right) - \varepsilon\log\left(\frac{\alpha_p+1}{\beta_p+1}\right)\\
&= \log\left(\frac{1-\frac{1}{p^{\alpha_p+1}}}{1-\frac{1}{p^{\beta_p+1}}}\right) - \varepsilon\log\left(\frac{\alpha_p+1}{\beta_p+1}\right)\cdot
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Lemme 5.1. *(i) Les nombres α_p et ε étant liés par (3.4), la quantité $\operatorname{ben}_p(n)$ définie par (5.4) vérifie $\operatorname{ben}_p(n) \geq 0$ pour tout $\beta_p \geq 0$. De plus, la fonction $\beta_p \mapsto \operatorname{ben}_p(n)$ est croissante (au sens large) pour $\beta_p \geq \alpha_p$, décroissante (au sens large) pour $\beta_p \leq \alpha_p$, nulle pour $\beta_p = \alpha_p$ et tend vers l'infini avec β_p.*
(ii) Pour ε fixé et $\psi(p,1) < \varepsilon$, par (3.4) on a $\alpha_p = 0$. Lorsque $\beta_p = 1$, $\operatorname{ben}_p(n) = \varepsilon\log 2 - \log(1+1/p)$ est une fonction croissante en p qui tend vers $\varepsilon\log 2$ quand $p \to \infty$.

Démonstration. Supposons $\beta_p \geq \alpha_p$. A l'aide des fonctions ψ et θ définies en (3.3) et en (3.5), on a par (3.6)

$$\begin{aligned}\operatorname{ben}_p(n) = \theta(p,\alpha_p) - \theta(p,\beta_p) &= \sum_{a=\alpha_p+1}^{\beta_p} \theta(p,a-1) - \theta(p,a) \\ &= \sum_{a=\alpha_p+1}^{\beta_p} \log\left(1+\frac{1}{a}\right)[\varepsilon - \psi(p,a)] \qquad (5.5)\end{aligned}$$

ce qui, par la décroissance de la fonction ψ (cf. lemme 3.1) et (3.4) prouve $\operatorname{ben}_p(n) \geq 0$ et la croissance de $\operatorname{ben}_p(n)$ par rapport à β_p.

Si $0 \leq \beta_p < \alpha_p$, on a

$$\operatorname{ben}_p(n) = \sum_{a=\beta_p+1}^{\alpha_p} \log\left(1+\frac{1}{a}\right)[\psi(p,a) - \varepsilon] \qquad (5.6)$$

et l'on conclut de la même façon pour montrer la décroissance de $\operatorname{ben}_p(n)$ par rapport à β_p.

Lorsque p, ε et α_p sont fixés, la formule (5.4) montre que $\operatorname{ben}_p(n)$ tend vers l'infini avec β_p.

La preuve de (ii) est facile. ■

Corollaire 5.1. *Soit ε fixé et B un nombre réel,* $0 \leq B < \varepsilon \log 2$. *L'ensemble des nombres entiers n vérifiant* $\operatorname{ben}(n) \leq B$ *(où* $\operatorname{ben}(n)$ *est défini par* (5.1)*) est fini.*

Démonstration. Soit n un nombre vérifiant $\operatorname{ben}(n) \leq B$. Par le lemme 5.1 (i), on a $\operatorname{ben}_p(n) \geq 0$ et par (5.3), on a, pour chaque nombre premier p, $\operatorname{ben}_p(n) \leq \operatorname{ben}(n) \leq B < \varepsilon \log 2$. Toujours par le lemme 5.1, cela implique, lorsque $\alpha_p = 0$, qu'il existe p_0 tel que $\beta_p = 0$ pour $p > p_0$.

Ainsi, les nombres premiers supérieurs à p_0 ne divisent pas n.

Soit maintenant $p \leq p_0$. Le lemme 5.1 (i) et l'hypothèse $\operatorname{ben}_p(n) \leq B$ montrent qu'il n'y a qu'un nombre fini d'exposants β_p possibles. ■

Remarque. La démonstration du corollaire 5.1 est effective et permet, lorsque B est petit, de déterminer l'ensemble $\mathcal{N}(B)$ des nombres n vérifiant $\operatorname{ben}(n) \leq B$.

Cependant il semble très difficile d'obtenir une estimation de $\operatorname{Card}(\mathcal{N}(B))$ en fonction de B.

Nous pouvons maintenant préciser le lemme 4.1.

Lemme 5.2. *Si l'on rajoute dans le lemme 4.1 la condition*

$$\operatorname{ben}(n) \geq B \qquad (5.7)$$

alors la conclusion devient

$$\frac{\sigma(n)}{n\, F(\log(\tau(n)))} \leq e^{-B}\ \max\left(\frac{\sigma(N')}{N'\, F(\log(\tau(N')))}\ ,\ \frac{\sigma(N'')}{N''\, F(\log(\tau(N'')))}\right).$$

Démonstration. Compte tenu de (5.1) et de (5.7), l'inégalité (4.1) se réécrit:

$$\begin{aligned}\log\frac{\sigma(n)}{n}-\varepsilon\log\tau(n)&=\log\frac{\sigma(N)}{N}-\varepsilon\log\tau(N)-\operatorname{ben}(n)\\&\le\log\frac{\sigma(N)}{N}-\varepsilon\log\tau(N)-B.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Ainsi, (4.2) devient

$$\log\frac{\sigma(n)}{n}-\log F(\log\tau(n))\le g(\log\tau(n))+\log\frac{\sigma(N)}{N}-\varepsilon\log\tau(N)-B$$

et la démonstration se termine comme celle du lemme 4.1. ■

5.2. Démonstration du théorème 1.3

Les calculs effectués pour démontrer la formule (1.6) du théorème 1.2 montrent que les seuls nombres (σ,τ)–superchampions N tels que

$$f_1(N)=\frac{\sigma(N)}{N\log\log(3\tau(N))}\ge\frac{2957}{1000}$$

sont les nombres $N=N^{(i)}$ (cf. lemme 3.3) avec $46\le i\le 50$. La table ci-dessous donne la valeur de ces nombres en fonction de

$$M_1=N^{(46)}=2^8 3^5 5^3 7^2 11^2 13^2\prod_{17\le p\le 113}p\,.$$

Notons que pour $45\le i\le 51$, $\varepsilon_i=\psi(p^{(i)},1)=\log(1+1/p^{(i)})/\log 2$.

i	ε_i	$p^{(i)}$	$N^{(i)}/M_1$	$f_1(N^{(i)})$
45	0.0132	109	$1/113$	2.596216
46	0.0127	113	1	2.597907
47	0.0113	127	127	2.597801
48	0.0110	131	127×131	2.597746
49	0.0105	137	$127\times131\times137$	2.597461
50	0.0103	139	$127\times131\times137\times139$	2.597502
51	0.0097	149	$127\times131\times137\times139\times149$	2.596862

Ainsi, par le lemme 4.1, (1.8) est satisfaite pour tous les nombres n vérifiant $2\le\tau(n)\le\tau(N^{(45)})=\frac{1}{2}\,\tau(M_1)$ ou $\tau(n)\ge\tau(N^{(51)})=32\,\tau(M_1)$.

Ensuite, on pose $B=\log\left(\frac{2.6}{2.597}\right)\approx 0.0011545$ de telle sorte que, par (1.6), pour tout $n\ge 2$, on ait

$$e^{-B}f_1(n)=e^{-B}\frac{\sigma(n)}{n\log\log(3\tau(n))}<e^{-B}\ \times\ 2.6=\frac{2957}{1000}$$

ce qui, par le lemme 5.2, prouvera (1.8) pour les n restants qui ont un bénéfice supérieur à B.

Finalement, pour chacune des 6 valeurs de $\varepsilon = \varepsilon_i$ avec $45 \leq i \leq 50$, on détermine les n dont le bénéfice est inférieur à B (cf. corollaire 5.1). Parmi ces nombres n, seuls 12 présentent une valeur de $f_1(n)$ supérieure à 2.597. Ils sont énumérés par valeur décroissante de $f_1(n)$ dans le tableau ci-dessous.

n/M_1	$\tau(n)/\tau(M_1)$	$f_1(n)$
1	1	2.597907
127	2	2.597801
127×131	4	2.597746
$127 \times 131 \times 137 \times 139$	16	2.597502
$127 \times 131 \times 137$	8	2.597461
$2 \times 127 \times 131$	40/9	2.597331
2	10/9	2.597290
2×127	20/9	2.597288
$2 \times 127 \times 131 \times 137 \times 139$	160/9	2.597269
$127 \times 131 \times 139$	8	2.597190
131	2	2.597181
$2 \times 127 \times 131 \times 137$	80/9	2.597140

Si l'on désigne par $\nu(x)$ le cardinal de l'ensemble des nombres n pour lesquels $f_1(n) = \frac{\sigma(n)}{n \log\log \tau(n)} \geq x$, nous avons calculé les valeurs suivantes.

x	2.597	2.596	2.595	2.594	2.593	2.592	2.591	2.590
$\nu(x)$	12	45	179	586	1680	4760	12653	32187

Posons

$$M_3 = 2^9 3^5 5^3 7^3 11^2 13^2 17^2 \prod_{19 \leq p \leq 211} p$$

et considérons la suite des nombres $n_p = \frac{pM_3}{211}$ où p parcourt les nombres premiers supérieurs à 211. On a $\tau(n_p) = \tau(M_3)$, $f_1(n_p) = \frac{211(p+1)}{212\, p} f_1(M_3)$ et

$$\lim_{p \to \infty} f_1(n_p) = \frac{211}{212} f_1(M_3) = 2.580303\ldots$$

Ainsi, pour $x < 2.58$, la quantité $\nu(x)$ est infinie.

Il est vraisemblable que l'on a

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\sigma(n)}{n \log\log(3\tau(n))} = \frac{211}{212} \frac{\sigma(M_3)}{M_3 \log\log(3\tau(M_3))} = 2.580303\ldots$$

Remerciements. J'ai plaisir à remercier A. Schinzel pour la question qu'il m'a posée, et qui m'a conduit au théorème 1.1. Je remercie également M. Deléglise pour le dessin de la figure et pour d'utiles discussions au sujet des nombres super-champions.

Références

[1] L. Alaoglu, P. Erdős, *On highly composite and similar numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. **56** (1944), 448–469.

[2] P. Dusart, Estimates of some Functions over Primes without R. H., à paraître.

[3] P. Erdős et J.-L. Nicolas, *Répartition des nombres superabondants*, Bull. Soc. Math. France **103** (1975), 65–90.

[4] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 4th edition, *Oxford at the Clarendon Press*, 1964.

[5] D. W. Masser, P. Shiu, *On Sparsely Totient Numbers*, Pacific J. of Math. **121** (1986), 407–426.

[6] J.-P. Massias et G. Robin, *Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers*, J. de Théorie des Nombres de Bordeaux **8** (1996), 215–242.

[7] J.-L. Nicolas, *Petites valeurs de la fonction d'Euler*, J. Number Theory **17** (1983), 375–388.

[8] S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. Serie 2 **14** (1915), 347–409. Collected papers, Cambridge University Press, (1927), 78–128.

[9] S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, annotated by J.-L. Nicolas and G. Robin, The Ramanujan J. **1** (1997), 119–153.

[10] P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, 3rd ed., Springer, 1996.

[11] G. Robin, *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann*, J. Math. pures et appliquées **63** (1984), 187–213.

[12] J. B. Rosser, L. Schoenfeld, *Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers*, Illinois. J. Math **6** (1962), 64–94.

[13] A. Schinzel, *Around Polya's theorem on the set of prime divisors of a linear recurrence, Diophantine Equations*, Narosa Publishing House, 2008, 225–233.

[14] G. Tenenbaum, *Une inégalité de Hilbert pour les diviseurs*, Indag. Math., N.S. **2** (1991), 105–114.

[15] M. Waldschmidt, Diophantine Approximation on Linear Algebraic Group, Springer, 2000.

Address: Université de Lyon, Université de Lyon 1, CNRS, Institut Camille Jordan, UMR 5208, Bât. Doyen Jean Braconnier, 21 Avenue Claude Bernard, F-69622 Villeurbanne cédex, France.

E-mail: jlnicola@in2p3.fr, http://math.univ-lyon1.fr/∼nicolas/

Received: 11 January 2008; **revised:** 2 April 2008