J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
48 (1998) 323-405

MÉTRIQUES SUR LES POLYÈDRES HYPERBOLIQUES CONVEXES

JEAN-MARC SCHLENKER

Résumé

En utilisant la "métrique de Hilbert", on met une distance (complexe) naturelle sur l' "extérieur" de l'espace hyperbolique, ainsi qu'entre un point de H^n et un point "extérieur". L'espace obtenu a une notion naturelle de polyèdres; on décrit les "métriques" induites sur les polyèdres convexes en dimension 3. Ceci étend des résultats d'Alexandrov, Andreev et Rivin concernant les métriques induites et les métriques duales sur les polyèdres hyperboliques convexes. Divers résultats intermédiaires — rigidité de polyèdres convexes, description de dégénéréscences — s'étendent en dimension supérieure ou à d'autres situations analogues.

Abstract

Using the "Hilbert metric", we define a (complex) distance on the "exterior" of the hyperbolic space, as well as between a point in H^n and an "exterior" point. The resulting space has a natural notion of polyhedra; we describe the metrics induced on the convex polyhedra in dimension 3. This extends results of Alexandrov, Andreev and Rivin concerning the induced and the dual metrics on convex hyperbolic polyhedra. Several lemmas — rigidity of convex polyhedra, description of degenerations — extend to higher dimensions or to analoguous situations.

1. Introduction

Soit C un ouvert strictement convexe de $\mathbb{R}^n$. La métrique de Hilbert de C est une distance définie sur C de la façon suivante: pour $x, y \in C$ distincts, il existe une unique droite $\Delta(x, y)$ de $\mathbb{R}^n$ passant par x et y. Cette droite rencontre ∂C en deux points a, b; on note alors ab, ax, etc, les distances orientées sur $\Delta(x, y)$ entre les points a et b, a et x, etc, et

Received April 7,1997.

on appelle **birapport** de x, y, a et b la quantité:

$$\operatorname{br}(x, y; a, b) := \frac{ax}{ay}.\frac{yb}{xb}.$$

Il est nécessaire de préciser quelle est l'intersection de $\Delta(x, y)$ avec C qu'on appelle a, car

$$\operatorname{br}(x, y; a, b) = \operatorname{br}(x, y; b, a)^{-1} = \operatorname{br}(y, x; a, b)^{-1}.$$

On décide donc que a, b sont choisis de telle manière que, si on prend un point $p \in \Delta(x, y)$ qui n'est ni dans $[a, b]$, ni dans $[x, y]$, alors soit a et x sont plus près de p que b et y respectivement, soit au contraire b et y sont plus près de p que a et x. La **distance de Hilbert** entre x et y est alors définie classiquement par:

$$d_H(x, y) = -\frac{1}{2}\log(\operatorname{br}(x, y; a, b)).$$

Il est élémentaire et bien connu (mais non trivial, cf. [7], exercice 6.8.14) que d_H définit sur C une métrique finslerienne dont les géodésiques sont précisément les segments de l'intérieur de C (pour la structure usuelle de $\mathbb{R}^n$). Comme le birapport de quatre points est un invariant projectif, la métrique de Hilbert est elle aussi projectivement invariante.

Le résultat classique suivant va nous servir de point de départ:

Proposition 1.1. *Si C est la boule unité B_1 de $\mathbb{R}^n$, alors d_H est une métrique hyperbolique (c'est à dire riemannienne et à courbure constante -1) complète.*

En d'autres termes, on a retrouvé le modèle projectif classique de H^n, et on dispose en plus directement de la distance entre deux points. La preuve de cette proposition est rappelée dans la Section 2.

On peut aussi considérer ∂B_1 non pas comme le bord d'un convexe de $\mathbb{R}^n$, mais comme une quadrique. Il devient alors naturel de définir la métrique de Hilbert non plus seulement entre deux points de B_1, mais aussi entre deux points $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus B_1$: en effet, il suffit de complexifier la droite Δ passant par x et y pour obtenir une droite complexe $\overline{\Delta}(x, y) \subset \mathbb{C}^n$ qui rencontre encore la quadrique complexifiée de ∂B_1 en deux points. Comme on pouvait s'y attendre, la "distance" ainsi construite correspond essentiellement à celle de l'espace de Sitter S^n_1, qui est l'espace lorentzien simplement connexe à courbure constante 1.

En fait, on peut ainsi définir la métrique de Hilbert même entre un point de B_1 et un point de $\mathbb{R}^n \setminus B_1$. On obtient donc une "distance" à valeurs dans $\mathbb{C}/\pi i\mathbb{Z}$, qui est définie pour tout couple de points de $\mathbb{R} \setminus \partial B_1$.

On appellera espace **hyperbolique-de Sitter**, et on notera HS^n, l'espace qu'on obtient en mettant sur $\mathbb{R}^n \setminus \partial B_1$ cette distance de Hilbert, qu'on notera encore d_H (la définition, dans la Section 2, est en fait légèrement différente). HS^n a une notion naturelle de géodésiques (ce sont simplement les restrictions des géodésiques de $\mathbb{R}^n$) et donc de polyèdres. L'objet de cet article est de montrer qu'on a dans cet espace des extensions naturelles de résultats bien connus dans le cas hyperbolique.

On peut considérer en particulier les polyèdres de HS^3; la "distance" d_H y définit par restriction une structure "métrique", c'est à dire une distance complexe définie entre deux points assez proches (cf. la Section 2). Nous appellerons **immersion polyèdrale** de la sphère S^2 dans HS^3 une application continue d'un polyèdre P homéomorphe à S^2 dans HS^3 qui envoie chaque 2-faces dans un 2-plan totalement géodésique de HS^3. Nous allons caractériser les "métriques" induites par ces "immersions polyèdrales", et montrer des résultats d'existence et d'unicité pour les réalisations de ces métriques. On obtiendra en particulier un résultat, le théorème A, qui aura comme cas particuliers les trois résultats classiques suivants.

D'abord, les métriques induites sur les polyèdres convexes compacts de l'espace hyperbolique sont décrites par le:

Théorème 1.2 (Alexandroff [1]). *Soit σ une métrique sur S^2; σ est induite par une immersion polyèdrale convexe de S^2 dans H^3 si et seulement si:*

- *σ est à courbure constante -1 hors de n points singuliers $x_1, \cdots, x_n$;*
- *σ a des singularités coniques (c'est à dire à courbure singulière positive) aux x_i.*

Cette immersion est alors un plongement, et est unique modulo $Isom(H^3)$.

On peut aussi décrire les polyèdres hyperboliques compacts en terme de leur métrique duale (cf. la Section 3 pour la définition de cette métrique duale); on obtient le:

Théorème 1.3 (Andreev [2], Rivin, Hodgson [18], [12]). *Soit σ une métrique sur S^2; σ est la métrique duale d'un polyèdre convexe compact P de H^3 si et seulement si:*

- *σ est à courbure constante 1 en dehors de N points $x_1, \cdots, x_N$;*
- *les courbures singulières aux sommets $x_1, \cdots, x_N$ sont strictement négatives;*
- *σ n'a pas de géodésique fermée de longueur $L \leq 2\pi$.*

Enfin, il existe un résultat analogue pour les polyèdres idéaux (la définition du dual d'un polyèdre se trouve aussi dans la Section 3):

Théorème 1.4 (Andreev [3], Rivin [21], [20]). *Soit P un polyèdre homéomorphe à S^2 muni, pour chacune de ses arêtes e, d'un poids $w(e) \in \mathbb{R}$. Alors il existe une immersion polyèdrale, convexe et idéale du polyèdre P^* dual de P dans H^3 dont l'angle dièdre en chaque arête e est $w(e)$ si et seulement si:*

1. *pour chaque arête e, $0 < w(e) < \pi$;*
2. *si $e_1, \cdots, e_k$ forment le bord d'une face de P, alors*
$$w(e_1) + \cdots + w(e_k) = 2\pi;$$
3. *si $e_1, \cdots, e_k$ forment un circuit plongé simple qui ne borde pas de face de P, alors*
$$w(e_1) + \cdots + w(e_k) > 2\pi.$$

Notons que, par dualité, les deux derniers théorèmes peuvent s'écrire comme des énoncés sur les métriques induites sur les polyèdres convexes de S^3_1, avec des points "à l'infini" pour le dernier.

Pour étendre ces résultats, on considère les polyèdres convexes dans le revêtement à deux feuillets de HS^3, qu'on note $\tilde{\mathrm{HS}}^3$. $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ est donc "composé" d'une copie de S^3_1 et de deux copies de H^3, qu'on note respectivement H^3_+ et H^3_-. Notons P un tel polyèdre, et supposons que P borne un domaine convexe qui rencontre H^3_+, mais pas H^3_- — c'est le cas dans les situations correspondant aux trois théorèmes ci-dessus.

La "métrique" σ induite sur P par la distance d_H de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ est, sur chaque face de P, modelée sur celle de H^2, de S^2_1, ou sur celle de $(S^2, -\mathrm{can})$. On définira dans la Section 4 des "métriques HS" qui décrivent ce type d'objets. De plus, la convexité de P en ses sommets imposera des conditions "de convexité" (définition 4.1) aux "points singuliers" de σ.

Il faut noter que certaines arêtes de P joueront un rôle particulier. Ce sont des arêtes de type espace bordant des faces de type mixte (modelées sur S^2_1) de σ, qui peuvent se voir comme des faces de type espace dégénérées: celles qui bordent deux faces de P dont les prolongements en des hémisphères rencontrent H^3_+. On les appellera arêtes **A-extrémales** (Section 4); on peut les considérer comme des limites de faces de type espace entre deux faces de type mixte. De même, certains sommets jouent un rôle particulier: ce sont ceux qui sont dans la partie S^3_1 de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$, mais qui ne sont l'extrémité d'aucun segment de type espace sur P. Ils ont la particularité (lisible dans la métrique induite sur P) que tous les segments géodésiques qui en sont issus sont de type espace. On notera S_A l'ensemble de ces sommets. Ils peuvent aussi être vus comme des faces de type espace "dégénérées" en des points.

Finalement, on définira aussi une classe de courbes, appelées "**A-admissibles**", qui seront essentiellement des géodésiques des faces de type espace de σ qui peuvent aussi suivre des arêtes A-extrémales. On aura alors le résultat suivant, qui paraphrase le Théorème A:

Théorème A′. *Soit σ une métrique HS sur un polyèdre P homéomorphe à S^2, et A un ensemble d'arêtes de type espace de P pour σ bordant des faces de type mixte. Notons E la réunion des faces de type espace de P pour σ et des éléments de A et de S_A, et H l'ensemble des points hyperboliques de σ. Il existe une réalisation polyèdrale convexe de P dans $\tilde{HS}^3$, qui délimite un convexe qui rencontre H^3_+ mais pas H^3_-, et dont les arêtes A-extrémales sont les éléments de A, si et seulement si:*

1. *σ est "convexe" en ses points singuliers;*
2. *chaque géodésique maximale de type temps de σ dans le complémentaire de E a une extrémité sur E et une sur H;*
3. *les courbes A-admissibles fermées de σ sont de longueur strictement plus grande que 2π.*

On verra dans la Section 4 pourquoi ce résultat entraîne les trois théorème précédents. Il est par exemple clair que les arêtes A-extrémales apparaissent dans le Théorème 1.4. On donnera aussi d'autres applications de ce résultat.

La Section 2 contient la construction à laquelle on a fait allusion pour ∂B_1, dans un cadre un peu plus général; on obtient ainsi les espaces "hyperboliques-de Sitter" HS^n_k dans lesquels on reconnait tous les espaces pseudo-riemanniens à courbure constante non nulle. On trouve aussi, grâce à la distance de Hilbert, une définition très simple de la dualité entre points et hyperplans qui est classique au moins pour le couple formé de H^n et de S^n_1. On utilise ensuite cette dualité pour définir certaines notions d'angle de façon naturelle. La Section 3 développe quelques propriétés de cette dualité.

On aura alors les notions nécessaires pour énoncer, dans la Section 4, les principaux résultats sur les métriques induites sur les poyèdres convexes dans HS^3. Ces résultats sont obtenus par une méthode de déformation; on introduit un opérateur qui à une famille de points associe la métrique induite sur le bord de leur enveloppe convexe; son injectivité locale provient de la Section 5, sa propreté de la Section 6; enfin, le caractère nécessaire des conditions obtenues est en relation avec les Sections 7 et 8, et l'unicité globale est montrée en considérant des métriques particulières, qui ne peuvent avoir qu'une seule image réciproque (Section 10).

La Section 5 est donc consacrée à l'extension aux espaces HS^n_k d'une construction remarquable de Pogorelov, qui permet de montrer des équivalences entre des problèmes de rigidité pour les polyèdres dans les différents espaces à courbure constante non nulle. Nous montrons en particulier que l'existence de cette application de Pogorelov est une conséquence directe de l'existence des modèles projectifs pour les espaces pseudo-riemanniens à courbure constante. Cette construction est utilisée pour démontrer qu'un polyèdre convexe de HS^n_k ($n \geq 3$) est infinitésimalement rigide, c'est à dire qu'il n'admet pas de déformation infinitésimale non triviale qui laisse invariante sa métrique induite.

Dans la Section 6, on étudie les dégénérescences de suites de polyèdres convexes de codimension 1 de HS^{n+1} dont les métriques induites convergent vers une limite σ. On y montre que les dégénérescences imposent des conditions fortes sur σ, qui doit admettre une hypersurface polyèdrale "géodésique" — en un sens qu'on définit — isométrique, pour la métrique induite, à une sphère canonique.

Dans les Sections 7 et 8, on étudie en détail les propriétés des métriques induites sur les polyèdres convexes des espaces HS^{n+1}. D'une part, la convexité d'un polyèdre impose en chacun de ses sommets des conditions sur sa métrique induite, qui dépendent de la signature de la métrique sur les faces adjacentes; d'autre part, certaines courbes tracées sur le polyèdres ont, quand on les voit dans HS^{n+1}, des propriétés de "convexité" qui leur imposent des conditions de longueur.

La Section 9 contient des propriétés d'un espace de métriques particulier, qui interviennent ensuite dans la Section 10 pour établir les résultats de la Section 4.

Certaines propriétés des polyèdres convexes des espaces HS^n_k sont complètement passés sous silence ici; par exemple, on peut montrer ([25], appendice A) qu'ils ont naturellement un "volume" complexe qui étend la notion usuelle de volume des polyèdres hyperboliques. On le montre en utilisant essentiellement la formule de Schläffli et le théorème de Gauss-Bonnet, ainsi que des considérations analytiques très bien adaptées dues à Aomoto [4].

Le travail présenté ici a pour origine des conversations avec François Labourie et Igor Rivin; leur influence a été importante. J'ai aussi bénéficié de conversations éclairantes avec Boris Okun et Abdelghani Zeghib. Je tiens à tous les remercier ici.

2. La métrique de Hilbert d'une quadrique

On va développer dans cette section les constructions auxquelles on a fait allusion dans l'introduction.

Dans toute la suite, pour $k \in \{0, \cdots, n\}$, on utilisera la notation $\mathbb{R}^n_k$ pour désigner $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire de signature $(n-k, k)$. Pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, on notera S^n_k l'espace obtenu comme

$$S^n_k := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_k \mid \langle x, x\rangle = 1\} \tag{1}$$

avec la métrique induite. C'est une variété simplement connexe, (sauf pour $k = n-1$, $\pi_1(S^n_{n-1}) = \mathbb{Z}$) et à courbure constante 1. S^n_n sera l'une des deux nappes de la même sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}_1$. De même, pour $n \geq k \geq 1$, on notera

$$H^n_k := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_{k+1} \mid \langle x, x\rangle = -1\} \tag{2}$$

avec la métrique induite. C'est une variété à courbure constante -1, qui est simplement connexe sauf pour $k = 1$. Enfin, $H^n_0 := H^n$. S^n_k et H^n_{n-k} ne diffèrent que par le signe de la métrique.

Nous utiliserons les modèles projectifs (des hémisphères) de ces espaces, qui sont obtenus de la manière suivante. Pour $0 \leq k \leq n-1$, (resp. $1 \leq k \leq n$) on appelle hémisphère supérieur de S^n_k (resp. H^n_k) l'ensemble $S^{n,+}_k$ (resp. $H^{n,+}_k$) des points x avec $x_{n+1} > 0$ dans (1) (resp. (2)). On appelle P_0 l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}_k$ (resp. $\mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$) d'équation $x_{n+1} = 1$, et on définit une application ϕ de $S^{n,+}_k$ (resp. $H^{n,+}_k$) dans P_0 en envoyant un point x sur l'intersection avec P_0 de la droite passant par x et par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}_k$ (resp. $\mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$). Comme (1) (resp. (2)) définit une hypersurface ombilique de $\mathbb{R}^{n+1}_k$ (resp. $\mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$), les géodésiques de S^n_k (resp. H^n_k) sont les traces des 2-plans de $\mathbb{R}^{n+1}_k$ (resp. $\mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$) passant par 0, et sont donc envoyées par ϕ sur les segments de l'image de ϕ pour la structure plate de P_0.

Prouvons maintenant la proposition concernant la métrique de Hilbert de la sphère unité:

Démonstration de la Proposition 1.1. On remarque que le modèle projectif usuel de H^n est invariant par les transformations projectives de $\mathbb{R}^n$ qui fixent la sphère unité Q^n, et il en est de même pour la métrique de Hilbert de cette sphère unité (car le birapport est projectivement invariant). Il suffit donc de montrer que la distance entre deux points d'une droite passant par 0 est la même pour les deux modèles, car les transformations projectives fixant Q^n agissent transitivement sur les droites de la boule unité D^n.

Or si x, y sont deux points d'abscisse $\eta < \nu$ sur une droite passant par 0, la définition même du modèle projectif de H^n par projection dans $\mathbb{R}^{n+1}_1$ montre que ces points sont à distance respectivement $\mathrm{argth}(\eta), \mathrm{argth}(\nu)$ de l'origine dans H^n.

Calculons par ailleurs leur distance pour la métrique de Hilbert: on a

$$\begin{aligned} d_H(x,y) &= -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(\eta,\nu;-1,1)) \\ &= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\eta+1}{\nu+1}.\frac{\nu-1}{\eta-1}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\nu-1}{\nu+1}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right) \\ &= \mathrm{argth}(\nu) - \mathrm{argth}(\eta). \end{aligned}$$

On obtient donc bien la même distance dans les deux cas. q.e.d.

Nous allons pouvoir étendre d_H à des couples de points à l'extérieur de Q^n, à condition d'utiliser les intersections complexes entre les droites de $\mathbb{R}^n$ et la sphère Q^n. Plus précisément, soient deux points x, y de $\mathbb{R}^n$; ils définissent une droite $\Delta(x,y)$, et on peut considérer la droite complexe $\overline{\Delta}(x,y)$ de $\mathbb{C}^n$ dont l'intersection avec $\mathbb{R}^n$ est $\Delta(x,y)$. Comme

Q^n est une quadrique, il existe une unique quadrique $\overline{Q}^n$ de $\mathbb{C}^n$ dont l'intersection avec $\mathbb{R}^n$ est Q^n, et elle rencontre $\overline{\Delta}(x,y)$ en deux points a,b qui sont confondus seulement si $\Delta(x,y)$ est tangente à Q^n.

Il faut ordonner (a,b); pour cela:

- soit a,b sont réels, et on les oriente comme dans l'introduction, en fonction de leur position par rapport à x et à y;
- soit a,b sont complexes conjugués, c'est à dire que $i(a-b)$ est parallèle à $\Delta(x,y)$, et on choisit a et b de manière que $i(a-b)$ soit orienté comme $y-x$.

On peut maintenant poser, comme on l'avait fait plus haut:

$$d_H(x,y) = -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(x,y;a,b)),$$

et on obtient un nombre complexe, défini modulo $i\pi$ (à cause du logarithme). Les propriétés de cette "distance" sont résumées dans la

Proposition 2.1. *Il existe une application $\phi : \mathbb{R}^n \setminus D^n \to S_1^{n,+}$ telle que pour $x,y \in \mathbb{R}^n \setminus D^n$, s'il existe une géodésique $G(x,y)$ de $Im(\phi)$ joignant $\phi(x)$ à $\phi(y)$, alors c'est $\phi(\Delta(x,y)\cap(\mathbb{R}^n \setminus D^n))$. De plus:*

- *si $\Delta(x,y)$ rencontre Q^n en deux points non confondus qui ne séparent pas x et y, alors $d_H(x,y) \in \mathbb{R}_-$, et $G(x,y)$ est de type temps et de longueur $|d_H(x,y)|$;*
- *si $\Delta(x,y)$ est tangente à Q^n, alors $d_H(x,y)=0$, et $G(x,y)$ est de type lumière;*
- *si $\Delta(x,y)\cap Q^n = \emptyset$, alors $d_H(x,y) \in i(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$, et $G(x,y)$ est de type espace et de longueur $|d_H(x,y)|$.*

Dans la dernière assertion, il faut comprendre qu'il existe un représentant $r \in i\mathbb{R}$ de $d_H(x,y)$ tel que la longueur de $G(x,y)$ soit égale à r. En d'autres termes, ϕ correspond au modèle projectif classique d'un hémisphère de S_1^n au signe de la métrique près: on trouve une "distance" imaginaire pure entre les points joints par une géodésique de type espace, et une distance réelle négative entre les points joints par une géodésique de type temps. A cause de cette différence de signe, la métrique qu'on construit se comportera pour certaines formules comme une variété à courbure -1; nous parlerons quand même de S_1^n et non de H^n_{n-1} pour respecter certaines habitudes, par exemple concernant la dualité entre H^n et S^n_1 qui fait son apparition plus loin.

La preuve de cette proposition peut se faire suivant le même principe que pour la Proposition 1.1; nous ne la donnons pas ici car ce sera presque un cas particulier du Théorème 2.3.

La définition qu'on a donnée de la distance d_H peut aussi s'étendre au cas où $x \in D^n$ et $y \in \mathbb{R}^n \setminus D^n$. On obtient alors une "distance" de la forme $i\pi/2 + r$, où $r \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, on peut continuer à parler de géodésique entre deux tels points — il suffit de considérer les géodésiques de $\mathbb{R}^n$.

Nous allons ensuite généraliser cette construction à d'autres quadriques; nous remplacerons $\mathbb{R}^n$ par le plan projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, et pour ce faire nous utiliserons le birapport entre quatre points x, y, a, b de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$. Pour le définir, on considère $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ comme l'espace des droites de $\mathbb{R}^2$, et on choisit une droite D de $\mathbb{R}^2$ ne passant pas par 0 et qui n'est parallèle à aucune des droites associées aux quatres points. On peut alors définir les intersections X, Y, A, B de x, y, a, b avec D, puis définir le birapport (projectif) de x, y, a, b comme le birapport de X, Y, A, B sur D. La même construction fonctionne bien entendu dans le cas complexe. Enfin, pour $x, y \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, on notera encore $\Delta(x, y)$ la droite (projective) joignant x et y, et $\overline{\Delta}(x, y)$ sa complexifiée. On peut alors donner la:

Définition 2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in \{0, 1, \cdots, n\}$ avec $p + q \leq n$. On note $Q^n_{p,q}$ la quadrique de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ d'équation homogène

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q+1} x_j^2 = 0.$$

On appellera espace **hyperbolique-de Sitter** d'indice (n, p, q), et on notera $\mathrm{HS}^n_{p,q}$, la variété ouverte $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus Q^n_{p,q}$ munie de la "distance":

$$\begin{array}{rcrcl} d_H & : & \mathrm{HS}^n_{p,q} \times \mathrm{HS}^n_{p,q} & \to & \mathbb{C}/(z \mapsto z + 2\pi i, z \mapsto i\pi - z), \\ & & (x, y) & \mapsto & -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(x, y; a, b)), \end{array}$$

où a, b sont les intersections de $\overline{\Delta}(x, y)$ avec $\overline{Q}^n_{p,q}$, la quadrique complexifiée de $Q^n_{p,q}$. On appellera géodésiques de $\mathrm{HS}^n_{p,q}$ les droites de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Pour $k \in \{0, \cdots, n\}$, on notera $\mathrm{HS}^n_k := \mathrm{HS}^n_{n-k,k}$, et $Q^n_k := Q^n_{n-k,k}$. Enfin on appellera espace hyperbolique-de Sitter de dimension n l'espace $\mathrm{HS}^n := \mathrm{HS}^n_0 = \mathrm{HS}^n_{n,0}$, et on notera aussi $Q^n := Q^n_0$.

Dans cette définition, on reprend l'ordre défini plus haut pour $\{a, b\}$. On appellera bien sur "sous-variétés totalement géodésiques", ou m-

plans, de $\mathrm{HS}^n_{p,q}$ les images dans $\mathrm{HS}^n_{p,q}$ des sous-variétés totalement géodésiques de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. On dira qu'un m-plan est non dégénéré quand il n'est pas tangent à $Q^n_{p,q}$ dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. On appellera aussi "non dégénérés" les $\mathrm{HS}^n_{p,q}$ pour lesquels $p+q=n$. Ce sont ces cas qui nous intéresseront principalement dans la suite.

On peut noter que cette définition, qui ne sera utilisée dans la suite que pour les quadriques de $\mathbb{R}^n$, peut s'étendre à d'autres cas, en particulier aux hypersurfaces algébriques de degré pair de $\mathbb{R}^n$. Ceci peut se faire de plusieurs manières essentiellement équivalentes, mais le plus simple est, étant donné deux points $x, y \in \mathbb{R}^n$ et un polynôme P de degré $2N$ à n variables, de classer par paires les $2N$ intersections de la droite $\overline{\Delta}(x,y)$ avec l'hypersurface $P=0$ de $\mathbb{C}^n$: chaque paire est constituée soit de deux points complexes conjugués, soit de deux points réels successifs sur la droite réelle $\Delta(x,y)$. Puis on somme les distances d_{HS} obtenues pour chacune des paires de solutions suivant la formule utilisée pour les quadriques. Il est alors facile de voir que si on considère une hypersurface (algébrique de degré pair) convexe, on trouve une distance complexe dont la partie réelle est exactement la métrique de Hilbert "usuelle" des convexes de $\mathbb{R}^n$.

On utilisera aussi le revêtement à deux feuillets $\tilde{\mathrm{HS}}^n_{p,q}$ de $\mathrm{HS}^n_{p,q}$ qu'on obtient en passant de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ à S^n: si $x, y \in \tilde{\mathrm{HS}}^n_{p,q}$ sont antipodaux, on fixe $d_H(x,y) = i\pi$. Sinon, on choisit un hémisphère Ω de $\mathrm{HS}^n_{p,q}$ contenant x et y; on note $\overline{x}, \overline{y}$ les images de x, y par l'application projective de Ω sur $\mathbb{R}^n$. Si le segment de Ω qui joint $\overline{x}$ à $\overline{y}$ rencontre au plus une fois $Q^n_{p,q}$, on définit $d_H(x,y)$ par la distance de Hilbert entre $\overline{x}$ et $\overline{y}$ suivant la même formule que dans 2.2, mais sans quotienter par $z \mapsto i\pi - z$. Sinon, on définit $d_H(x,y)$ comme $i\pi - d_H(\overline{x}, \overline{y})$, toujours sans quotienter par $z \mapsto i\pi - z$. On obtient donc une "distance" à valeur dans $\mathbb{C}/i\pi\mathbb{Z}$, qui est indépendante du choix de Ω car le birapport est projectivement invariant. On note de même $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$, $\tilde{\mathrm{HS}}^n$ les revêtements à deux feuillets obtenus pour HS^n_k, HS^n, etc.

La définition 2.2 permet de trouver des distances sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus Q^n_k$ correspondant aux modèles projectifs des hémisphères des différents espaces pseudo-riemanniens à courbure constante (sauf pour H^n, qu'on retrouve dans sa totalité). Plus précisément, pour $k \leq n-1$, on note $\overline{S}^n_k$ le quotient de S^n_k par l'application antipodale, et pour $k=n$, on pose simplement $\overline{S}^n_n = H^n$; et on note $\overline{H}^n_k$ le quotient de H^n_k par l'application antipodale, sauf pour $k=0$ où on note $\overline{H}^n_0 = H^n$. Enfin, on note D^n_k la composante connexe de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus Q^n_k$

qui contient la direction $(0x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, et $\overline{D}_k^n$ l'autre. On a alors l'analogue suivant des Propositions 1.1 et 2.1:

Théorème 2.3. *Il existe des applications $\phi : D_k^n \to \overline{H}_k^n$ et $\overline{\phi} : \overline{D}_k^n \to \overline{S}_{k+1}^n$ bijectives telle que, pour $x, y \in D_k^n$ (resp. $\overline{D}_k^n$) distincts, l'unique géodésique $G(x,y)$ de $\overline{H}_k^n$ (resp. $\overline{S}_{k+1}^n$) joignant $\phi(x)$ et $\phi(y)$ (resp. $\overline{\phi}(x)$ et $\overline{\phi}(y)$) est $\phi(\Delta(x,y) \cap D_k^n)$ (resp. $\overline{\phi}(\Delta(x,y) \cap \overline{D}_k^n)$). De plus:*

- *si $\Delta(x,y)$ rencontre Q_k^n en deux points non confondus, alors $d_H(x,y) \in \mathbb{R}$ et $G(x,y)$ est de type espace (resp. temps) et de longueur $|d_H(x,y)|$.*
- *si $\Delta(x,y)$ est tangente à Q_k^n, alors $d_H(x,y) = 0$, et $G(x,y)$ est de type lumière.*
- *si $\Delta(x,y) \cap Q_k^n = \emptyset$, alors $d_H(x,y) \in i(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$, et $G(x,y)$ est de type temps (resp. espace) et de longueur $|d_H(x,y)|$.*

Démonstration. On va donner la démonstration pour la composante $\overline{H}_k^n$, la preuve dans $\overline{S}_{k+1}^n$ est similaire. De plus, on supposera $k > 0$ pour éviter de traiter séparément le cas de H^n (qui correspond à la Proposition 1.1).

Soient x, y deux points distincts de $\overline{H}_k^n$. Il est classique qu'il existe un unique segment géodésique plongé qui les joint. De plus, on peut identifier $\overline{H}_k^n$ privé d'une hypersurface totalement géodésique avec:

$$M := \{x \in \mathbb{R}_{k+1}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1\}$$

pour le produit scalaire de $\mathbb{R}_{k+1}^{n+1}$, et ses géodésiques sont alors ses intersections avec les 2-plans de $\mathbb{R}_{k+1}^{n+1}$ passant par 0. L'application ϕ sera l'inverse de l'application de l'hypersurface M sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ qui envoie un point $m \in M$ sur la droite de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par m et par l'origine. Ainsi, les images des géodésiques de $\overline{H}_k^n$ sont exactement les intersections avec D_k^n des géodésiques de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Il reste donc seulement à montrer que les longueurs de ces segments sont donnés par d_H.

Considérons d'abord le cas où $G(x,y)$ est de type espace. Le plan Π de $\mathbb{R}_{k+1}^{n+1}$ contenant 0 et $G(x,y)$ est alors de signature $(+,-)$ et on peut supposer (quitte à changer de système de coordonnées) que c'est le plan $(0x_1x_{n+1})$, avec x, y dans le demi-plan $\{x_{n+1} > 0\}$. On vérifie alors que les coordonnées de x, y dans le système (x_1, x_{n+1}) sont de la forme $(\mathrm{sh}(\eta), \mathrm{ch}(\eta))$ et $(\mathrm{sh}(\nu), \mathrm{ch}(\nu))$, la longueur du segment entre x et y étant alors $|\eta - \nu|$.

On peut par ailleurs calculer $d_H(x,y)$ en projetant la droite $\Delta(x,y) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ sur la droite de Π d'équation $x_{n+1}=1$. Les coordonnées de a,b sont alors déterminées par l'équation:

$$x_1^2 - x_{n+1}^2 = x_1^2 - 1 = 0$$

et sont donc -1 et 1. Par ailleurs, x et y se projettent sur les points de coordonnées $\tanh(\eta), \tanh(\nu)$; on a donc, en supposant $\eta < \nu$:

$$\begin{aligned}
d_H(x,y) &= -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(-1,1;\tanh(\eta),\tanh(\nu))) \\
&= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\tanh(\eta)+1}{\tanh(\nu)+1}.\frac{1-\tanh(\nu)}{1-\tanh(\eta)}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\tanh(\eta)}{1-\tanh(\eta)}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\tanh(\nu)}{1-\tanh(\nu)}\right) \\
&= \eta - \nu;
\end{aligned}$$

d'où le résultat quand $G(x,y)$ est de type espace.

Si $G(x,y)$ est de type temps, Π est de signature $(-,-)$ et on peut supposer, quitte à changer de système de coordonnées, que $\Pi = (0, x_n, x_{n+1})$, avec x,y dans le demi-plan $x_{n+1} > 0$. Alors x,y ont pour coordonnée $(\cos(\eta),\sin(\eta))$ et $(\cos(\nu),\sin(\nu))$ avec $\eta,\nu \in]0,\pi[$, la longueur du segment joignant x à y étant $|\eta-\nu|$. On peut par ailleurs calculer $d_H(x,y)$ par projection sur la droite de Π d'equation $x_{n+1}=1$, et les coordonnées de a,b sont obtenues par résolution de

$$-x_n^2 - x_{n+1}^2 = -x_n^2 - 1 = 0$$

et ce sont donc i et $-i$, alors que x,y se projettent en $\mathrm{tg}(\eta), \mathrm{tg}(\nu)$. Ainsi, toujours si $\eta < \nu$:

$$\begin{aligned}
d_H(x,y) &= -\frac{1}{2}\log(\mathrm{br}(i,-i;\mathrm{tg}(\eta),\mathrm{tg}(\nu))) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathrm{tg}(\eta)+i}{\mathrm{tg}(\nu)+i}.\frac{i-\mathrm{tg}(\nu)}{i-\mathrm{tg}(\eta)}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+i\mathrm{tg}(\eta)}{1-i\mathrm{tg}(\eta)}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+i\mathrm{tg}(\nu)}{1-i\mathrm{tg}(\nu)}\right) \\
&= -\mathrm{argth}(i\mathrm{tg}(\eta)) + \mathrm{argth}(i\mathrm{tg}(\nu)) \\
&= -i(\eta-\nu),
\end{aligned}$$

d'où le résultat quand $G(x,y)$ est de type temps.

Enfin, quand $G(x,y)$ est de type lumière, Π est dégénéré, et a,b sont confondus, ce qui montre que $d_H(x,y) = 0$ comme prévu. q.e.d.

De la même manière, les espaces $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ sont composés d'une copie de H^n_k et d'une copie de S^n_k (sans quotient par l'application antipodale) sauf pour $k = 0$ (resp. $k = n$) où deux copies de $H^n_0 = H^n$ (resp. S^n_n) apparaissent. Ainsi, $\tilde{\mathrm{HS}}^n$ est composé d'une copie de S^n_1 et de deux copies de H^n, qu'on notera H^n_+ et H^n_- pour les distinguer.

Si H est un p-plan totalement géodésique de HS^n_k, on vérifie facilement que la restriction de d_H à H correspond à la distance de Hilbert de la quadrique intersection de Q^n_k avec H; H est donc isométrique à un $\mathrm{HS}^p_{r,s}$. Ainsi, si P est un polyèdre dans HS^n_k, P a une "métrique induite" qui est la donnée, pour chaque p-face, d'une immersion dans l'intérieur d'un polyèdre d'un $\mathrm{HS}^p_{r,s}$, avec des conditions de compatibilité évidentes. Nous appellerons dans la suite cette structure une **métrique de type HS** sur P.

3. Dualité

Nous disposons maintenant d'une "distance" sur HS^n_k qui est définie même pour les couples de points (x,y) avec $x \in D^n_k$ et $y \in \overline{D}^n_k$; dans ce cas, on a $\mathrm{br}(x,y;a,b) \in \mathbb{R}_-$, et $d_H(x,y)$ est donc de la forme $i\pi/2 + r$, avec $r \in \mathbb{R}$. Cette distance permet de retrouver différentes sortes de dualités classiques. Ainsi:

Définition 3.1. Soit $n \geq k \geq 0$, et $x \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Si $x \notin Q^n_k$, on appellera **dual** de x l'hyperplan totalement géodésique de HS^n_k composé des points y tels que $d_H(x,y) = i\pi/2$; et si $x \in Q^n_k$, le dual de x sera l'hyperplan de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ tangent à Q^n_k en x. Réciproquement, si H est un hyperplan totalement géodésique de HS^n_k non tangent à Q^n_k, son dual sera l'unique point x de HS^n_k tel que $d_H(x,y) = i\pi/2$ pour tout $y \in H$; et si H est tangent à Q^n_k, son dual sera son point de tangence avec Q^n_k.

Le choix du dual d'un hyperplan tangent à Q^n_k assure la continuité de l'application de dualité. Il est implicite dans cette définition que l'ensemble des points à distance $i\pi/2$ d'un point x_0 fixé de HS^n_k est un hyperplan totalement géodésique; pour le voir, on se place dans l'hyperplan P d'équation $x_{n+1} = 1$ dans la définition 2.2, ce qui fournit un modèle de HS^n_k privé d'un hyperplan P_0 comme complémentaire d'une quadrique Q' symétrique par rapport à l'origine. En faisant agir une isométrie de HS^n_k, on peut supposer que x_0 est à l'origine. Mais pour $y \in P \setminus Q'$, $d_H(x_0, y) = i\pi/2$ si et seulement si $\mathrm{br}(x_0, y; a, b) = -1$, où a, b sont les intersections de $\overline{\Delta}(x_0, y)$ avec la complexifiée de Q'. Comme Q' est symétrique autour de x_0, a, b sont aussi disposés de manière symétrique et on vérifie alors qu'on a jamais $\mathrm{br}(x_0, y; a, b) = -1$ sur $\overline{\Delta}(x_0, y)$, et que, en revenant dans le modèle de HS^n_k dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, y doit être dans l'hyperplan P_0. Réciproquement, on vérifie facilement que $d_H(x_0, y) = i\pi/2$ pour $y \in P_0$.

Dans les cas dégénérés (c'est à dire dans les $\mathrm{HS}^n_{p,q}$ avec $p + q < n$) la dualité que nous avons définie est moins claire; elle n'est plus définie pour tous les hyperplans, et n'est pas non plus injective sur les points.

Une fois la dualité définie pour les points et pour les hyperplans, on peut la définir pour les autres sous-variétés totalement géodésiques: ainsi, si V est une telle sous-variété de dimension p, on appellera **duale** de V la sous-variété totalement géodésique V^* qui est définie soit comme l'intersection des hyperplans duaux aux points de V, soit comme l'ensemble des points duaux des hyperplans qui contiennent V, soit encore (dans le cas où V est non dégénérée) comme l'ensemble des points de HS^n_k qui sont à distance $i\pi/2$ de tous les points de V.

Notons maitenant que, si $x \in \mathrm{HS}^n_k$, il est naturel de mettre sur l'espace des direction de $T_x\mathrm{HS}^n_k$, soit $P_x\mathrm{HS}^n_k := (T_x\mathrm{HS}^n_k \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$, une structure $\mathrm{HS}^{n-1}_{k'}$, avec $k' = k - 1$ si $x \in \overline{D}^n_k$, et $k' = k$ si $x \in D^n_k$: si $u, v \in P_x\mathrm{HS}^n_k$ ne sont pas dégénérées (c'est à dire que les géodésiques dirigées par u, v ne sont pas tangentes à Q^n_k) alors on définit u', v' comme les points intersections de l'hyperplan x^* dual de x avec les géodésiques dirigées par u, v, puis on définit (encore) $d_H(u, v)$ comme la distance $d_H(u', v')$ dans x^*. $(-i)d_H(u, v)$ étend l'angle "usuel" entre u et v quand u et v engendrent un 2-plan sur lequel la métrique est définie positive ou définie négative.

Si P est un polyèdre de HS^n_k, et si f est une p-face non dégénérée de P, on a donc une métrique HS naturelle sur le link L de P en f, c'est à dire le polyèdre de dimension $n-2-p$ dont les $(n-2-p)$-faces sont les directions normales à f qui sont dans les $(n-1)$-faces de P contenant f, etc. Par exemple, si f est un sommet de P, les $(n-2)$-faces de L sont modelées sur des hyperplans:

- soit de HS^{n-1}_k si $x \in \overline{D}^n_k$, elles sont alors modelées sur $\mathrm{HS}^{n-2}_{k-1}, \mathrm{HS}^{n-2}_k$ ou $\mathrm{HS}^{n-2}_{n-k-2,k-1}$;
- soit de HS^{n-1}_{k-1} si $x \in D^n_k$, les modèles sont alors $\mathrm{HS}^{n-2}_{k-2}, \mathrm{HS}^{n-2}_{k-1}$ ou $\mathrm{HS}^{n-2}_{n-k-1,k-2}$.

En particulier, il est facile de vérifier que P est convexe si et seulement si les links de toutes ses p-faces le sont. Si s est un sommet de P, on dira que P est dégénéré en s si P est, localement au voisinage de s, inclus dans la réunion de deux hyperplans; on voit facilement que c'est le cas si et seulement si le link de P en s est composé de deux hémisphère.

On peut aussi définir (cf. [12]) le **dual de** P; c'est un polyèdre P^* dont la combinatoire est définie à partir de celle du dual de P de la manière suivante:

- les p-faces de P^* sont les $(n-1-p)$-faces de P;
- une p-face f de P^* est dans le bord d'une $(p+1)$-face f' si f, vue comme $(n-1-p)$-face de P, contient la $(n-2-p)$-face f' dans son bord.

La réalisation de P comme polyèdre dans HS_k^n induit en plus sur P^* une métrique de type HS: sur une face f, c'est la métrique naturelle sur l'ensemble des directions normales aux hyperplans de support de P en f. On vérifie que cette définition est compatible avec la combinatoire de P^*, c'est à dire que les applications de restrictions entre les faces induisent des métriques compatibles. Par exemple, les longueurs des arêtes de P^* sont simplement (à un coefficient i près) les angles dièdraux entre les faces de dimension maximale de P.

Les principales propriétés de cette dualité sont résumées dans la proposition suivante:

Proposition 3.2. *Soit P un polyèdre convexe de HS_k^n. Notons $\overline{P}$ le polyèdre dont les p-faces sont les duaux dans HS_k^n des $(n-1-p)$-faces de P. Alors $\overline{P}$ est un polyèdre convexe de HS_k^n, isométrique pour sa métrique induite au polyèdre P^* dual de P.*

La démonstration de cette proposition est une conséquence assez facile des définitions. L'analogue régulier est plus délicat:

Proposition 3.3. *Soit $\phi : \Sigma \rightarrow HS_k^n$ une immersion régulière d'une hypersurface dans HS_k^n, et $\tilde{\phi}$ l'application duale, qui envoie un $x \in \Sigma$ sur le dual de l'hyperplan de HS_k^n tangent à $\phi_*(T_x\Sigma)$. Alors $\tilde{\phi}$ est une immersion au voisinage des points où la troisième forme fondamentale de ϕ est non dégénérée, et ϕ est aussi l'immersion duale de $\tilde{\phi}$ en ces points; de plus, la métrique induite par $\tilde{\phi}$ coincide avec la troisième forme fondamentale de ϕ.*

Démonstration. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} D: & \Sigma\times\Sigma & \to & \mathbb{C}, \\ & (x,y) & \mapsto & (d_H(\phi(x),\tilde{\phi}(y)))^2 \end{array}$$

obtenue en choisissant un représentant dans $\mathbb{C}$ pour $d_H(\phi(x),\tilde{\phi}(y))$. Soit $x\in\Sigma$; $\tilde{\phi}(x)$ est dual à l'hyperplan tangent à $\phi(\Sigma)$ en $\phi(x)$, on en déduit que

$$\forall v\in T_x\Sigma,\ (T_{(x,x)}D)(v,0)=0. \tag{3}$$

Par ailleurs, par définition de la dualité, on a:

$$\forall y\in\Sigma,\ D(y,y)=(i\pi/2)^2,$$

et donc

$$\forall v\in T_x\Sigma,\ (T_{(x,x)}D)(v,v)=0,$$

ce qui montre avec (3) que

$$\forall v\in T_x\Sigma,\ (T_{(x,x)}D)(0,v)=0,$$

et l'hyperplan tangent à $\tilde{\phi}(\Sigma)$ en $\tilde{\phi}(x)$ est le dual de $\phi(x)$, ce qui montre que ϕ est l'application duale de $\tilde{\phi}$.

Pour la seconde assertion de l'énoncé, on suppose d'abord que la métrique induite par ϕ est non dégénérée. On note U le fibré sur HS^n_k des vecteurs unitaires; il est pourvu d'une connexion qui provient de celle de HS^n_k. Maintenant, si $(x,u)\in U$, il existe une unique géodésique g passant par x et dirigée par u, et un unique point $F(x,u)$ sur g tel que $d_H(x,F(x,u))=i\pi/2$.

Par ailleurs, il est clair que

$$T_{(x,u)}U=\{(v,w)\in(T_x\mathrm{HS}^n_k)^2\mid\langle w,u\rangle=0\},$$

et on peut vérifier directement que si $\langle v,u\rangle=0$ alors

$$\langle (T_{(x,u)}F)(v,w),(T_{(x,u)}F)(v,w)\rangle=\langle w,w\rangle. \tag{4}$$

En effet, on peut faire cette vérification en utilisant les isométries de HS^n_k pour se ramener au cas où, dans $\mathbb{R}^n_k$, $x=0$ et $u=(1,0,\cdots,0)$ ou bien $u=(0,\cdots,0,1)$, et il ne reste à effectuer qu'un calcul facile.

Revenons à ϕ, et notons $n(x)$ le vecteur normal à $\phi_*(T_x\Sigma)$ en $\phi(x)$. Alors $\tilde{\phi}(x)=F(\phi(x),n(x))$ par définition, et on déduit de (4) que la métrique induite par $\tilde{\phi}$ correspond à la variation de $n(x)$. Or la troisième forme fondamentale $I\!I\!I$ de ϕ est justement donnée par

$$I\!I\!I(v,w) = \langle \nabla_v n, \nabla_w n \rangle.$$

On en déduit que $I\!I\!I$ coincide avec la métrique induite de $\tilde{\phi}$. Dans le cas où la métrique induite par ϕ est dégénérée, le même résultat est obtenu par approximation locale de ϕ par une suite d'immersions induisant des métriques non dégénérées. q.e.d.

On a en fait retrouvé une dualité qui est classique, au moins dans certains cas; ainsi:

Exemple. Choisissons $k = n$; on pourrait d'ailleurs aussi prendre $k = -1$. Alors Q^n_n est vide, et on trouve pour d_H la distance usuelle sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (multipliée par i), c'est à dire la distance associée à la métrique canonique de S^n quotientée par l'application antipodale. Or on dispose sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ d'une dualité bien connue, dite "projective", qui associe à un hyperplan H l'unique point x obtenu en partant d'un point $y \in H$ et en parcourant une distance $\pi/2$ sur la géodésique normale à H en x. Il est facile de vérifier que cette dualité correspond à celle qu'on vient de définir.

Exemple. Prenons $k = 0$; on se place donc dans HS^n, qui est "composé" d'une part de H^n et d'autre part de $\overline{S}^n_1$. La dualité classique (voir par exemple [17]) entre H^n et S^n_1 est définie grâce aux modèles de ces deux espaces dans $\mathbb{R}^{n+1}_1$: à tout hyperplan H de H^n, on associe d'abord l'hyperplan $\overline{H}$ de $\mathbb{R}^{n+1}_1$ passant par 0 contenant H, puis la droite D qui lui est orthogonale; enfin le point dual de H est l'intersection de D avec S^n_1, qui est définie en fait dans $\overline{S}^n_1$. La même procédure associe un point de H^n à tout hyperplan de $\overline{S}^n_1$. Là encore, il est assez facile de voir que la dualité qu'on a construite en utilisant d_H correspond à celle-ci. Plus précisément, on voit facilement que si $x \in D^n_0 = H^n$ et $y \in \overline{D}^n_0 = \overline{S}^n_1$, alors $d_H(x,y) = i\pi/2 + r$, où r est la distance de x à l'hyperplan de H^n dual de y. Si on s'intéresse aux hyperplans orientés de H^n, la dualité usuelle peut lui associer un point de S^n_1 (et non plus de $\overline{S}^n_1$) et réciproquement.

Exemple. On peut généraliser l'exemple précédent pour obtenir une dualité entre $\overline{H}^h_k$ et $\overline{S}^n_{k+1}$ pour tous les $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ grâce aux modèles de ces espaces dans $\mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$. On vérifie encore que cette dualité correspond avec celle qu'on vient de définir dans HS^n_k.

Il existe d'ailleurs une autre manière de faire apparaître ces types de dualité dans un même contexte, basée sur une notion de dualité assez étrange pour certaines équations de type Monge-Ampère (cf. [23]). Mais l'approche que nous donnons ici est plus générale et beaucoup plus géométrique.

Cette notion de dualité permet de définir simplement l'angle entre deux hyperplans P et P' de HS^n_k (pour $n \geq 2$): ce sera simplement $-i$ fois la distance entre leurs duaux. Si par exemple P et P' sont deux hyperplans de HS^n qui rencontrent transversalement Q^n, on peut les considérer comme deux hyperplans de H^n, et il est facile de vérifier que, quand ils se rencontrent dans H^n, l'angle qu'on vient de définir correspond à l'angle usuel dans H^n. Par contre, si P et P' ne se rencontrent pas dans H^n, alors ils font un angle qui est simplement $-i$ fois la distance hyperbolique entre P et P'. En effet, il existe une géodésique γ de HS^n qui les rencontre tous deux orthogonalement; alors γ rencontre aussi leurs points duaux P^* et P'^*; ainsi la distance le long de γ entre P^* et P'^* est $d(P,P') + i\pi/2 + i\pi/2 = d(P,P')$, et l'angle entre P et P' est par définition $-i$ fois la distance hyperbolique entre eux.

Par contre, si on part de deux plans qui ne rencontrent pas Q^n, ils correspondent à des hyperplans de type espace dans $\overline{S}^n_1$; l'angle qu'on a défini est alors imaginaire pur, et il correspond à l'angle "hyperbolique" entre les deux plans.

On peut étendre d_H en une "distance" entre un point $x \in \mathrm{HS}^n_k$ et une sous-variété totalement géodésique $V \subset \mathrm{HS}^n_k$ non dégénérée (c'est à dire non tangente à Q^n_k dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$). Si $x \in V$, on pose $d_H(x,V) = 0$. Sinon, on considère deux cas: si $x \in V^*$, alors pour tout $y \in V$ on a $d_H(x,y) = i\pi/2$, et on pose $d_H(x,V) = i\pi/2$. Sinon, on vérifie facilement qu'il existe un unique segment géodésique plongé orthogonal à V et arrivant en x; on appelle y son intersection avec V, et on pose $d_H(x,V) := d_H(x,y)$. Il est facile de vérifier que cette construction permet de retrouver la définition usuelle de la distance entre un point et une sous-variété totalement géodésique, dans l'espace hyperbolique par exemple.

On en déduit par dualité la définition de l'angle entre deux sous-variétés totalement géodésiques non dégénérées V, V' de dimensions $p \leq p'$ telles que $V \cap V' \neq \emptyset$ et que $V, V' \subset W$, où W est une sous-variété totalement géodésique non dégénérée de dimension $p' + 1$. Pour ce faire, on se restreint à W, dans laquelle le dual de V' est un point x', et on pose: $\angle(V, V') := -id_H(x', V^*)$.

Une fois les angles définis par dualité, on peut les utiliser aussi dans les variétés pseudo-riemanniennes qui n'ont pas de dual. En effet, on vérifie facilement que l'angle entre deux hyperplans H, H' de HS^n_k qui se rencontrent en $x \in \mathrm{HS}^n_k$ ne dépend que de la position relative des tangents à H, H' dans l'espace plat $T_x\mathrm{HS}^n_k$. En conséquence, si (L, μ) est une variété pseudo-riemannienne de signature $(n-k, k)$, Σ, Σ' sont des hypersurfaces non dégénérées, et $x \in \Sigma \cap \Sigma'$, on peut encore définir l'angle entre Σ et Σ' en x: on considére les hyperplans H, H' de T_xM tangents à Σ, Σ', et on choisit une isométrie ϕ de T_xM sur $T_yS^n_k$, avec $y \in S^n_k$. Puis on définit $\angle_x(\Sigma, \Sigma')$ comme l'angle $\angle(\phi_*H, \phi_*H')$. Il est facile de voir que cette définition est indépendante du choix de y et de ϕ. La même approche fonctionne aussi pour des sous-variétés Σ, Σ' qui ne sont pas des hypersurfaces, sous des conditions analogues à celles dans HS^n_k (cf. ci-dessus).

Pour les hyperplans orientés, il est naturel de considérer la dualité dans le revêtement $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ de HS^n_k. A chaque hyperplan orienté P de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$, on associe sa projection $\overline{P}$ dans HS^n_k, qui est un hyperplan, puis le point $\overline{p}$ dual de $\overline{P}$; $\overline{p}$ a deux images réciproques dans $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$, et on prend l'une d'elle comme dual de P suivant son orientation. On vérifie sans mal qu'on peut définir ainsi globalement (c'est à dire pour tous les hyperplans orientés) une dualité qui a les mêmes propriétés que celle définie ci-dessus pour les hyperplans non orientés; les angles entre hyperplans orientés, encore définis comme $-i$ fois la distance entre les points duaux, sont maintenant définis modulo 2π et la transformation $\theta \mapsto 2\pi - \theta$. Nous utiliserons cette définition en particulier pour l'étude des polyèdres convexes, qui apparaissent naturellement comme orientés.

4. Résultats

Nous allons décrire dans cette section les "métriques" induites sur trois classes de polyèdres convexes de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$. Les démonstrations seront faites dans les sections suivantes, mais on explicitera ici quelques cas particuliers.

Il n'est pas possible d'étendre les résultats d'existence en dimension supérieure car, génériquement, une métrique sur un polyèdre de dimension n n'est induite (même au voisinage d'un sommet) par aucune immersion dans une $(n+1)$-variété à courbure constante. Mais des résultats de rigidité (Section 5) et de dégénérescences (Section 6) persistent.

Rappelons qu'une "métrique HS" sur S^2 est la donnée d'une triangulation de S^2 avec, pour chaque triangle, un plongement sur un triangle de $\mathrm{HS}^2_{p,q}$ (avec $p+q \leq 2$) et les conditions de compatibilité naturelles sur les arêtes. Les sommets de la triangulation seront alors appelés **points singuliers** de la métrique. Deux métrique HS sur S^2 sont **isométriques** s'il existe un homéomorphisme de S^2 qui envoie l'une sur l'autre (sans nécessairement préserver les triangulations associées). Les métriques HS seront toujours considérées dans la suite à isométrie près.

Si σ est une métrique HS sur S^2, on appellera **arêtes** de σ tous les segments joignant deux points singuliers de σ qui peuvent être une arête d'une triangulation adaptée à σ, c'est à dire les segments qui sont géodésiques pour la métrique qui se trouve de chaque coté. On note que, si P est un polyèdre de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$, les arêtes de P sont des arêtes de sa métrique HS induite.

Notons qu'on peut avoir deux types de faces dégénérées triangulaires, même si on suppose que les arêtes sont toutes de type espace. En effet, si T est une telle face et si les longueurs de ses arêtes sont ia, ib, ic alors:

- soit T ne contient pas le point singulier de la métrique de $\mathrm{HS}^2_{1,0}$ (c'est à dire le point de $Q^2_{1,0} \subset \mathrm{HS}^2_{1,0}$); dans ce cas, on a une égalité du type: $a = b+c$, et T est limite, en un sens qu'on précisera plus loin, de triangles sphériques dont l'aire tend vers 0;

- soit T contient le point singulier de $\mathrm{HS}^2_{1,0}$, et $a+b+c = 2\pi$. Les longueurs des arêtes de T sont alors celles d'un triangle sphérique dont les arêtes sont alignés, et dont l'intérieur est un hémisphère.

Dans le second cas, on dira que T a un point **hyperbolique** (les points singuliers de $\tilde{\mathrm{HS}}^2_{1,0}$ correspondant dans les réalisations polyèdrales de la métrique à l'intersection d'une face avec ∂H^3_+ ou ∂H^3_-).

Si P est un polyèdre de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$, on dira qu'une arête a de type espace de P est **A-extrémale** (resp. **B-extrémale**) si elle borde deux faces F, F' telles que, si on les prolonge en des hémisphère H, H' bordés par le prolongement de a, H et H' rencontrent $\overline{H}^3_+$ (resp. H, H' sont de type espace et la projection orthogonale de H sur H' est bijective).

D'une certaine manière, une arête A-extrémale correspond à une face de type espace dégénérée, et une arête B-extrémale à une face de type mixte réduite aussi à une arête.

Nous allons étudier les métriques HS sur S^2 munies d'un ensemble A d'arêtes de type espace (c'est à dire sur lesquelles la distance est imaginaire pure) dans des faces de type mixte (c'est à dire modelées sur HS^2) ou dégénérées (c'est à dire modelées sur $\mathrm{HS}^2_{1,0}$), et d'un ensemble B d'arêtes de type espace dans des faces de type espace (c'est à dire modelées sur $(S^2, -\mathrm{can})$). Plus loin, A et B apparaîtront comme les ensembles des arêtes A-extrémales et B-extémales des réalisations polyèdrales de σ.

Nous supposerons toujours que les arêtes de B ne rencontrent pas celles de A. Nous appellerons **métrique HS marquée** le triplet (σ, A, B). Pour un tel objet, on notera:

- H l'ensemble (ouvert) des points hyperboliques de S^2;
- S_A (resp. S_B) l'ensemble des points singuliers non hyperboliques s de σ tels que tous les segments géodésiques issus de s soient de type temps (resp. de type espace), et S l'ensemble des autres points singuliers non hyperboliques de σ;
- M la réunion des composantes non hyperboliques des faces fermées mixtes (c'est à dire modelées sur H^2_1) ou dégénérées (c'est à dire modelées sur $\mathrm{HS}^2_{1,0}$) de S^2, des arêtes de B et des points de S_B, privée des arêtes de A et des points de S_A;
- $D \subset M$ la réunion des faces dégénérées fermées, privée des arêtes de A et des points de S_A.
- E la réunion des faces fermées de type espace, des arêtes de A et des points de S_A, privée des arêtes de B et des points de S_B.

Ces définitions donnent une certaine stabilité. Par exemple, un polyèdre de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ peut avoir une face de type espace isolée (c'est à dire entourée de faces de M); si on déforme P dans $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ pour faire dégénérer cette face vers une arête, ce sera nécessairement une arête de A, et la "topologie" de E ne changera pas. Par contre, une arête de P qui est dans A peut être transformée, par une déformation de P dans $\tilde{\mathrm{HS}}^3$, en une arête dégénérée (de longueur $i\pi$) puis en une arête rencontrant H^3 (de longueur $i\pi - r$, $r > 0$).

Rappelons que la **courbure singulière** d'une métrique HS en un point singulier est définie comme 2π moins la somme des angles des faces en ce point. Alors

Définition 4.1. *Soit $s \in S^2$ un point singulier d'une métrique HS marquée (σ, A, B) sur S^2. On dira que (σ, A, B) est* **convexe** *en s si l'une des conditions suivantes est réalisée:*

1. *$s \in H$, et la courbure singulière de P en s est strictement positive;*
2. *s est dans l'intérieur de E, et la courbure singulière de P en s est strictement négative;*
3. *s est dans l'intérieur de M, et la somme des angles des faces de P en s est de la forme $2\pi + ir$, avec $r > 0$;*
4. *$s \in S_A$;*
5. *$s \in S_B$, $E \setminus \{s\}$ a deux composantes connexes au voisinage de s, et dans chacune la somme des angles est dans $[0, \pi[$, et $M \setminus \{s\}$ a deux composantes connexes, et dans chacune la somme des angles est dans $i\mathbb{R}_+$;*
6. *$s \in E \cap M \cap S$, $M \setminus \{s\}$ est connexe au voisinage de s et, si on note θ_i les angles en s des faces de M et θ'_j les angles en s des faces de E, on a*

$$\sum \theta_i = \pi - ir_1 \ , \quad \sum_j \theta'_j = r_2$$

   avec $r_1 \in \mathbb{R}, r_2 \geq 0$, et soit $r_1 > 0$, soit $r_2 < \pi$;

7. *$s \in E \cap M \cap S$, $M \setminus \{s\}$ n'est pas connexe au voisinage de s et, pour chaque composante connexe C de $M \setminus \{s\}$ au voisinage de s, la somme α des angles en s des faces de C est dans $\pi - i\mathbb{R}_+^*$, ou bien $\alpha = \pi$ et les faces de C sont toutes dégénérées; et la somme de tous les angles en s n'est pas 2π.*

Dans le dernier cas, on élimine donc la situation où, au voisinage de s, $M \setminus \{s\}$ a exactement deux composantes connexes, chacune composée uniquement de faces dégénérées.

Notons que dans les cas (5), (6) et (7), les conditions qui apparaissent sont des conditions de convexité en s de domaines (à bord) qui sont de type espace (la somme des angles doit alors être dans $[0, \pi[$) ou mixte (la somme doit alors être dans $\pi - i\mathbb{R}_+^*$).

Dans toute la suite, on appellera **courbe polyèdrale** dans un polyèdre une courbe continue et géodésique par morceaux. Soit γ une courbe polyèdrale de (S^2, σ); on dira que γ est **A-admissible** si

- γ reste dans E;
- en chaque sommet s de γ, les composantes connexes de $S^2 \setminus \gamma$ qui sont (entièrement) de type espace au voisinage de s sont concaves en s;
- γ ne borde pas un domaine de D sans point singulier de la métrique σ.

Par exemple, dans le cas d'une surface Σ munie d'une métrique polyèdrale riemannienne (définie négative), une courbe polyèdrale sera A-admissible si elle est composée de segments géodésiques en dehors des sommets de Σ et si, aux sommets de Σ, les sommes des angles des faces des deux cotés de la courbe sont au moins π. On retrouve donc les courbes polyèdrales géodésiques au sens usuel d'application localement minimisante. La troisième condition de la définition sert simplement à éliminer certains cas limite qu'il faudrait sinon traiter séparément.

Dans toute la suite, on considérera toujours (sauf quand on précisera le contraire) des métriques polyèdrale ayant au moins 3 points singuliers, et des polyèdres avec au moins 3 sommets. Les polyèdres à 2 sommets antipodaux se comportent de manière différente, en particulier du point de vue de la rigidité (Section 5).

On peut maintenant énoncer un résultat qui étend les énoncés classiques sur les métriques des polyèdres hyperboliques:

Théorème A. *Soit (σ, A, B) une métrique HS marquée sur S^2. Il existe un plongement polyèdral convexe ϕ de S^2 dans $\tilde{HS}^3 \setminus (\overline{H^3_-})$ qui induit σ, qui contient dans son intérieur un point de H^3_+, et dont les arêtes A-extrémales sont les éléments de A, si et seulement si:*

1. *$B = S_B = \emptyset$;*
2. *chaque courbe maximale de type temps de M a une extrémité sur E et une sur H;*
3. *σ est convexe en chacun de ses points singuliers;*
4. *les courbes A-admissibles de σ sont de longueur $|L| > 2\pi$.*

ϕ est alors unique modulo $Isom(\tilde{HS}^3)$.

Les courbes qui interviennent dans la deuxième conditions doivent être C^1; mais elles peuvent être réduites à un point dans un segment de B. Ainsi, par exemple, si (S^2, σ) est le doublé d'un disque convexe à bord géodésique par morceau muni d'une métrique localement modelée sur $(S^2, -\mathrm{can})$ sauf en des point singuliers où la courbure singulière est négative, et si B est composé des arêtes du bord du disque, alors la condition (2) n'est pas satisfaite; cette métrique est réalisable sur le bord d'un polyèdre convexe dans $\tilde{\mathrm{HS}}^3$, mais qui borde un domaine qui ne rencontre pas H^3_+, on est donc dans le champ d'application du Théorème B ci-dessous.

Voyons deux applications simples de ce résultat. On utilise une classe de polyèdres de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ qui contient les polyèdres hyperboliques compacts et ceux dont le volume est fini (voir [12]).

Définition 4.2. Un polyèdre P de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ est un polyèdre hyperbolique généralisé s'il ne rencontre pas H^3_- (resp. H^3_+) et si toutes ses arêtes rencontrent H^3_+ (resp. H^3_-).

On peut bien entendu étendre cette définition en dimension plus grande en remplaçant les arêtes par les faces de codimension 1. On a aussi une définition analogue dans HS^3, les polyèdres hyperboliques généralisés étant ceux qui admettent un relevé à $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ qui l'est. Le premier énoncé décrit les métriques HS induites sur les polyèdres hyperboliques généralisés:

Corollaire 4.3. *Soit (σ, A, B) une métrique HS marquée sur S^2. (σ, A, B) est induite par une immersion convexe hyperbolique généralisée ϕ dans $\tilde{HS}^3$ si et seulement si:*

1. *toutes les faces de σ sont modelées sur $\tilde{HS}^2$;*
2. *la courbure singulière aux points singuliers de type hyperbolique de σ est strictement positive;*
3. *deux points hyperboliques peuvent être joints par une courbe formée de points hyperboliques;*
4. *les points singuliers de type de Sitter de σ sont isolés: si γ est une arête qui relie deux tels points singuliers, alors γ a exactement un segment hyperbolique.*

ϕ est alors unique modulo $Isom(\tilde{HS}^3)$.

La condition (3) du Théorème 4.3 sert simplement à interdire les polyèdres ayant des sommets dans H^3_+ et dans H^3_-. Elle implique la condition “topologique” (2) du Théorème A. On voit d'ailleurs simplement que, dans les conditions du corollaire, on doit avoir $A = B = \emptyset$ (car aucune arête n'est de genre espace) et, commme il ne peut pas non plus y avoir de face de genre espace, on doit avoir $E = S_A$, et tous les points singuliers non hyperboliques de σ doivent être dans S_A. La conditions (2) du corollaire assure donc que les métriques considérées sont convexes en leurs points singuliers.

Cet énoncé permet de retrouver le Théorème d'Alexandroff 1.2 de l'introduction, qui correspond au cas où tous les sommets sont hyperboliques. Il y a une autre conséquence hyperbolique du corollaire 4.3, qui concerne les polyèdres complets (non compacts) de H^3 dont tous les bouts sont “cylindriques” au sens où il existe, pour chaque bout, un plan hyperbolique qui est orthogonal au prolongement de chaque face du bout.

Corollaire 4.4. *Soit σ une métrique hyperbolique complète à singularités coniques (à courbure singulière positive) sur S^2 privée de N points. Supposons que l'aire de chaque bout est infinie. Alors σ admet une unique réalisation comme métrique induite sur un polyèdre convexe complet plongé dans H^3 dont tous les bouts sont “cylindriques”.*

Dans cet énoncé, “convexe” s'entend dans un sens global: le polyèdre doit être le bord d'un domaine convexe de H^3.

Démonstration. Au voisinage de chacun des x_i, σ est une métrique hyperbolique (sans point singulier) complète; il existe donc un voisinage ouvert $\Omega_i \subset P$ de x_i tel que $(\Omega_i, \sigma_{|\Omega_i})$ soit isométrique au quotient du complémentaire $\overline{\Omega}_i$ d'un fermé F_i de H^2 par une translation t_i. Si on identifie H^2 à la composante hyperbolique de HS^2, t_i agit avec un point fixe y_i dans $\overline{S}^2_1$ et Ω_i est isométrique à un ouvert du quotient de HS^2 par t_i. Si on procède de même pour tous les x_j, on voit que (P, σ) est la partie hyperbolique d'un polyèdre $(\overline{P}, \overline{\sigma})$ muni d'une métrique de type HS dont les sommets extérieurs sont isolés. On applique alors le corollaire 4.3 à $(\overline{P}, \overline{\sigma})$ et on trouve le résultat. q.e.d.

En particulier, si σ est sans point singulier, on retrouve un résultat de I. Rivin (non publié): les métriques hyperboliques sur S^2 privée de N points peuvent être réalisées comme des métriques induites sur des polyèdres dont tous les sommets sont “en dehors” de H^3. I. Rivin (voir [19]) a aussi montré, par une autre méthode, que ces polyèdres hyperboliques généralisés sont uniquement déterminés par leur métrique induite.

On peut maintenant utiliser le Théorème A pour étudier les duaux des polyèdres hyperboliques. Les duaux des polyèdres hyperboliques compacts sont entièrement dans S^3_1; on trouve donc dans ce cas le Théorème 1.3. Les courbes fermées A-admissibles sont alors simplement les géodésiques fermées.

En fait, on peut considérer les duaux des polyèdres hyperboliques généralisés en dimension totale 3; il s'agit de polyèdres dont tous les sommets sont dans S^3_1 et dont toutes les arêtes sont de type espace. Par contre, les faces peuvent rencontrer H^3_+. On peut arriver dans ce cas à une description des métriques duales des polyèdres dont les sommets "de Sitter" sont trivalents.

Si maintenant on s'intéresse aux polyèdres de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ dont toutes les faces sont dégénérées (c'est à dire tangentes à $\tilde{Q}^3$ dans le modèle sphérique de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$), on trouve le Théorème 1.4. Cet énoncé découle du Théorème A parce que, comme on le vérifie facilement, les polyèdres duaux des polyèdres idéaux de H^3 ont toutes leurs faces dégénérées, et toutes leurs arêtes sont A-extrémales. Comme de plus les faces doivent être convexes, leurs métriques sont déterminées par les longueurs de leurs arêtes, sous la seule condition que la longueur du bord de chaque face soit 2π. Les métriques HS marquées possibles sont donc essentiellement déterminées par le choix et la longueur des arêtes de A. La condition (3) correspond à l'absence de courbe A-admisible fermée de longueur $|L| \leq 2\pi$.

Passons à des résultats sans traduction hyperbolique directe. Si (σ, A, B) est une métrique HS marquée sur S^2, on dira qu'une courbe polyèdrale γ est **B-admissible** si:

- γ est de type espace;
- chaque segment de γ est soit une arête de B, soit dans l'adhérence d'une face de M;
- si s est un sommet de γ et que toutes les faces de σ en s d'un coté de γ sont dans M, alors la somme de leurs angles est dans $\pi + i\mathbb{R}_+$.

Remarquons que, comme pour les courbes A-admissibles, la troisième condition peut se voir comme une condition de concavité de chaque coté de γ; elle impose en particulier qu'une courbe B-admissible est nécessairement géodésique dans l'intérieur de M en dehors des points singuliers de la métrique.

Mais si P est un polyèdre qui délimite un domaine convexe de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ qui rencontre $\overline{H}^3_+$, alors P ne peut pas avoir d'arête a B-extrémale; sinon, P serait compris entre deux hémisphère de type espace H, H' bordés par a tels que la projection orthogonale de H sur H' soit bijective, ce qui est impossible. C'est pourquoi B doit être vide dans le Théorème A.

On peut maintenant énoncer le

Théorème B. *Soit (σ, A, B) une métrique HS marquée sur S^2; supposons que (σ, A, B) admet une réalisation polyèdrale convexe ϕ dans S^3_1, qui délimite un domaine convexe qui ne rencontre pas $\overline{H}^3_+ \cup \overline{H}^3_-$, et dont les arêtes A-extrémales (resp. B-extrémales) sont les éléments de A (resp. de B). Alors:*

1. *$H = \emptyset$, E a deux composantes connexes E_-, E_+, et chaque courbe maximale de type temps de M a une extrémité sur ∂E_+ et une sur ∂E_-;*
2. *σ est convexe en ses points singuliers;*
3. *les longueurs des courbes polyèdrales B-admissibles de σ sont strictement inférieures à 2π.*

Considérons enfin les polyèdres convexes de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ qui rencontrent à la fois H^3_+ et H^3_-. Il est clair que ces polyèdres ne peuvent pas avoir de face de type espace, sans quoi, par convexité, ils resteraient d'un seul coté d'un plan de type espace de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$. En particulier, ils ne peuvent pas avoir d'arête A-extrémale. On peut voir, par le même type d'arguments de convexité (précisés dans la Section 10) qu'ils ne peuvent pas non plus avoir d'arête B-extrémale. La description des métriques induites sur ces polyèdres est la suivante:

Théorème C. *Soit (σ, A, B) une métrique HS marquée sur S^2 qui admet une réalisation polyèdrale convexe ϕ dans $\tilde{HS}^3$ rencontrant à la fois H^3_+ et H^3_-. Alors*

1. *$A = B = D = S_A = S_B = E = \emptyset$, et toutes les faces de σ sont modelées sur $\tilde{HS}^2$;*
2. *H a deux composantes connexes H_+, H_-, et chaque courbe maximale de type temps de de M a une extrémité sur ∂H_+ et une sur ∂H_-;*

3. σ est convexe en ses points singuliers;

4. les courbes B-admissibles de σ sont de longueur $|L| < 2\pi$.

On peut se demander si les Théorèmes A, B et C concernent vraiment les métriques HS marquées, ou s'il est au contraire possible de les énoncer sans reférence aux ensembles A et B; en d'autre termes, si, pour une métrique HS σ donnée, il peut exister plusieurs couples (A, B) tels que (σ, A, B) vérifient les hypothèses de ces théorèmes. La réponse est évidente pour le Théorème C, puisque l'énoncé impose que $A = B = \emptyset$. De même, pour le Théorème B, il est assez facile de vérifier que les hypothèses de convexité aux sommets et l'hypothèse "topologique" (2) impose quelles arêtes sont dans B. Pour le Théorème A, il est possible qu'il en soit de même.

5. Rigidité

L'objectif de cette section est de rappeler et d'étendre une construction remarquable, due à Pogorelov, qui permet de ramener les problèmes de rigidité des immersions isométriques (de surfaces ou de polyèdres) des espaces à courbure constante dans les espaces plats, où ils sont plus faciles à comprendre. Pogorelov [16] a ainsi montré qu'il existe une application $\Phi : H^n \times H^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (resp. $\Phi : S^{n,+} \times S^{n,+} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) telle que si Σ, Σ' sont deux hypersurfaces convexes isométriques de $H^n \times H^n$ (resp. de $S^{n,+} \times S^{n,+}$) alors elles sont envoyées par Φ sur deux surfaces convexes isométriques de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Il se trouve (cf. [14]) que la construction de Pogorelov, ainsi que la vérification de ses propriétés, s'étend sans grande modification aux espaces pseudo-riemanniens à courbure constante.

De plus, la restriction de Φ à la diagonale Δ de $H^n \times H^n$ est l'application projective ρ usuelle; ainsi, on peut "linéariser" Φ au voisinage de Δ et obtenir une application de $T\Delta$ dans $T\mathbb{R}^n$ au-dessus de ρ qui préserve les déformations infinitésimales isométriques.

Nous allons donner une nouvelle démonstration de l'existence de cette "application de Pogorelov", qui nous montrera qu'elle s'étend au cas de HS^n_k, et nous permettra donc de ramener des problèmes de rigidité de polyèdres dans HS^n_k aux problèmes correspondants, bien compris, dans $\mathbb{R}^n$.

Bien que les constructions qui suivent soient essentiellement simples, leur présentation est un peu obscurcie par des problèmes de revêtement à deux feuillets, malheureusement nécessaires. Pour aider un peu le lecteur, nous expliciterons à chaque étape le cas particulier où $k = n$ (HS^n_k correspond alors à $(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, -\mathrm{can})$) qui est le plus simple car il ne fait pas intervenir de variété pseudo-riemannienne.

Introduisons un produit modifié: pour chaque n, k, on notera $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k \overline{\times} \tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ la variété constituée des points (x, y) de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k \times \tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ tels que les projetés de x, y dans HS^n_k sont dans la même composante connexe de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus Q^n_k$.

$\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ privé d'un hyperplan admet un plongement isométrique dans $\mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$ dont l'image est composée des deux quadriques habituelles, d'équations

$$\begin{aligned} \langle x, x\rangle &= 1 \quad \text{pour} \quad S^{n+1}_{k+1}, \\ \langle x, x\rangle &= -1 \quad \text{pour} \quad H^{n+1}_{k}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la même construction mène à un plongement "isométrique" de $\tilde{\mathrm{HS}}^{2n+1}_{2k+1}$ privé d'un hyperplan dans $\mathbb{R}^{2n+2}_{2k+2}$ et, par une homothétie de rapport $\sqrt{2}$, on peut voir son image comme

$$\{x \in \mathbb{R}^{2n+2}_{2k+2} \mid \langle x, x\rangle = 2 \ \text{ ou } \ \langle x, x\rangle = -2\}.$$

Comme $\mathbb{R}^{2n+2}_{2k+2} = \mathbb{R}^{n+1}_{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$, ces modèles fournissent un plongement de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k \overline{\times} \tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ dans $\mathbb{R}^{2n+2}_{2k+2}$ dont l'image se trouve dans $\tilde{\mathrm{HS}}^{2n+1}_{2k+1}$. On obtient ainsi, en notant a^n_k l'application antipodale de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ et g_0 sa métrique, la

Proposition 5.1. *Il existe un plongement isométrique $\tilde{\pi}^n_k$ de $\tilde{HS}^n_k \overline{\times} \tilde{HS}^n_k$ dans $\tilde{HS}^{2n+1}_{2k+1}$; si $(x_1, x_2) \in \tilde{HS}^n_k \overline{\times} \tilde{HS}^n_k$ et si on note T_1 et T_2 les sous-espaces vectoriels de $T(\tilde{HS}^n_k \times \tilde{HS}^n_k)$ tangents aux deux facteurs, alors la seconde forme fondamentale de $\tilde{\pi}^n_k$ s'écrit dans la décomposition $T(\tilde{HS}^n_k \overline{\times} \tilde{HS}^n_k) = T_1 \times T_2$ sous la forme $I\!I_{\tilde{\pi}} = (1/\sqrt{2})(g_0 \times (-g_0))$. De plus, $\tilde{\pi}^n_k \circ (a^n_k \times a^n_k) = a^{2n+1}_{2k+1} \circ \tilde{\pi}^n_k$, et on en déduit un plongement π^n_k de $(\tilde{HS}^n_k \overline{\times} \tilde{HS}^n_k)/\mathbb{Z}_2$ dans HS^{2n+1}_{2k+1} dont l'image est auto-duale, c'est à dire qu'elle coincide avec le plongement qui lui est associé par la dualité de HS^{2n+1}_{2k+1}.*

Démonstration. La construction ci-dessus fournit un plongement isométrique de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k \overline{\times} \tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ dans $\tilde{\mathrm{HS}}^{2n+1}_{2k+1}$. Or on voit que la seconde forme fondamentale du plongement de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ dans $\mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$ qu'on a utilisé est g_0; il suffit en effet de le vérifier en un point de S^n_{k+1} et pour un point de H^n_k, puis d'observer que le groupe des isométries de $\mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$ qui préserve 0 agit transitivement sur le tangent unitaire de chacune des deux composantes de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$. On en déduit que la seconde forme fondamentale du plongement de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k \overline{\times} \tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ dans $\mathbb{R}^{2n+2}_{2k+2}$ est, en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$ de l'image:

$$g_{0|T_1} \otimes x + g_{0|T_2} \otimes y, \tag{5}$$

où la notation utilisée décrit une 2-forme à valeur vectorielle qui envoie un couple de vecteurs de T_1 sur un vecteur parallèle à x, et de même pour y.

Enfin, pour trouver la seconde forme fondamentale de $\tilde{\pi}^n_k$, on doit projeter (5) sur le vecteur normal unitaire à l'image dans $\tilde{\mathrm{HS}}^{2n+1}_{2k+1}$, qui est (au signe près) $(x,-y)/\sqrt{2}$, d'où le résultat.

La symétrie de $\tilde{\pi}^n_k$ par rapport aux applications antipodales n'est pas difficile à vérifier; enfin, pour voir que $\tilde{\pi}^n_k$ est auto-duale, on procède par vérification directe: si $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1}_{k+1}$ est dans l'image de $\tilde{\pi}^n_k$, alors la direction dans $\mathbb{R}^{2n+2}_{2k+2}$ du point de $\tilde{\mathrm{HS}}^{2n+1}_{2k+1}$ dual de l'hyperplan tangent à l'image en (x,y) est donnée par le vecteur normal à l'image dans $\tilde{\mathrm{HS}}^{2n+1}_{2k+1}$, soit $(x,-y)$. Mais comme (x,y) est dans l'image de $\tilde{\pi}^n_k$, on doit avoir: $\langle x,x\rangle = \langle y,y\rangle = \pm 1$, ce qui implique aussi que $(x,-y)$ est dans l'image de $\tilde{\pi}^n_k$, d'où le résultat. q.e.d.

Exemple. Pour $k=n$, $\tilde{\mathrm{HS}}^n_n = (S^n, -\mathrm{can})$ et

$$\tilde{\pi}^n_n : S^n \times S^n \mapsto S^{2n+1}$$

est l'une des généralisations possibles du tore de Clifford dans S^3. C'est un plongement isométrique de $S^n \times S^n$ dans la sphère S^{2n+1} de rayon $\sqrt{2}$. On peut vérifier que sa seconde forme fondamentale est celle qui est annoncée, par un argument de symétrie sous l'action de $\mathrm{Isom}(S^n) \times \mathrm{Isom}(S^n)$ et d'change des deux facteurs. Comme la dualité qui intervient est simplement la dualité projective, il est aussi facile de voir que π^n_n est auto-dual.

Soit $x_1, x_2 \in \tilde{\mathrm{HS}}^n_k$; le dual de $\pi^n_k(x_1,x_2)$ est un hyperplan h de $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$, et on peut choisir une application projective ρ de $\mathrm{HS}^n_k \setminus h$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, qui envoie $\pi^n_k(x_1,x_2)$ sur 0. On peut mettre sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ un "produit scalaire" pseudo-riemannien g_1 tel que $(\rho \circ \pi^n_k)_*$ soit isométrique en (x_1,x_2) pour la seconde forme fondamentale de π^n_k, et que ρ_* envoie le normal à l'image de $(\pi^n_k)_*$ sur le normal à l'image H_0 de $(\rho \circ \pi^n_k)_*$.

La Proposition 5.1 montre que la signature de la seconde forme fondamentale de π_k^n est (n,n), et on peut donc décomposer H_0 en produit de deux sous-espaces H_1, H_2 de dimension n orthogonaux sur lesquels g_1 est soit définie positive, soit définie négative. On appelle p_1 et p_2 les projections orthogonales de H_0 respectivement sur H_1 et H_2, et on a la:

Proposition 5.2. *$\rho(\pi_k^n(\tilde{H}S_k^n \overline{\times} \tilde{H}S_k^n/\mathbb{Z}_2) \setminus h)$ est une quadrique de $\mathbb{R}^{2n+1}$ dont la projection orthogonale sur H_0 est injective; l'image par cette projection de l'ensemble des directions isotropes de la seconde forme fondamentale $I\!I_{\rho\circ\pi_k^n}$ de $\rho \circ \pi_k^n$ est partout définie par l'équation $\|p_1(x)\| = \|p_2(x)\|$.*

Démonstration. L'image de π_k^n est, vue dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$, une quadrique dont l'équation homogène dans $\mathbb{R}_{k+1}^{n+1} \times \mathbb{R}_{k+1}^{n+1}$ est simplement $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle$.

Son image par ρ, qui est une application projective, est donc une quadrique q de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Pour vérifier que sa projection orthogonale p_0 sur H_0 est injective, il faut montrer que le point de $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$ correspondant à la direction orthogonale à H_0 est dans q. Or, dans notre construction, ce point est simplement le dual de l'hyperplan tangent à l'image de π_k^n en 0. Il est donc également dans l'image de π_k^n, qui est auto-duale (cf. la Proposition 5.1).

L'équation de q peut donc se mettre sous la forme

$$z = P(x, y),$$

où z est la coordonnée suivant la direction orthogonale à H_0, x, y des coordonnées sur H_1 et H_2, et P un polynome de degré 2. Le hessien de P étant constant, la projection sur H_0 des directions isotropes de $I\!I_{\rho\circ\pi_k^n}$ est aussi constante, et, en 0, la définition de H_1 et H_2 montre qu'elle est donnée par l'équation annoncée. q.e.d.

Exemple. Toujours pour $k = n$, l'image de $\rho \circ \pi_n^n$ est une quadrique q d'équation

$$z = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - y_j^2.$$

Le vecteur normal à cette quadrique en (x_i, y_j, z) est donc dirigé par $N = (2x_i, -2y_j, 1)$. Si $V = (x_i', y_j', z')$ est tangent à q, on a donc

$$\nabla_V N = 2(x_i', y_j', 0).$$

Mais $I\!I(V,V)=0$ si et seulement si $\langle \nabla_V X, V\rangle = 0$, donc si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{n}(x'_j)^2 - (y'_j)^2 = 0,$$

ce qui correspond à la proposition.

Nous allons pouvoir utiliser cette description métrique des invariants extrinsèques de π_k^n pour obtenir des informations d'ordre affine sur le comportement des géodésiques par rapport à une application déduite de π_k^n. Nous appellerons dans la suite bi-géodésique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un segment de géodésique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui fait un angle égal avec chacun des deux facteurs; de même, nous appellerons bi-géodésique de $\mathrm{HS}_k^n \overline{\times} \mathrm{HS}_k^n$ une courbe $\gamma : I \to \mathrm{HS}_k^n \overline{\times} \mathrm{HS}_k^n$, où $I = [a,b] \cap \mathbb{R}^*$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, telle que, si on note ρ_1 et ρ_2 les projections sur les deux facteurs, alors:

- $\rho_1 \circ \gamma$ et $\rho_2 \circ \gamma$ sont partout des géodésiques de même type, et sont paramétrées à même vitesse;

- si $x < 0 < y$ alors $d_H(\rho_1 \circ \gamma(x), \rho_1 \circ \gamma(y)) = d_H(\rho_2 \circ \gamma(x), \rho_2 \circ \gamma(y))$.

La seconde condition est rendue nécessaire par la “discontinuité” qui peut se produire quand les $\rho_i \circ \gamma$ passent de la composante S_{k+1}^n de HS_k^n à la composante H_k^n. On en déduit, par relèvement, une notion de bi-géodésique de $\tilde{\mathrm{HS}}_k^n \overline{\times} \tilde{\mathrm{HS}}_k^n / \mathbb{Z}_2$, et on a le

Théorème 5.3. *Soit* $x_0 \in \tilde{HS}_k^n$*; il existe une sous-variété* h *de* $(\tilde{HS}_k^n \overline{\times} \tilde{HS}_k^n)/\mathbb{Z}_2$ *et une application injective* $\Phi : (\tilde{HS}_k^n \overline{\times} \tilde{HS}_k^n)/\mathbb{Z}_2 \setminus h \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *ayant les propriétés suivantes:*

- Φ *envoie les bi-géodésiques de* $(\tilde{HS}_k^n \overline{\times} \tilde{HS}_k^n)/\mathbb{Z}^2 \setminus h$ *sur des bi-géodésiques de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*;*

- *pour tout* $(x,y) \in (\tilde{HS}_k^n \overline{\times} \tilde{HS}_k^n)/\mathbb{Z}^2 \setminus h$ *et pour tout* $X \in T_x \tilde{HS}_k^n, Y \in T_y \tilde{HS}_k^n$, $\|p_1(\Phi_*(X,Y))\|^2 = \|p_2(\Phi_*(X,Y))\|^2$ *si et seulement si* $\|X\|^2 = \|Y\|^2$*;*

- *si* α *est une isométrie de* $\mathbb{R}^n$ *alors il existe une unique isométrie* β *de* HS_k^n *telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists! y \in HS_k^n, \Phi(y, \beta(y)) = (x, \alpha(x)).$$

Démonstration. Montrons d'abord que les géodésiques de $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$ qui sont dans l'image de π^n_k sont les images des bi-géodésiques de $(\tilde{\mathrm{HS}}^n_k\overline{\times}\tilde{\mathrm{HS}}^n_k)/\mathbb{Z}_2$. Supposons d'abord que γ est une géodésique de $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$ à valeurs dans l'image de π^n_k. Dans le modèle où $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$ correspond à $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}\setminus Q^{2n+1}_{2k+1}$, l'image de γ est contenue dans un cercle géodésique S_0 de $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$. De même, si on note r_1 et r_2 les deux projections canoniques de $(\tilde{\mathrm{HS}}^n_k\overline{\times}\tilde{\mathrm{HS}}^n_k)/\mathbb{Z}_2$ sur HS^n_k, alors les $r_i\circ\gamma$ sont aussi des géodésiques de HS^n_k, donc à valeur dans des cercles géodésiques S_1 et S_2 de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Les r_i sont projectives, si bien que $r_1\circ(r_{2|S_2})^{-1}: S_2\rightarrow S_1$ l'est aussi; comme cette application préserve les intersections des S_i avec Q^n_k, elle préserve la métrique de Hilbert d_H, et γ est donc l'image d'une bi-géodésique de $(\tilde{\mathrm{HS}}^n_k\overline{\times}\tilde{\mathrm{HS}}^n_k)/\mathbb{Z}_2$.

Réciproquement, si γ est une bi-géodésique de $(\tilde{\mathrm{HS}}^n_k\overline{\times}\tilde{\mathrm{HS}}^n_k)/\mathbb{Z}_2$, la Proposition 5.1 montre que $I\!I_{\pi^n_k}(\gamma',\gamma')=0$ en chaque point, et $\pi^n_k\circ\gamma$ est donc une géodésique de $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$. Ainsi, les géodésiques de $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$ qui sont dans l'image de π^n_k sont les images des bi-géodésiques de $(\tilde{\mathrm{HS}}^n_k\overline{\times}\tilde{\mathrm{HS}}^n_k)/\mathbb{Z}_2$.

Posons maintenant $\Phi := p_0\circ\rho\circ\pi^n_k$ en identifiant $H_0=H_1\times H_2$ à $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Si γ est une bi-géodésique de $(\tilde{\mathrm{HS}}^n_k\overline{\times}\tilde{\mathrm{HS}}^n_k)/\mathbb{Z}_2$, son image par π^n_k est une géodésique de $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$, et $\Phi\circ\gamma$ est donc une géodésique de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. De plus, $\rho\circ\pi^n_k\circ\gamma$ est une géodésique de $\mathbb{R}^{2n+1}$ qui est dans la quadrique image de $\rho\circ\pi^n_k$, et donc $(\rho\circ\pi^n_k\circ\gamma)'$ est partout isotrope pour la seconde forme fondamentale de cette quadrique. La Proposition 5.1 montre donc que sa projection sur H_0 est une bi-géodésique de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, d'où le premier point.

Le second point en est une conséquence immédiate. En effet, $\langle X,X\rangle=\langle Y,Y\rangle$ si et seulement si il existe une bi-géodésique γ de $(\tilde{\mathrm{HS}}^n_k\overline{\times}\tilde{\mathrm{HS}}^n_k)/\mathbb{Z}_2$ qui est dirigée par le vecteur (X,Y); mais alors son image $\Phi\circ\gamma$ est une bi-géodésique de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, et, en particulier, $\langle(p_1\circ\Phi\circ\gamma)',(p_1\circ\Phi\circ\gamma)'\rangle=\langle(p_2\circ\Phi\circ\gamma)',(p_2\circ\Phi\circ\gamma)'\rangle$ en chaque point. La réciproque est similaire.

Pour le dernier point, on peut considérer le graphe G_0 de α dans $H_0\simeq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Il s'agit d'une sous-variété totalement géodésique, et, comme α est une isométrie, la Proposition 5.2 montre que son image réciproque G_1 dans la quadrique q de $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$ est totalement géodésique dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$. L'image réciproque G_2 de G_1 dans $\tilde{\mathrm{HS}}^{2n+1}_{2k+1}$ par Φ est donc encore totalement géodésique; elle est isométrique (pour la structure de longueur induite par son immersion dans $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$) à $\mathrm{HS}^n_k\setminus(x^*)$, où $x\in\mathrm{HS}^n_k$, avec x^* correspondant à $(x_0,x_0)^*$ dans $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$. De plus, comme elle est totalement géodésique en tant que sous-variété de $\mathrm{HS}^{2n+1}_{2k+1}$, on peut localement la voir dans $\mathrm{HS}^n_k \times \mathrm{HS}^n_k$ comme le graphe d'une isométrie de HS^n_k. Mais comme elle est isométrique à $\mathrm{HS}^n_k \setminus (x^*)$, on voit facilement qu'elle correspond globalement à une isométrie d'un hémisphère de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$ sur un autre tel hémisphère, ce qui conduit au résultat. q.e.d.

Exemple. Pour $k = n$, les bi-géodésiques sont simplement les couples de géodésiques paramétrées à même vitesse; l'application de Pogorelov va de $S^n \times S^n/\mathbb{Z}^2$ privé d'une hypersurface dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Suivant A. Zeghib, on peut remarquer que l'existence "locale" de Φ au voisinage des points d'un espace pseudo-riemannien (M, μ) à courbure ± 1 est une conséquence directe de la platitude conforme de $M \times M$ muni de la métrique $\mu + (-\mu)$, qui se vérifie facilement. En effet, la propriété cruciale dans le Théorème 5.3 est que les géodésiques de type lumière de $(M \times M, \mu + (-\mu))$ sont envoyées sur les géodésiques lumières de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Or c'est toujours le cas pour les transformations conformes de variétés pseudo-riemanniennes, car celles-ci préservent le cône de lumière, qu'on peut voir comme hypersurface de niveau $H_i = 0$ pour les hamiltoniens H_1, H_2 sur $T^*(M \times M)$ correspondant à chacune des deux métriques pseudo-riemanniennes conformes. Ainsi, les géodésiques de type lumière de ces métriques, qui ne sont autres que les intégrales du gradient symplectique des H_i, sont identiques, car elles ne dépendent que de l'hypersurface $H_i = 0$ (et pas du comportement des H_i au voisinage de ces hypersurfaces).

Remarquons que nous avons traité ici seulement des applications d'un espace pseudo-riemannien à courbure constante non nulle dans un $\mathbb{R}^n$; mais d'autres possibilités existent. On peut remplacer l'espace d'arrivée par un espace plat pseudo-riemannien; ceci se fait simplement en changeant le choix de la décomposition $H_0 = H_1 \times H_2$ de façon que les H_i soient pseudo-riemanniens. On peut obtenir ainsi une application Φ' similaire à Φ, mais à valeurs dans $\mathbb{R}^n_{k+1} \times \mathbb{R}^n_{k+1}$, et ayant en plus la propriété d'envoyer les isométries de HS^n_k qui fixent un point $x_0 \in S^n_{k+1}$ donné sur des isométries de $\mathbb{R}^n_{k+1}$ qui fixent le point correspondant. Nous ne développons pas cette idée ici, bien qu'elle soit utile pour l'étude des immersions isométriques équivariantes; voir [14], où l'existence d'une telle application est prouvée d'une façon élémentaire pour les espaces pseudo-riemanniens à courbure constante. On pourra aussi consulter [15].

On peut aussi composer des applications du type de Φ, et on obtient des transformations ayant des propriétés similaires entre espaces pseudo-riemanniens de même dimension à courbure constante, nulle ou pas.

On peut maintenant utiliser le Théorème 5.3 pour obtenir des équivalences entre problèmes de rigidité d'hypersurfaces dans différents espaces. Ainsi:

Corollaire 5.4. *Si $x \in HS^n_k$ et si ϕ_1, ϕ_2 sont des immersions d'une hypersurface Σ dans $HS^n_k \setminus x^*$ qui induisent une même métrique qui est partout non dégénérée, alors les applications $p_1 \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ et $p_2 \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ induisent aussi la même métrique. De plus, $p_1 \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ et $p_2 \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ se déduisent l'une de l'autre par une isométrie globale si et seulement si c'est le cas pour ϕ_1 et ϕ_2.*

Démonstration. Les métriques induites par les deux applications sont les mêmes d'après le second point du Théorème 5.3. La seconde assertion provient du troisième point de 5.3. q.e.d.

Dans ce corollaire, on suppose que la métrique induite dans HS^n_k est non dégénérée pour obtenir, à l'arrivée, des immersions. Sans cela, les images des $p_i \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ peuvent admettre des points singuliers. Ce n'est pas toujours grave dans la mesure où on dispose dans $\mathbb{R}^n$ de certains résultats de rigidité pour les surfaces singulières (cf. [16]).

De la même manière, on a pour les polyèdres:

Corollaire 5.5. *Si $x \in HS^n_k$ et si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux immersions (polyèdrales) d'un polyèdre P dans $HS^n_k \setminus x^*$ qui induisent les mêmes métriques sur les faces de P, alors $p_1 \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ et $p_2 \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ sont des immersions (polyèdrales) de P dans $\mathbb{R}^n$ qui induisent les mêmes métriques sur les faces de P. De plus, ϕ_1 et ϕ_2 se déduisent l'une de l'autre par une isométrie de HS^n_k si et seulement si les $p_i \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ sont congruentes.*

On note maintenant que la restriction de Φ à la diagonale Δ de $(\tilde{\mathrm{HS}}^n_k \setminus x^*_0) \overline{\times} (\tilde{\mathrm{HS}}^n_k \setminus x^*_0)/\mathbb{Z}_2$ est simplement l'application projective, qu'on note encore ρ, de $\mathrm{HS}^n_k \setminus x^*_0$ dans $\mathbb{R}^n$. En effet, on vérifie facilement que $h \cap \Delta$ est la diagonale de $x^*_0 \times x^*_0$; de plus, par symétrie entre les deux facteurs, $\Phi(\Delta)$ est dans la diagonale de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Il reste donc seulement à montrer que $\Phi_{|\Delta}$ est projective. Or les géodésiques de Δ sont des bi-géodésiques de $(\tilde{\mathrm{HS}}^n_k \setminus x^*_0) \overline{\times} (\tilde{\mathrm{HS}}^n_k \setminus x^*_0)$, et sont donc envoyées par Φ sur des bi-géodésiques de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, donc sur des géodésiques de la diagonale de $\mathbb{R}^n$. On peut ainsi linéariser Φ au voisinage de Δ:

Définition 5.6. On pose:

$$
\begin{aligned}
\overline{\Phi} : T(\mathrm{HS}^n_k \setminus x_0^*) &\to T\mathbb{R}^n \\
(x, v) &\mapsto (\rho(x), (\pi_1)_* \circ \Phi_*((x, v), (x, 0)) \\
&\qquad - (\pi_2)_* \circ \Phi_*((x, v), (x, 0))).
\end{aligned}
$$

Les principales propriétés de $\overline{\Phi}$ sont alors:

Proposition 5.7. *Soit Σ une sous-variété (resp. P un polyèdre) de $HS^n_k \setminus x_0^*$, et v une section de la restriction du fibré THS^n_k à Σ (resp. à P). Alors v est une déformation infinitésimale isométrique de Σ (resp. une déformation infinitésimale isométrique polyèdrale de P) si et seulement si $\overline{\Phi}(v)$ est une déformation infinitésimale isométrique de $\rho(\Sigma)$ (resp. polyèdrale de $\rho(P)$). De plus, v est induit par une isométrie infinitésimale globale de HS^n_k si et seulement si $\overline{\Phi}(v)$ est induit par un champ de Killing de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. La première assertion est la linéarisation du deuxième point du Théorème 5.3 (et du premier point dans le cas polyèdral, car il faut assurer que $\overline{\Phi}(v)$ préserve encore les géodésiques des faces, et donc est une déformation polyèdrale). La seconde assertion est une traduction du troisième point de 5.3. q.e.d.

Notons que, dans le cas polyèdral, il n'est pas nécessaire que la déformation qu'on considère préserve la combinatoire de P; par exemple, il est possible que l'une des faces de P soit "cassée" par la déformation.

Il nous reste à exploiter ces résultats pour donner des énoncés de rigidité des polyèdres de HS^n_k; c'est facile car on sait, essentiellement depuis Cauchy (voir [9], [1]), que les polyèdres de $\mathbb{R}^n$ (pour $n \geq 3$) sont rigides. On a le:

Théorème 5.8. *Supposons $n \geq 3$ et $0 \leq k \leq n$. Soit P un polyèdre convexe de HS^n_k, et u une déformation isométrique infinitésimale de P, c'est à dire un déplacement infinitésimal des sommets de P tel que la métrique induite sur P ne varie pas (au premier ordre). Alors u est induite par une isométrie infinitésimale globale de HS^n_k.*

Démonstration. Choisissons un point $x_0 \in \mathrm{HS}^n_k$ tel que x_0^* ne rencontre pas P. C'est possible, car on ne considère que des polyèdres ayant au moins trois sommets, et donc (par convexité) contenus dans un hémisphère ouvert de $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$. On applique la Proposition 5.7; $\overline{\Phi}(u)$ est une déformation isométrique infinitésimale de $\rho(P)$. Mais ρ est projective, donc $\rho(P)$ est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$, donc il est rigide; donc

$\overline{\Phi}(u)$ est la restriction à $\rho(P)$ d'un champ de Killing de $\mathbb{R}^n$, et u est aussi (d'après 5.7) induit par une déformation isométrique infinitésimale globale de HS^n_k. q.e.d.

Notons que ce résultat ne s'applique pas pour les polyèdres à deux sommets: quand leurs sommets sont antipodaux, ils peuvent admettre des déformations infinitésimales isométriques mais non triviales. En effet, ces polyèdres ne sont contenus dans aucun hémisphère ouvert, et leurs images par ρ ne sont jamais compactes.

Notons que la déformation ne peut pas faire apparaître de nouveaux sommets, sans quoi la déformation du polyèdre obtenu dans $\mathbb{R}^n$ pourrait ne pas être triviale [8].

Ce résultat est principalement intéressant en dimension 3, car la situation est plus rigide dans les dimensions plus grandes. On peut aussi obtenir un énoncé non infinitésimal, mais local:

Théorème 5.9. *Soit $n \geq 3, k \leq n$, et soit P_0 un polyèdre convexe de HS^n_k, non dégénéré en ses p sommets. Il existe alors un voisinage V de P_0 dans l'espace des polyèdres à p sommets de HS^n_k tel que si $P_1, P_2 \in V$ et si les métriques induites sur P_1 et P_2 sont isométriques, alors P_2 se déduit de P_1 par une isométrie de HS^n_k.*

Démonstration. Comme P_0 est convexe, il est dans $\mathrm{HS}^n_k \setminus x^*$ pour un certain $x^* \in SH^n_k$, et il en est de même pour P_1, P_2 s'ils sont assez proches de P_0.

Notons ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 des immersions polyèdrales d'un polyèdre P dans HS^n_k dont les images sont P_0, P_1 et P_2. Comme P_0 est strictement convexe et ρ est projective, $p_0 \circ \Phi \circ (\phi_0, \phi_0) = \rho \circ \phi_0$ est strictement convexe, donc, quand P_1, P_2 sont assez proches de P_0, $p_1 \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ et $p_2 \circ \Phi \circ (\phi_1, \phi_2)$ sont encore convexes. Or elles induisent la même métrique, et sont donc congruentes. D'après le corollaire 5.5, P_1 se déduit donc de P_2 par une isométrie globale. q.e.d.

6. Dégénérescences de polyèdres

Nous allons nous restreindre dans la suite de ce papier à l'étude des polyèdres convexes dans $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$; certains des raisonnements et des résultats qui suivent restent plus ou moins valables dans les $\tilde{\mathrm{HS}}^n_k$, mais le cas $k = 0$ nous semble plus intéressant en relation avec la géométrie hyperbolique. On pourra facilement en déduire des résultats dans HS^{n+1}, dont $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ est un revêtement à deux feuillets.

Dans cette section, on décrit les dégénéréscences possibles de suites de polyèdres quand on suppose que la métrique HS qu'ils induisent convergent vers une limite. Tous les polyèdres qu'on considèrera seront des polyèdres homéomorphes à S^n, sans d'ailleurs que cette condition soit essentielle.

Dans toute la suite, nous fixerons un entier n et un modèle projectif $\alpha_0 : \tilde{\mathrm{HS}}^{n+1} \to S^{n+1}$. Nous appellerons "extérieur" un point de la composante connexe de type "de Sitter" de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$, et intérieur un point de l'une des deux composantes connexes de type "hyperbolique". Une p-face sera aussi dite "intérieure" ou "extérieure" si tous ses points le sont. Une p-face ($p \geq 2$) extérieure sera

- "de type espace", si la restriction de la distance de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ y est imaginaire pure (donc si elle se trouve dans un p-plan qui ne rencontre pas $\tilde{Q}^{n+1}$);
- "mixte", si elle est dans un p-plan transverse à $\tilde{Q}^{n+1}$ (la restriction de la métrique de S_1^{n+1} y est alors de signature $(n, 1)$;
- "dégénérée", si elle est dans un p-plan tangent à $\tilde{Q}^{n+1}$.

De même, une arête extérieure sera de type "espace" si la restriction de d_H y est imaginaire pure, "lumière", si cette restriction est réelle, et "temps", si la restriction de d_H est identiquement nulle.

On utilisera aussi la:

Définition 6.1. Soit P un polyèdre muni d'une métrique de type HS à bord polyèdral Q de type espace, et s un sommet de Q. On dira que P est concave en $s \in Q$ si:

- soit P n'est pas de type espace au voisinage de s;
- soit P est de type espace et concave au voisinage de s, c'est à dire que le link L en s du domaine convexe borné par Q contient un point x tel que $d(x, \partial L) \geq \pi/2$.

On peut maintenant définir des polyèdres de codimension 1 qui seront utiles plus loin; nous restreignons la définition aux polyèdres de type espace, car ce sont ceux qui apparaîtront dans les situations de dégénérescence.

Définition 6.2. Soit P un polyèdre muni d'une métrique de type HS, et Q un polyèdre de type espace de codimension 1 dans P. On dira que Q est A-admissible si, pour tout sommet s de Q, les deux cotés de $P \setminus Q$ sont concaves en s.

Dans cette définition (comme dans la suite quand on parlera de sous-variété polyèdrale d'un polyèdre) on suppose que chaque face de Q ne peut rencontrer l'intérieur que d'une seule face de P de chaque dimension. En dimension $n = 2$, on retrouve la définition des courbes A-admissibles de la Section 4.

Quand P est un polyèdre de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$, on dira qu'une $(n-1)$-face f de P est "A-extrémale" si, quand on prolonge les deux n-faces de P contenant f en des hémisphères H, H' de dimension n dont le bord est le $(n-1)$-plan de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ contenant f, H et H' rencontrent tous deux $\overline{H}^{n+1}_{+} = H^{n+1}_{+} \cup \partial H^{n+1}_{+}$ (ou rencontrent tous deux $\overline{H}^{n+1}_{-}$).

Nous aurons besoin d'une topologie, qu'on notera $\mathcal{T}_n$, sur l'espace M_n des métriques HS sur la sphère S^n. Si $\sigma \in M_n$, une base des ouverts de $\mathcal{T}_n$ au voisinage de σ sera constituée des $U(T, \epsilon)$, où:

- T est une triangulation de S^n compatible avec σ, c'est à dire une décomposition de S^n en simplexes tels que σ ne change pas de signature sur les n-simplexes et que les p-faces soient géodésiques pour la métrique qui se trouve de chaque coté;
- $\epsilon > 0$;
- $U(T, \epsilon)$ est l'ensemble des $\sigma' \in M_n$ tels qu'il existe une triangulation T' de S^n compatible avec σ' et un homéomorphisme h de S^n qui envoie T' sur T de manière que la longueur de chaque arête de T' (pour σ') diffère de la longueur correspondante sur T (pour σ) d'au plus ϵ.

Cette topologie peut sembler grossière, mais suffira à nos énoncés. Dans la Section 10, on utilisera (pour le cas où $n + 1 = 3$) une topologie plus adaptée.

Voici le théorème de dégénérescence de polyèdres convexes dont nous aurons besoin par la suite:

Théorème 6.3. *Soit P un polyèdre homéomorphe à S^n, et $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'immersions polyèdrales convexes de P dans $\tilde{HS}^{n+1} \setminus H^{n+1}_{-}$, telle que la suite (μ_k) des métriques induites par les ϕ_k sur P converge vers une métrique μ_∞. Supposons que les $(n-1)$-faces A-extrémales* *de P pour les (ϕ_k) restent les mêmes indépendemment de k, et que les domaines convexes de $\tilde{HS}^{n+1}$ bordés par les $\phi_k(P)$ contiennent tous un point de H^{n+1}_+. Alors:*

- *soit il existe une suite (ρ_k) d'isométries de $\tilde{HS}^{n+1}$ telle que la suite $(\rho_k \circ \phi_k)$ admette une sous-suite qui converge vers une immersion polyèdrale convexe de P dans $\tilde{HS}^{n+1}$ qui induit μ_∞;*
- *soit il existe dans (P, μ_∞) une hypersurface polyèdrale Q:*
    1. *A-admissible;*
    2. *sur laquelle la restriction de μ_∞ est isométrique à $(S^{n-1}, -can)$;*
    3. *dont toutes les $(n-1)$-faces sont soit dans l'adhérence d'une n-face de type espace de (P, μ_∞), soit une $(n-1)$-face A-extrémale de P pour les ϕ_k;*
    4. *qui sépare P en deux composante connexes ouvertes dont chacune contient au moins un sommet.*

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes. On note d'abord que, par compacité de S^{n+1}, il existe une sous-suite (ϕ'_n) de (ϕ_n) telle que $(\alpha_0 \circ \phi'_n)$ converge. On remarque alors que, si un sommet s_0 de P est tel que $(\alpha_0 \circ \phi'_n(s_0))$ converge vers un $s'_0 \in \tilde{Q}^{n+1}$, alors les faces de P qui lui sont adjacentes convergent vers l'hyperplan H tangent à $\tilde{Q}^{n+1}$ en s'_0. Ceci provient de la

Proposition 6.4. *Soit $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'immersions polyèdrales convexes de P dans $\tilde{HS}^{n+1}$, et s_0, s_1 deux sommets adjacents de P. Supposons que $(\alpha_0 \circ \psi)(s_0) \to s'_0 \in \tilde{Q}^{n+1} \subset S^{n+1}$ et que $(\alpha_0 \circ \psi)(s_1) \to s'_1$, alors que $|d_{\mu_k}(s_0, s_1)|$ reste bornée. Alors s'_1 appartient à l'hyperplan H tangent à $\tilde{Q}^{n+1}$ en s'_0.*

Démonstration. C'est une conséquence de la définition de d_H comme métrique de Hilbert de $\tilde{Q}^{n+1}$. En effet, on quotiente $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ par l'application antipodale a pour retrouver HS^{n+1}, et on garde les mêmes notations pour les points de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ et pour leurs images; si $s'_1 \notin H$, alors la droite de $\mathbb{RP}^{n+1}$ définie par s'_0 et s'_1 rencontrerait Q^{n+1} en deux points distincts dont s'_0, et donc on aurait $d_H(\alpha_0 \circ \psi_n(s_0), \alpha_0 \circ \psi_n(s_1)) \to \infty$.

q.e.d.

On peut par ailleurs donner une description très simple de certaines isométries de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$. Soit $x, y \in \partial H_+^{n+1}$, et soient $\overline{x}, \overline{y}$ les points antipodaux de x, y. Considérons une translation hyperbolique u' dans H_+^{n+1} qui fixe x et y, pour laquelle y est attractif et x répulsif. u' se prolonge en une isométrie u de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$. u doit commuter avec l'application antipodale, donc doit agir sur H_-^{n+1} comme une translation préservant $\overline{x}$ et $\overline{y}$ comme points répulsif et attractif respectivement. De plus, si $p \in S_1^{n+1}$ est proche de x (dans le sens où $\alpha_0(p)$ est proche de $\alpha_0(x)$ sur S^n) alors le dual de p contient un hyperplan hyperbolique P "proche de x"; comme u doit commuter à la dualité, et que l'image de P par u' est un hyperplan hyperbolique plus éloigné de x, on voit que u doit agir aussi sur S_1^{n+1} de manière à fixer x et y et à être répulsive en x et attractive en y. Il en est de même en $\overline{x}, \overline{y}$.

Maintenant, on peut préciser la situation pour les dégénérescences:

Lemme 6.5. *Soit P un polyèdre, et $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'immersions polyèdrales convexes de P dans $\tilde{HS}^{n+1} \setminus H_-^{n+1}$, telle que la suite (μ_k) des métriques induites par les ψ_k sur P converge vers une métrique μ_∞. Supposons que les $(n-1)$-faces A-extrémales de P sont les mêmes pour tous les ψ_k, et que les domaines convexes délimités par les $\psi_k(P)$ rencontrent tous H_+^{n+1}. Alors il existe une suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'isométries de $\tilde{HS}^{n+1}$ et une sous-suite $(\psi'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\rho_k \circ \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que:*

1. *soit $(\psi'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une immersion polyèdrale convexe $\psi_\infty : P \to \tilde{HS}^{n+1}$;*
2. *soit il existe $m \geq 2$, une famille $(s_i)_{i\in\mathbb{N}_m}$ de points de $\partial H_+^{n+1} \subset \tilde{Q}^{n+1}$, et une décomposition de P en polyèdres à bord fermés:*

$$P = (\cup_{i\in\mathbb{N}_m} Q_i) \cup \left(\cup_{i\in\mathbb{N}_m} Q'_i\right) \cup Q_0$$

telle que

   (a) pour tout i, $Q_i \neq \emptyset$, et $(\alpha_0 \circ \psi'_k)(Q_i) \to s_i$;

   (b) pour chaque i, $Q'_i \cup Q_i$ est un voisinage de Q_i dans P, et $Q'_i \cap Q_i$ est de codimension 1 dans Q'_i;

   (c) les images des $(\alpha_0 \circ \psi'_k)(Q'_i)$ convergent vers des polyèdres des hyperplans P_i tangents à $\tilde{Q}^{n+1}$ en s_i;

   (d) la restriction de ψ_∞ à Q_0 est une immersion polyèdrale de Q_0 dans $\tilde{HS}^{n+1}$;

(e) les $(n-1)$-faces de ∂Q_0 sont chacune soit dans l'adhérence d'une n-face de type espace de (P, μ_∞), soit une $(n-1)$-face A-extrémale de P pour les ψ_k.

Démonstration. On suppose qu'on est pas dans la situation (1) de l'énoncé. Par compacité de S^{n+1}, il existe une sous-suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\alpha_0 \circ \psi_k)$ qui converge vers une limite $\alpha_\infty : P \to S^{n+1}$. Montrons qu'on peut faire agir le groupe des isométries de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ pour se ramener au cas où aucun point de $\alpha_0(\overline{H_-^{n+1}})$ n'est dans l'image de α_∞. En effet, si ce n'est pas le cas:

1. soit il existe plusieurs points $(s_i)_{i\in\mathbb{N}_N}$ de $\alpha_0(\partial H_-^{n+1}) \cap \mathrm{Im}(\alpha_\infty)$. Alors, par convexité, $\mathrm{Im}(\alpha_\infty)$ reste du coté contenant H_+^n des plans tangents à $\tilde{Q}^{n+1}$ aux s_i. Comme chacun de ces plans rencontre $\overline{H}_-^n$ en un seul point point, nécessairement $N = 1$.
2. soit il existe un unique point $s \in \alpha_0(\partial H_-^{n+1}) \cap \mathrm{Im}(\alpha_\infty)$, et il existe une suite (ρ_k) d'isométries de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ ayant s pour point fixe répulsif, telle que $(\alpha_0 \circ \rho_k \circ \psi_k)$ reste hors d'un voisinage de $\alpha_0(H_-^{n+1})$; on peut alors prendre une suite extraite de $(\alpha_0 \circ \rho_k \circ \psi_k)$.
3. soit il existe un unique point $s \in \alpha_0(\partial H_-^{n+1}) \cap \mathrm{Im}(\alpha_\infty)$, mais on n'est pas dans la situation (2); alors il existe une suite (ρ_k) d'isométries de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ ayant s pour point fixe répulsif, telle que (quitte à extraire une sous-suite) l'image de la limite de $(\alpha_0 \circ \rho_k \circ \psi_k)$ contienne au moins deux points de $\alpha_0(H_-^{n+1})$. On est alors dans le cas (1) de la présente démonstration, dont on a montré qu'il était impossible.

Par le même raisonnement, on peut aussi se ramener au cas où

$$\alpha_0(\partial H_+^{n+1}) \cap \alpha_\infty(P) = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}_N} \ , \quad N \geq 2.$$

En effet, si $\alpha_0(\partial H_+^{n+1}) \cap \alpha_\infty(P) = \emptyset$, on est dans le cas (1) de l'énoncé, qu'on a exclu; et si $\alpha_0(\partial H_+^{n+1}) \cap \alpha_\infty(P)$ est composé d'un seul point, on peut à nouveau faire agir $\mathrm{Isom}(\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1})$ pour se ramener au cas où $\alpha_0(\partial H_+^{n+1}) \cap \alpha_\infty(P)$ est vide ou contient plusieurs points.

Maintenant, on note P_i l'hyperplan de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ tangent à $\tilde{Q}^{n+1}$ en s_i, puis on pose:

$$Q_i := (\alpha_\infty)^{-1}(s_i) \ , \quad Q_i' := (\alpha_\infty)^{-1}(P_i \setminus \{s_i\}) \ , \quad Q_0 := P \setminus (\cup_i (Q_i \cup Q_i')).$$

Le seul point à vérifier dans l'énoncé est (e). Soit f une $(n-1)$-face de ∂Q_0, et H, H' les deux n-faces de P contenant f, avec $H \subset Q_0$ par exemple. Supposons que ni H, ni H' n'est de type espace pour μ_∞. Alors $\alpha_\infty(H') \subset P_i$ pour un certain i, et $\alpha_\infty(H)$ est inclus dans un demi-hyperplan bordé par $\alpha_\infty(f)$ qui rencontre $\alpha_0(\overline{H^{n+1}_+})$. f est donc A-extrémale. q.e.d.

Pour conclure, nous devrons montrer que les deux cotés des bords de chacun des $Q_i \cup Q'_i$ sont concaves. En ce qui concerne le coté intérieur de $Q_i \cup Q'_i$, cela proviendra essentiellement du

Lemme 6.6. *Soit P un polyèdre de dimension n à bord Q et (ψ_k) une suite d'immersions polyèdrales de type espace de P dans $\tilde{HS}^{n+1}$ telles que $(\alpha_0 \circ \psi_k)(P)$ converge vers un convexe C d'un hyperplan de $\tilde{HS}^{n+1}$ qui est tangent à $\tilde{Q}^{n+1}$ en un point intérieur, et dont le bord est de type espace. Supposons que la suite (μ_k) des métriques induites par les ψ_k sur P converge vers une métrique μ (riemannienne). Alors Q est totalement géodésique pour μ.*

Démonstration. Soit $s \in Q$, notons $x_0 = \lim(\alpha_0 \circ \psi_k)(s) \in \partial C$. Soit U un voisinage convexe de x_0 dans C. Il existe une suite (U_k) de voisinages convexes (pour μ_k) de s dans P tels que $((\alpha_0 \circ \psi_k)(U_k))$ converge vers U. Or la métrique de HS^{n+1} est dégénérée sur C, et on en déduit que les U_k convergent pour μ vers un convexe C' de Q, voisinage de s dans Q. Comme C' est limite de convexes de P, il est totalement géodésique pour μ. q.e.d.

Enfin, pour l'autre coté, le résultat viendra du

Lemme 6.7. *Soit H un hyperplan dégénéré de $\mathbb{R}^{n+1}_1$, et $\overline{P}$ un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^{n+1}_1$, avec $\overline{P} = P \cup F$, où F est un domaine convexe de H et P est de type espace au voisinage de F. Soit $s \in \partial P$, supposons qu'il existe un n-plan H de type espace tel que la projection orthogonale de $\overline{P}$ sur H soit injective au voisinage de s. Alors P est concave en s.*

Démonstration. On prend une suite (H_k) d'hyperplans de type espace qui convergent vers H et qui passent par s. On note $\overline{P}_k$ les cônes en s formés de H_k et des faces de P en s (étendues pour rencontrer les H_k). Les $\overline{P}_k$ sont des cônes convexes de type espace, donc ils sont CAT(1), c'est à dire que leurs links L_k en s sont "larges" (deux points à distance strictement inférieure à π sont joints par une unique géodésique minimisante, voir [10]). Or il est facile de vérifier que la face F_k de L_k

correspondant à H_k converge vers un hémisphère $\overline{H}$ de S^n quand les H_k convergent vers l'hyperplan dégénéré H, et que $L_k \setminus F_k$ converge vers un polyèdre sphérique à bord $\overline{L}$. Or, comme les L_k sont larges, $\overline{L} \cup \overline{H}$ l'est aussi, et on en déduit qu'il existe un point de $\overline{L}$ à distance au moins $\pi/2$ de $\partial\overline{L}$, c'est à dire que P est concave en s. q.e.d.

Le Théorème 6.3 découle de ces lemmes. Soit s un sommet de Q. Dans le premier cas du lemme 6.5, on est dans le premier cas du théorème. Dans le second cas du lemme, on prend le bord de l'un des $Q'_i \cup Q_i$, et on constate qu'il s'agit d'un polyèdre A-admissible de P pour la métrique μ_∞. En effet, le coté extérieur de $\partial(Q'_i \cup Q_i)$ est concave d'après le Lemme 6.7; la condition sur la projection orthogonale sur un hyperplan de type espace (qui doit être localement injective) vient de ce que les $\phi_k(P)$ contiennent un point de H^{n+1}_+, ce qui ne serait pas le cas (par convexité) si deux n-faces de type espace de $\phi_k(n)$ se rencontraient sans que la projection sur un hyperplan de type espace soit localement injective. Pour l'intérieur de $\partial(Q'_i \cup Q_i)$, deux cas se présentent: soit $Q'_i \cup Q_i$ a en s une face qui n'est pas de type espace pour μ_∞, et $Q'_i \cup Q_i$ est concave par définition; soit toutes les faces sont de type espace, et on peut appliquer le Lemme 6.6 pour conclure.

On passe maintenant à un autre résultat de dégénéréscence, moins précis, dans le cas où les intérieurs des polyèdres considérés sont dans S^{n+1}_1. P étant encore un polyèdre de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$, on dira qu'une face f de codimension 1 de P est "B-extrémale" si f borde deux n-faces de type espace F, F' de P, et si, si on prolonge F, F' en des hémisphères H, H' de dimension n bordés par le prolongement de f, la projection orthogonale de H sur H' est bijective. Si P est convexe, il est alors compris entre H et H', et donc reste dans la composante "de Sitter" de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$.

L'énoncé suivant n'interviendra pas dans la suite, mais serait utile si on voulait ajouter au Théorème B une partie "existence".

Théorème 6.8. *Soit P un polyèdre homéomorphe à S^n, et $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'immersions polyèdrales convexes de P dans $\tilde{HS}^{n+1} \setminus H^{n+1}_-$, telle que la suite (μ_k) des métriques induites par les ϕ_k sur P converge vers une métrique μ_∞. Supposons que les $(n-1)$-faces B-extrémales de P pour les (ϕ_k) restent les mêmes indépendemment de k, et que les domaines convexes de $\tilde{HS}^{n+1}$ bordés par les $\phi_k(P)$ sont inclus dans S^{n+1}_1. Alors:*

- *soit il existe une suite (ρ_k) d'isométries de S^{n+1}_1 telle que la suite $(\rho_k \circ \phi_k)$ admette une sous-suite qui converge vers une immersion* *polyèdrale convexe de P dans S_1^{n+1} qui induit μ_∞;*

- *soit il existe dans (P, μ_∞) une hypersurface polyèdrale Q:*
  1. *sur laquelle la restriction de μ_∞ est isométrique à $(S^{n-1}, -can)$;*
  2. *dont toutes les $(n-1)$-faces sont soit dans l'adhérence d'une n-face de type mixte ou dégénérée de (P, μ_∞), soit une $(n-1)$-face B-extrémale de P pour les ϕ_k;*
  3. *qui sépare P en deux composante connexes ouvertes dont chacune contient au moins un sommet.*

Cet énoncé ne contient pas, contrairement au Théorème 6.3, de condition sur la concavité du complémentaire de Q dans P. La preuve est en partie similaire à celle de 6.3. On remplace le Lemme 6.5 par le:

Lemme 6.9. *Soit P un polyèdre, et $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'immersions polyèdrales convexes de P dans S_1^{n+1}, telle que la suite (μ_k) des métriques induites par les ψ_k sur P converge vers une métrique μ_∞. Supposons que les $(n-1)$-faces B-extrémales de P sont les mêmes pour tous les ψ_k, et que les domaines convexes délimités par les $\psi_k(P)$ sont contenus dans S_1^{n+1}. Alors il existe une suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'isométries de S_1^{n+1} et une sous-suite $(\psi'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\rho_k \circ \psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que:*

1. *soit $(\psi'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une immersion polyèdrale convexe $\psi_\infty : P \to S_1^{n+1}$;*
2. *soit il existe $s_+ \in \partial H_+^{n+1}, s_- \in \partial H_-^{n+1}$, et une décomposition de P en polyèdres à bord fermés:*
$$P = Q_+ \cup Q_- \cup Q'_+ \cup Q'_- \cup Q_0$$
   telle que:
   - (a) *$Q_+, Q_- \neq \emptyset$, et $(\alpha_0 \circ \psi'_k)(Q_+) \to s_+$, $(\alpha_0 \circ \psi'_k)(Q_-) \to s_-$;*
   - (b) *pour $i \in \{+, -\}$, $Q'_i \cup Q_i$ est un voisinage de Q_i dans P, et $Q'_i \cap Q_i$ est de codimension 1 dans Q'_i;*
   - (c) *les $(\alpha_0 \circ \psi'_k)(Q'_i)$ convergent vers les hyperplans P_i tangents à $\tilde{Q}^{n+1}$ en s_i;*
   - (d) *la restriction de ψ_∞ à Q_0 est une immersion polyèdrale de Q_0 dans S_1^{n+1};*

(e) *les $(n-1)$-faces de ∂Q_0 sont chacune soit dans l'adhérence d'une n-face mixte ou dégénérée de (P, μ_∞), soit une $(n-1)$-face B-extrémale de P pour les ψ_k.*

La preuve est encore similaire à celle du Lemme 6.5; mais comme les polyèdres considérés délimitent maintenant des domaines de S_1^{n+1}, la seule possibilité de dégénéréscence correspond à un point limite dans ∂H_+^{n+1} et un dans ∂H_-^{n+1}; il est en effet facile de voir que la condition de convexité empêche l'apparition de plusieurs points limite sur ∂H_+^{n+1} (resp. ∂H_-^{n+1}). Le Théorème 6.8 est une conséquence de ce lemme, il suffit de prendre pour polyèdre de codimension 1 de P le bord de $Q_+ \cup Q'_+$ ou de $Q_- \cup Q'_-$.

Quand $n+1=3$, on peut vérifier que la dégénérescence se produit le long d'une courbe B-admissible dans le sens de la Section 4, ce qui est un peu plus précis que ce que nous avons montré ici pour les polyèdres de codimension 1 de P.

Le même type de résultat est valide pour la situation du Théorème C; nous n'énonçons pas le lemme correspondant, car il ne nous sera pas utile dans la suite.

7. Longueurs de géodésiques

On va voir quelques propriétés des métriques induites sur les polyèdres par les plongements convexes dans $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$. En d'autres termes, si on a un polyèdre P homéomorphe à S^n et une "métrique" de type HS sur P, on va voir des conditions nécessaires à l'existence d'une immersion isométrique polyèdrale convexe de (P, μ) dans $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$. Il s'agira de deux types d'énoncés: d'une part des propriétés "de courbure" aux faces de codimension au moins 2 de P, d'autre part des conditions globales concernant les longueurs des géodésiques de type espace, c'est à dire des géodésiques de (P, μ) sur lesquelles la restriction de μ est imaginaire pure et non nulle. La plupart de ces résultats seront utiles ensuite pour la démonstration du Théorème A, en particulier pour montrer que ses conditons sont nécessaires. Nous verrons dans cette section quelles sont les conditions sur les longueurs des géodésiques, et les conditions "de courbure" s'en déduiront dans la section suivante en considérant les links des faces de codimension au moins 2.

Rappelons d'abord des notions connues, en commençant par la

Définition 7.1. Soit γ une courbe polyèdrale dans S_1^{n+1}, c'est à dire une application de $I \in \{S^1, [0,1]\}$ dans la composante "de Sitter" de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$, continue et géodésique sauf en m points $s_1, \cdots, s_m = s_0, s_{m+1} = s_1$. On dira que γ est T-convexe si elle est de type espace (la restriction de d_H aux segments $\gamma([s_{j-1}, s_j])$ est dans $i\mathbb{R}_+^*$) et, pour tout $i \in \mathbb{N}_m$:

- $\gamma([s_{i-1}, s_i])$ et $\gamma([s_i, s_{i+1}])$ sont non alignés;
- le 2-plan P_i de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ engendré par $\gamma([s_{i-1}, s_i])$ et $\gamma([s_i, s_{i+1}])$ est isométrique à $\tilde{\mathrm{HS}}^2$;
- la convexité de l'angle de γ en s_i, vu dans P_i, est partout orientée vers H_+^{n+1} (ou partout orientée vers H_-^{n+1}).

On a une définition analogue pour les courbes régulières:

Définition 7.2. Soit $\gamma : S^1 \to S_1^{n+1}$ une courbe C^2 de type espace, et paramétrée à vitesse unité. On dira que γ est T-convexe si l'accélération de γ est partout non nulle et de type temps.

On dispose du résultat suivant, dû à I. Rivin [18], [12] pour $n = 3$ et à R. Charney et M. Davis [10] en dimension plus grande (on pourra aussi en trouver une version régulière dans [22], [24]):

Proposition 7.3. *La longueur des courbes polyèdrales T-convexes fermées de $\tilde{HS}^{n+1}$ est plus grande que 2π, et strictement plus grande sauf pour les courbes composées de deux segments géodésiques de longueur π.*

La conclusion signifie que, si γ est une courbe T-convexe, la somme des longueurs des segments $\gamma([s_i, s_{i+1}])$, qui sont imaginaires pures, est de la forme ir, avec $r > 2\pi$.

On dispose par ailleurs d'une propriété complémentaire sur les courbes T-convexes:

Proposition 7.4. *Soit S un hyperplan totalement géodésique de type espace de $\tilde{HS}^{n+1}$, et $\gamma : [0,1] \to \tilde{HS}^{n+1}$ une courbe polyèdrale de type espace T-convexe, avec $\gamma(0), \gamma(1) \in S$ et $\gamma(]0,1[) \cap S = \emptyset$. Supposons que $\gamma(]0,1[)$ se trouve entre S et H_+^{n+1}, et que la concavité de γ est partout dirigée vers H_+^{n+1}. Alors la longueur de γ est plus petite que π, et strictement plus petite sauf si γ est géodésique.*

Pour montrer cette proposition, on va passer par la proposition régulière analogue suivante:

Proposition 7.5. *Soit S un hyperplan totalement géodésique de type espace de $\tilde{HS}^{n+1}$, et $g : [0,1] \to \tilde{HS}^{n+1}$ une courbe C^2 de type* *espace T-convexe, avec $g(0), g(1) \in S$ et $g(]0,1[) \cap S = \emptyset$. Supposons que $g(]0,1[)$ se trouve entre S et H^{n+1}_+, et que la concavité de g est partout dirigée vers H^{n+1}_+. Alors la longueur de g est strictement plus petite que π.*

On peut en effet approcher une courbe polyèdrale T-convexe par une suite de courbes régulières T-convexes (obtenues par régularisation), ce qui montre que 7.5 implique 7.4; réciproquement, on peut approcher une courbe régulière T-convexe par une suite de courbes polyèdrales T-convexes (obtenues par discrétisation). Donnons une preuve de 7.5 qui repose sur une idée essentiellement due à François Labourie [14]:

Démonstration. Pour $x \in S^{n+1}_1$, on va noter $r(x)$ la longueur de l'unique segment géodésique issu de S, orthogonal à S, qui aboutit en x, et $f(x) := \mathrm{sh}(r(x))$. On peut alors vérifier par un calcul direct que

$$\nabla df + f = 0 \tag{6}$$

sur S^{n+1}_1 (en fait, (6) est plus facile à comprendre si on remarque, suivant B. Okun, que f est la restriction à S^{n+1}_1 d'une coordonnée linéaire dans le modèle où S^{n+1}_1 est une hypersurface ombilique de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{n+2}_1$).

Mais la restriction $\overline{f}$ de f à g vérifie

$$\overline{f}'' = (\nabla df)(g', g') + df(\nabla_{g'} g').$$

Or g est T-convexe et paramétrée à vitesse 1, donc $\nabla_{g'} g'$ est de type temps et dirigée vers H^{n+1}_-. Puisque g est entre S et H^{n+1}_+ et que $f := \mathrm{sh}(r)$, $df(\nabla_{g'} g') < 0$, donc

$$\overline{f}'' + \overline{f} < 0,$$

Comme $\overline{f} \geq 0$, ceci peut s'écrire sous la forme $\overline{f}'' + \lambda \overline{f} = 0$, avec $\lambda(t) > 1$ sur $[0, L]$; le théorème de Sturm montre alors que $L < \pi$. q.e.d.

On a par ailleurs la propriété "opposée" suivante, proche de 7.3:

Proposition 7.6. *Soit S un hyperplan totalement géodésique de type espace de $\tilde{H}S^{n+1}$, et $g : [0,1] \to \tilde{H}S^{n+1}$ une courbe C^2 de type espace T-convexe, avec $g(0), g(1) \in S$ et $g(]0,1[) \cap S = \emptyset$. Supposons que $\gamma(]0,1[)$ se trouve entre S et H^{n+1}_+, et que la concavité de γ est partout dirigée vers H^{n+1}_-. Alors la longueur de g est strictement plus grande que π.*

La démonstration est exactement la même que pour 7.5, mais avec inversion du signe dans les inégalités. On en déduit par passage au cas polyèdral la

Proposition 7.7. *Soit S un hyperplan totalement géodésique de type espace de $\tilde{HS}^{n+1}$, et $\gamma : [0,1] \to \tilde{HS}^{n+1}$ une courbe polyèdrale de type espace T-convexe, avec $\gamma(0), \gamma(1) \in S$ et $\gamma(]0,1[) \cap S = \emptyset$. Supposons que $\gamma(]0,1[)$ se trouve entre S et H^{n+1}_+, et que la concavité de γ est partout dirigée vers H^{n+1}_-. Alors la longueur de γ est plus grande que π, et strictement plus grande sauf si γ est géodésique.*

Si on se restreint au cas où $n+1=2$, on a d'autres résultats. On commence par une assertion simple:

Assertion 7.8. Soit γ une courbe polyèdrale convexe de $\tilde{\mathrm{HS}}^2$, avec $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma'$, où γ_0 est un segment géodésique dont les deux extrémités sont dans S^2_1 et qui rencontre H^2_+, et γ' est composée de segments de type temps ou hyperboliques, rencontre H^2_+, et a tous ses angles orientés dans $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Alors

$$L(\gamma_0) = i\pi + r, \quad L(\gamma') = i\pi + r', \quad r' \geq r \geq 0$$

De plus, si $r = 0$ alors $r' = 0$; et si $r = r' > 0$, alors γ_0 et γ' sont confondus.

Démonstration. γ est convexe, donc contenue dans un hémisphère de $\tilde{\mathrm{HS}}^2$. Donc γ_0 l'est aussi, et on peut appliquer directement la définition de d_H pour calculer la distance entre les extrémités x_1, x_2 de γ_0 dans $\tilde{\mathrm{HS}}^2$. On obtient que $L(\gamma_0) = d_H(x_1, x_2) \in i\pi + \mathbb{R}_+$.

Si $L(\gamma_0) = i\pi$, alors x_1 et x_2 sont antipodaux; comme γ est convexe, γ' doit être géodésique, et $L(\gamma') = i\pi$.

Considérons la courbe γ^* composée de la courbe $(\gamma')^*$ duale de γ', jointe au point $(\gamma_0)^*$ dual de γ_0 avec l'orientation inverse de celle de γ'. γ^* est donc une courbe non convexe. On vérifie en utilisant la convexité de γ que γ^* est dans la composante S^2_1 de $\tilde{\mathrm{HS}}^2$. On applique le théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces lorentziennes (voir [25], Théorème A.9) et on obtient que la somme des angles de γ^* est $2\pi - iA$, où A est l'aire (au sens usuel) de l'intérieur de γ^* dans S^2_1, qui est positive. En appliquant à nouveau la dualité, on en déduit que

$$-iL(\gamma_0) + iL(\gamma') = iA,$$

et donc que $r' = r + A \geq r$, et que si $r' = r$, alors $A = 0$, donc l'intérieur de la courbe γ^* est vide, et $\gamma_0 = \gamma'$. q.e.d.

On a maintenant la:

Proposition 7.9. *Soit $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ une courbe polyèdrale convexe de $\tilde{HS}^2$ avec $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{x_1, x_2\} \subset S^2_1$; supposons que:*

- *γ_1 rencontre $\overline{H^2_+}$, a tous ses segments de type temps, mixte ou hyperboliques, et tous ses angles orientés dans $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$;*
- *γ_2 a tous ses segments de type espace;*

Alors $L(\gamma_1) = i\pi + r_1$, $L(\gamma_2) = ir_2$, avec $r_1 \in \mathbb{R}$, $r_2 \in \mathbb{R}^*_+$. De plus, soit $r_1 \geq 0$, soit $r_2 \leq \pi$, et si $r_1 = 0$ et $r_2 = \pi$, alors γ_1 et γ_2 sont des segments géodésiques.

Démonstration. On note γ_0 le segment géodésique joignant x_1 et x_2 dans le domaine convexe délimité par γ. On va considérer deux cas:

1. γ_0 rencontre $\overline{H^2_+}$. On applique l'assertion 7.8 à la courbe formée de γ_0 et γ_1, et on voit que $r_1 > 0$.
2. γ_0 est de type espace. On applique alors la Proposition 7.4, qui montre que $r_2 \leq \pi$.

Si $r_1 = 0$, et $r_2 = \pi$, alors quel que soit le cas dans lequel on se trouve, x_1 et x_2 sont antipodaux (car $r_1 = 0$ dans le premier cas, et car $r_2 = \pi$ dans le second). γ_1 et γ_2 sont donc des segments géodésiques. q.e.d.

Toujours pour $n + 1 = 2$, on peut passer au cas où la courbe polyèdrale fermée qu'on considère n'a plus un, mais plusieurs segments qui rencontrent H^2_+; on obtient la:

Proposition 7.10. *Soit γ une courbe polyèdrale fermée convexe de $\tilde{HS}^2$, composée successivement de $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2N} = \gamma_0$ où:*

- *$N \geq 2$;*
- *$\gamma_1, \gamma_3, \cdots, \gamma_{2N-1}$ rencontrent $\overline{H^2_+}$, et ont tous leurs segments de type temps ou hyperboliques ou dégénérés, et tous leurs angles dans $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$;*
- *$\gamma_2, \gamma_4, \cdots, \gamma_{2N}$ sont de type espace (éventuellement réduits à un point)..*

Alors pour $i \in \mathbb{N}_{2N}$ impair, $L(\gamma_i) = i\pi + r_i$, avec $r_i \geq 0$; de plus, si l'un des r_i (i impair) est nul, alors $N = 2$, $r_1 = r_3 = 0$, et γ_2, γ_4 sont réduits à des points.

Démonstration. Notons d'abord γ_1' le segment géodésique qui joint les extrémités de γ_1 dans le convexe délimité par γ. Alors γ_1' rencontre $\overline{H^2_+}$. On peut raisonner comme dans la preuve précédente pour montrer que $L(\gamma_1') = i\pi + r_1', r_1' \geq 0$. Puis on applique l'assertion 7.8 pour voir que $L(\gamma_1) = i\pi + r_1, r_1 \geq 0$. Il en est de même pour les autres i impairs.

Supposons que $r_1 = 0$. Alors $L(\gamma_1') = i\pi = L(\gamma_1)$, et, d'après 7.8, $\gamma_1 = \gamma_1'$. Alors les extrémités de γ_1 sont antipodales. Comme γ est convexe, elle ne peut être constituée que d'un autre segment géodésique, qui doit être γ_3; ainsi, $L(\gamma_3) = i\pi$, et $L(\gamma_2) = L(\gamma_4) = 0$. Le raisonnement est bien sur le même si un autre $r_i = 0$ est nul pour i impair. q.e.d.

On déduit des assertions précédentes le résultat significatif suivant:

Lemme 7.11. *Soit P un polyèdre convexe de $\tilde{HS}^3 \setminus \overline{H}^3_-$ qui délimite un domaine convexe qui rencontre $\overline{H}^3_+$, et soit γ une courbe A-admissible de P pour la métrique HS marquée induite. Alors $L(\gamma) > 2\pi$.*

Démonstration. Supposons d'abord qu'en aucun sommet de γ, les deux segments de γ ne sont des arêtes successives d'une face dégénérée de P. On va montrer que l'image de γ dans $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ est T-convexe, le lemme sera alors une conséquence de la Proposition 7.3. Il faut montrer que, si γ_1 et γ_2 sont deux segments géodésiques successifs d'une courbe A-admissible γ, alors le plan p engendré par γ_1 et γ_2 est de type mixte. On note P_+ et P_- les deux composantes connexes de $P \setminus \gamma$, et on considère quatre cas:

1. γ_1, γ_2 se rencontrent en un sommet s, et, dans P_+ et dans P_-, toutes les faces sont de type espace en s et la somme des angles en s est au moins π. Considérons le link L de P en s. C'est une courbe dans $\tilde{\mathrm{HS}}^2$, qui se décompose en $L = L_+ \cup L_-$, L_+ et L_- correspondant aux composantes connexes P_+ et P_- de $P \setminus \gamma$ au voisinage de s, les extrémités (communes) de L_+ et L_- étant jointe par une géodésique g correspondant à p.

   Maintenant, si p était de type espace (resp. dégénéré) on pourrait appliquer la Proposition 7.7, et L_+ et L_- seraient de longueur strictement inférieure à π. Or c'est impossible puisque les sommes des angles des faces de P_+ et de P_- en s sont au plus π.

2. γ_1, γ_2 sont dans des faces de type espace et se rencontrent sur une arête; c'est un cas particulier du cas (1) si on ajoute un "faux" sommet en $\gamma_1 \cap \gamma_2$. On peut donc faire la même démonstration.

3. γ_1 et γ_2 se rencontrent en un sommet s, et il y a dans P_+ et dans P_-, au voisinage de s, une face de type mixte (notée F_+ et F_- respectivement). Alors les prolongements de F_+ et F_- en des hémisphères rencontrent H^3_+, et, par convexité, le plan p rencontre aussi H^3_+.

4. γ_1 et γ_2 se rencontrent en un sommet s, P_+ contient une face F_+ mixte au voisinage de s, et la somme des angles en s des faces de P_- est strictement plus grande que π. Alors on raisonne comme pour le point (1) pour montrer que la géodésique g de $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ qui correspond à p dans le link de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ en s ne peut pas être de type espace (ou dégénéré) sans quoi, d'après 7.7, le link de P_- serait de longueur au plus π.

On peut maintenant appliquer la Proposition 7.3, et on voit que la longueur de γ est strictement supérieure à 2π; en effet, si $L(\gamma) = 2\pi$, alors γ serait composée de deux segments de longueur π, et P devrait contenir deux points antipodaux, ce qui est exclu car on ne considère que des polyèdres ayant au moins 3 sommets.

Si on suppose que, en certains sommets de γ, les deux segments de γ sont des arêtes successives d'une face dégénérée, alors γ n'est pas T-convexe en ces points; mais on vérifie facilement qu'elle le devient si on la déforme un peu, par exemple en déformant P pour éliminer les faces dégénérées. Ainsi, $L(\gamma) \geq 2\pi$; et $L(\gamma) > 2\pi$ sauf si γ forme le bord d'une face dégénérée de P, alors $L(\gamma) = 2\pi$. Comme on a exclu ce cas dans la définition des courbes A-admissibles, on obtient bien le résultat.

q.e.d.

Dans le cas particulier où P ne rencontre pas ∂H^{n+1}_+ (c'est à dire que toutes les faces de P sont de type espace), ce lemme était connu (voir [12] pour $n+1=3$, et [10] en dimension plus grande). Dans ce cas, les courbes A-admissibles sont simplement les géodésiques.

Nous allons passer à des résultats concernant un autre type de convexité, valable cette fois-ci pour les sous-variétés (ou les polyèdres) de codimension 2 de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$. Définissons d'abord cette notion pour les courbes régulières:

Définition 7.12. Soit $g : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to S^3_1 \subset \tilde{\mathrm{HS}}^3$ une courbe C^2 de type espace paramétrée à vitesse unité; on dira que g est E-convexe si, pour tout $t \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, $g''(t)$ est (non nul et) de type espace, et si g est "simple" au sens suivant: si S est un plan totalement géodésique de type espace de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ et si π est la projection orthogonale de S^3_1 sur S, alors $\pi \circ g$ est un plongement.

On vérifie facilement que la seconde partie de la définition est indépendante du choix de S. De manière analogue, on a

Définition 7.13. Soit $\gamma : S^1 \to \tilde{\mathrm{HS}}^3$ une courbe polyèdrale de $S^3_1 \subset \tilde{\mathrm{HS}}^3$ de type espace, de sommets successifs $s_1, \cdots, s_m = s_0, s_{m+1} = s_1$. On dira que γ est E-convexe si:

- pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, $\gamma([s_{i-1}, s_i])$ et $\gamma([s_i, s_{i+1}])$ ne sont pas alignés et définissent un 2-plan de type espace;
- pour tout plan S de type espace de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$, le projeté orthogonal de $\gamma(S^1)$ sur S est une courbe polyèdrale fermée simple strictement convexe.

Comme dans le cas des courbes T-convexes, on peut approcher une courbe régulière E-convexe par une suite de courbe polyèdrales E-convexes, et réciproquement. Or on dispose de la:

Proposition 7.14. *Les courbes C^2 E-convexes de S^3_1 sont de longueur strictement inférieure à 2π.*

La preuve est reportée un peu plus loin. On en déduit par approximation le

Corollaire 7.15. *Les courbes polyèdrales E-convexes de S^3_1 sont de longueur inférieure à 2π, et strictement inférieure sauf pour les courbes composées de deux segments géodésiques de longueur π.*

Nous aurons besoin pour montrer la Proposition 7.14 de l'assertion élémentaire (et très probablement classique) suivante. On dit qu'une courbe de $\mathbb{R}^3$ est strictement convexe si son accélération ne s'annule jamais, et si elle est sur le bord de son enveloppe convexe. Alors:

Assertion 7.16. Soit $g : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$ une courbe fermée strictement convexe, paramétrée à vitesse unité. Alors l'enveloppe convexe de g est contenue dans la réunion de ses plans osculateurs.

Démonstration. On note Ω l'enveloppe convexe de g, et, pour $t \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, on appelle $P(t)$ le plan osculateur à g en $g(t)$, qui est bien défini puisque l'accélération de g n'est jamais nulle. g étant convexe, elle est sur le bord $\partial\Omega$ de Ω, et $\partial\Omega$ se décompose donc en $\Sigma_+ \cup \Sigma_-$, avec $\Sigma_+ \cap \Sigma_- = g(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$.

Σ_+ admet un feuilletage par des géodésiques de $\mathbb{R}^3$, et il existe un $t_+ \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ tel que ce feuilletage n'est pas transverse à g en $g(t_+)$. On vérifie alors (cf. [26]) que $P(t_+)$ est tangent à Σ_+ en $g(t_+)$. De même, il existe $t_- \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ tel que $P(t_-)$ soit tangent à Σ_-.

Ω étant convexe, on en déduit (si on oriente convenablement les $P(t)$) que les points de Ω sont tous au-dessus de $P(t_-)$ et au-dessous de $P(t_+)$. On obtient donc le résultat par continuité de $P(t)$. q.e.d.

On peut utiliser cette assertion pour prouver 7.14 par un raisonnement géométrique basé sur l'existence de surfaces maximales s'appuyant sur un contour donné:

Démonstration de la Proposition 7.14. Soit g une courbe E-convexe. On va procéder en plusieurs étapes pour montrer que la longueur de g est strictement inférieure à 2π:

1. Il existe une surface Σ de type espace, contenue dans un hémisphère de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$, telle que $\partial\Sigma = g$. Pour le voir, on considère l'ensemble des duaux des 2-plans de type espace de S^3_1 qui sont tangents à g. C'est un cylindre complet de H^3_+ (ou de H^3_- suivant l'orientation qu'on choisit sur les plans) qui est le bord d'un domaine convexe Ω (la convexité de Ω vient de la E-convexité de g). On peut prendre une surface $\overline{\Sigma}$ de Ω qui sépare Ω en deux composantes connexes, et telle que $\partial\overline{\Sigma} \subset \partial\Omega$. Puis on considère l'enveloppe Σ des 2-plans duaux des points de $\overline{\Sigma}$. C'est une surface de type espace de S^3_1, et les plans duaux des points de $\partial\overline{\Sigma}$ sont tangents à g, ce qui permet de montrer que $\partial\Sigma = g$.

2. On note $\mathcal{F}$ le "domaine de dépendance" de Σ, c'est à dire le plus petit fermé de S^3_1 contenant Σ dont le bord est réunion de courbes de type lumière passant par g. On vérifie qu'on peut aussi définir $\mathcal{F}$ comme l'ensemble des points $x \in S^3_1$ tels que toutes les géodésiques de type temps ou lumière passant par x rencontrent Σ.

3. $\mathcal{F}$ est compact; en effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver (par compacité dans le modèle sphérique de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$) un point $x \in \tilde{Q}^3$ tel que toutes les géodésiques de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ passant par x (c'est à dire dont l'image dans le modèle sphérique de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ est une géodésique passant par x) rencontrent Σ. g serait alors du même coté que H^3_+ du plan (dégénéré) P_0 tangent à $\tilde{Q}^3$ en x. Mais alors l'enveloppe convexe de g (prise dans un modèle projectif adapté d'un hémisphère de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$) rencontrerait nécessairement

$\tilde{Q}^3$. D'après l'assertion 7.16, cela impliquerait qu'il existe un plan osculateur à g qui rencontre aussi $\tilde{Q}^3$. Or c'est impossible, car la E-convexité de g signifie justement que ses plans osculateurs sont de type espace, et donc disjoints de $\tilde{Q}^3$.

4. On peut donc appliquer un résultat de Gehrardt (voir [11], [5] ou [6], p. 168, Théorème 4.2) qui nous montre qu'il existe une surface Σ' de type espace maximale telle que $\partial\Sigma' = \partial\Sigma = g$.

5. Σ' étant maximale, sa seconde forme fondamentale a des valeurs propres de signe opposé (ou toutes deux nulles) et la courbure de la métrique induite est — d'après la formule de Gauss — au moins 1.

6. Comme g est E-convexe, le bord g de Σ' est localement strictement convexe; en tant que courbe convexe plongée d'une surface à courbure $K \geq 1$, sa longueur est strictement majorée par 2π.

q.e.d.

On aura aussi besoin d'une notion un peu moins contraignante:

Définition 7.17. Soit $\gamma : S^1 \to \tilde{\mathrm{HS}}^3$ une courbe polyèdrale de $S^3_1 \subset \tilde{\mathrm{HS}}^3$ de type espace, de sommets successifs $s_1, \cdots, s_m = s_0, s_{m+1} = s_1$. On dira que γ est E'-convexe si:

- pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, les segments $[s_{i-1}, s_i]$ et $[s_i, s_{i+1}]$ ne sont pas alignés, et le domaine convexe d'un plan totalement géodésique délimité par leurs prolongement en des segments de longueur π issus de s_i ne rencontre pas $H^3_+ \cup H^3_-$;
- pour tout plan S de type espace de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$, le projeté orthogonal de $\gamma(S^1)$ sur S est une courbe polyèdrale fermée simple strictement convexe.

La première condition est vérifiée pour les courbes E-convexes, car le plan engendré par $[s_{i-1}, s_i]$ et $[s_i, s_{i+1}]$ est alors de type espace. Si ce plan est de type mixte, la condition peut quand même être vérifiée, γ est alors E'-convexe mais pas E-convexe.

Le comportement des courbes E'-convexes est similaire à celui des courbes E-convexes. En effet

Assertion 7.18. Soit γ une courbe polyèdrale E'-convexe, $\epsilon > 0$, et U un voisinage de γ dans $\tilde{\mathrm{HS}}^3$. Il existe une courbe polyèdrale E-convexe γ' dans U telle que $|L(\gamma') - L(\gamma)| \leq \epsilon$.

Démonstration. Soit s un sommet de γ où γ est E'-convexe mais pas E-convexe. Si γ_i et γ_{i+1} sont deux segments de γ qui se rencontrent en s, le 2-plan P_0 engendré par γ_i et γ_{i+1} est de type mixte ou dégénéré (sans quoi γ serait E-convexe en s) mais le domaine convexe de P_0 délimité par γ_i et γ_{i+1} ne rencontre pas $\overline{H}^3_+ \cup \overline{H}^3_-$ (car γ est E'-convexe).

Le link de γ en s est donc composé de deux points p_i, p_{i+1} qui sont joints par un segment géodésique p_0 de type temps dans $S^2_1 \setminus \tilde{\mathrm{HS}}^2_1$. Notons d_+, d_- les points de $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ duaux de p_0 pour les deux orientations possibles. Les géodésiques joignant p_i et p_{i+1} à d_+ (ou à d_-), qui sont normales à p_0, sont de type espace.

On modifie γ de la manière suivante: on la "coupe" en s, puis on "écarte" les segments γ_i et γ_{i+1} pour ajouter un petit segment s_0 dont la direction est donnée par d_+. On obtient ainsi une courbe dont la projection sur un 2-plan de type espace est convexe (si on place s_0 convenablement). De plus, le 2-plan engendré par s_0 et γ_i (ou par s_0 et γ_{i+1}) est de type espace, car la géodésique passant par p_i et d_+ est de type espace dans $\tilde{\mathrm{HS}}^2$.

En faisant subir la même modification à tous les sommets où γ est E'-convexe mais pas E-convexe, on obtient une courbe E-convexe. q.e.d.

On en déduit en utilisant le corollaire 7.15 le

Corollaire 7.19. *Les courbes polyèdrales E'-convexes de S^3_1 sont de longueur inférieure à 2π, et strictement inférieure sauf pour les courbes composées de deux segments géodésiques de longueur π.*

Maintenant, on peut déduire des énoncés précédents le

Lemme 7.20. *Soit P un polyèdre convexe de $\tilde{HS}^3$, et soit γ une courbe simple B-admissible de P pour la métrique HS marquée induite. Alors la longueur de γ est strictement inférieure à 2π.*

Démonstration. On va montrer que l'image de γ est E'-convexe, le résultat sur la longueur s'en déduira en utilisant le corollaire 7.19.

Il suffit en fait de montrer que, si γ_i et γ_{i+1} sont deux segments successifs de γ, alors le domaine convexe délimité par γ_i et γ_{i+1} dans le 2-plan de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ engendré ces deux segments ne rencontre pas $H^3_+ \cup H^3_-$; le fait que γ est "simple" (dans le sens de la définition 7.13) s'en déduit en utilisant la convexité de P.

On considère le link de P en $s := \gamma_i \cap \gamma_{i+1}$. C'est une courbe fermée

$c \subset \tilde{\mathrm{HS}}^2$, avec deux points p', p'' correspondant à γ_i, γ_{i+1}. Nous devons montrer que le segment géodésique g_0 dont les extrémités sont p', p'' ne rencontre pas $H^2_+ \cup H^2_-$. On sait, d'après la définition d'une courbe B-admissible, que chaque composante connexe c' ou c'' de $c \setminus \{p', p''\}$ a soit un segment de type espace, soit une longueur de la forme $i\pi - r, r > 0$.

Supposons pour simplifier que c' est du même coté de g_0 que H^2_+. Supposons par exemple que g_0 rencontre H^2_+. Alors c' ne pourrait pas avoir de segment de type espace par convexité, et ne pourrait pas non plus avoir une longueur de la forme $i\pi - r$, $r > 0$, d'après l'assertion 7.8. γ ne pourrait donc pas être B-admissible. g_0 ne peut donc pas rencontrer H^2_+. De même, g_0 ne peut pas rencontrer H^2_-, donc γ est bien E'-convexe dans S^3_1. q.e.d.

On peut remarquer que les résultats sur les courbes E-convexes s'étendent en dimension supérieure. On définit pour cela:

Définition 7.21. Soit $\phi : S^{n-1} \to \tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ une immersion C^2. On dit que ϕ est E-convexe si $T\phi$ est partout injective, ϕ est de type espace (c'est à dire que l'image de $T\phi$ est partout de type espace) et si, pour tout $(x, v) \in TS^{n-1}$, $I\!I_x(v, v)$ est de type espace.

On a l'analogue polyèdral suivant:

Définition 7.22. Soit P un polyèdre homéomorphe à S^{n-1}, et $f : P \to \tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$ une immersion polyèdrale. f est E-convexe si:

- f est de type espace non dégénéré, c'est à dire que les images des $(n-1)$-faces de P sont de type espace et de dimension $n-1$;
- pour tout hyperplan S de type espace de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$, la projection orthogonale de $f(P)$ sur S est strictement convexe;
- en chaque sommet s de P, l'hyperplan osculateur à $f(P)$ en $f(s)$ est de type espace.

Comme pour les courbes, on peut approcher un polyèdre E-convexe par une suite de sous-variété régulières E-convexes, et réciproquement. L'extension de la Proposition 7.14 est:

Proposition 7.23. *Soit $n \geq 2$, et $\phi : S^{n-1} \to \tilde{HS}^{n+1}$ une application E-convexe, et σ la métrique induite par ϕ sur S^{n-1}; alors le diamètre de (S^{n-1}, σ) est strictement inférieur à π.*

Démonstration. Pour $n = 2$, c'est 7.14; pour $n \geq 3$, on vérifie facilement (grâce à la formule de Gauss) que la condition de convexité sur ϕ

assure que σ à une courbure sectionnelle strictement minorée par 1. Le résultat s'en déduit de manière classique. q.e.d.

On a un résultat analogue pour les polyèdres, avec un cas d'égalité qui correspond aux polyèdres composés de deux hémisphères totalement géodésiques.

Remarque. Les notions de T-convexité et de E-convexité sont utilisables en général dans les variétés pseudo-riemanniennes. On peut les définir de la manière suivante (dans le cas régulier): si (M, μ) est une variété de signature (p, q), on dit qu'une sous-variété V de M sur laquelle la métrique induite est de signature $(p', q-1)$ (avec $p' \leq p$) est T-convexe si pour tout $(x, v) \in TV$, $I\!I(v, v)$ est (non nul et) de type temps. De même, si la métrique induite sur V est de signature $(p-1, q')$ (avec $q' \leq q$) on dit que V est E-convexe si $I\!I(v, v)$ est de type espace (non nul) pour tout $(x, v) \in TV$.

8. Conditions de courbure

Passons maintenant aux conditions "de courbures" satisfaites aux sommets des polyèdres convexes de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$. Elle proviennent de l'application des résultats de la section précédente aux links des polyèdres aux sommets. Il est peut-être possible d'étendre certains des résultats que nous allons donner au cas des polyèdres convexes de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$; mais nous ne l'avons pas fait partout, car c'est le cas $n = 2$ qui nous sera utile dans la section suivante, et que nous ne voulons pas trop alourdir les énoncés.

Dans les assertions que nous allons écrire, la convexité implique des inégalités de courbure fermées; on vérifie facilement que, si on suppose que les polyèdres sont non dégénérés aux sommets considérés (c'est à dire qu'ils ne sont pas localement inclus dans la réunion de deux plans), alors on obtient des inégalités strictes.

Dans la suite, nous utiliserons la notion de courbure singulière d'un polyèdre P de dimension 2 en un sommet s. C'est simplement $2\pi - \sum \theta_i$, où les θ_i sont les angles (intérieurs) des faces de P en s. Cette définition, classique dans le cas riemannien, s'étend bien sur aux polyèdres de type HS de dimension 2; les angles θ_i sont alors complexes. Si on veut essayer d'étendre certains des résultats qui suivent aux dimensions $n \geq 2$, il faudra probablement remplacer les hypothèses sur la courbure singulière aux sommets par des hypothèses locales de type CAT.

Rappelons d'abord un résultat classique pour les polyèdres hyperboliques:

Proposition 8.1. *Soit P un polyèdre convexe de $\tilde{HS}^{n+1}$, et f une p-face de P qui rencontre H_+^{n+1}. Alors la métrique induite sur P admet une singularité conique sur f au sens "classique" suivant: le diamètre du link de P en f est au plus π. Si $n+1=3$ et si f est un sommet hyperbolique de P, la courbure singulière en f est donc positive ou nulle, et elle est nulle si et seulement si P est dégénéré en s, c'est à dire localement contenu dans la réunion de deux plans.*

Démonstration. On considère le link L de P en f; c'est un polyèdre convexe dans le dual de f dans $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$, donc dans S^{n-p}. Le diamètre de L est donc au plus π.

Pour $n+1=3$, la somme des angles en f des faces de P est donc au plus 2π, donc la courbure singulière de P en f est positive ou nulle. Si elle est nulle, alors la longueur de L est 2π, L est nécessairement la réunion de deux demi grands cercles de S^2; P est donc inclus au voisinage de f dans la réunion des deux plans correspondants. q.e.d.

Passons à un sommet s de P qui est dans la composante "de Sitter" de $\tilde{\mathrm{HS}}^{n+1}$. On va s'interesser aux cas où les n-faces de P arrivant en s sont de type espace, et donner deux résultat. D'abord

Proposition 8.2. *Supposons que toutes les faces de P en s sont de type espace, et qu'il existe un n-plan de type espace H de $\tilde{HS}^{n+1}$ tel que la projection orthogonale de P sur H soit localement injective au voisinage de s. Alors P est $CAT(1)$ au voisinage de s. Si $n+1=3$, la courbure singulière de P en s est donc négative ou nulle, et elle est nulle si et seulement si P est dégénéré en s.*

Démonstration. Le link L de P en s est maintenant un polyèdre de type espace dans $S_1^n \subset \tilde{\mathrm{HS}}^n$, qui est T-convexe (au sens de la fin de la Section 7) d'après la convexité de P. Il est alors facile de vérifier (voir [10]) que ses géodésiques sont des courbes T-convexes de S_1^n. D'après la Proposition 7.3, leurs longueur est donc au moins 2π. Ainsi, le link de P en s est "large", et P est CAT(1) au voisinage de s.

Si $n+1=3$, L est une courbe de S_1^2 qui est T-convexe; si la courbure singulière de P en s est nulle, alors L est composée de deux segments géodésiques de longueur π, et P est dégénéré en s. q.e.d.

Ensuite, nous pouvons considérer le cas où s est un sommet de P tel que le cône convexe délimité par les prolongements des faces de P en s

reste dans S_1^{n+1}; nous allons limiter l'énoncé au cas où $n+1=3$. Dans ce cas, $s \in E \cap M$. De plus, le link de P en s est une courbe (convexe) de S_1^2, car elle ne peut rencontrer ni $\overline{H}_+^2$, ni $\overline{H}_-^2$, et on peut appliquer la

Proposition 8.3. *Supposons que le link c de P en s reste dans S_1^2. Alors il existe un voisinage Ω de s dans P tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$, où:*

- *les Ω_i sont des fermés, et $\Omega_i \cap \Omega_{i+1}$ est l'intersection de Ω avec une arête de σ;*
- *Ω_1, Ω_3 sont composés de faces de type espace, et les sommes r_1, r_3 des angles en s de leurs faces sont dans $[0, \pi[$;*
- *Ω_2, Ω_4 sont composés de faces mixtes ou dégénérées, et les sommes r_2, r_4 des angles en s de leurs faces sont dans $i\mathbb{R}^+$.*

De plus, P est dégénéré en s si et seulement si $r_1 = \pi$, et c'est le cas si et seulement si $r_3 = \pi$ et $r_2 = r_4 = 0$.

Démonstration. La décomposition décrite est immédiate d'après la convexité de c. Pour voir que $r_1, r_3 \in [0, \pi[$, on applique la Proposition 7.5 au link de P en s. Enfin, si $r_1 = \pi$, alors les extrémités dans S_1^2 du segment de c correspondant à Ω_1 sont antipodaux; on en déduit par convexité de c que c est composé de deux segments géodésiques chacun de longueur $i\pi$. q.e.d.

En utilisant la Proposition 7.9, on obtient par passage au link la:

Proposition 8.4. *Soit s un sommet "de Sitter" de P, ayant un voisinage $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, où:*

- *les $\Omega_i \setminus \{s\}$ sont connexes;*
- *Ω_1 est composé de faces de type mixte ou dégénérées;*
- *Ω_2 est réunion de faces de type espace.*

Notons s_i les sommes des angles en s des faces de Ω_i. Alors $s_1 = i\pi - r_1$ avec $r_1 \in \mathbb{R}$, et $s_2 \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $r_1 \geq 0$ ou $s_2 \leq \pi$; et si $r_1 = 0$ et $s_2 = \pi$, alors P est dégénéré en s, c'est à dire localement contenu dans la réunion de deux plans.

De même, on peut traduire la Proposition 7.10 pour obtenir la:

Proposition 8.5. *Soit s un sommet extérieur de P tel que les faces de P en s soient successivement $F_1, F_2, \cdots, F_n$, et $1 = p_0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{2N}$ avec:*

- *pour i pair et $p_i \leq j < p_{i+1}$, F_j est de type mixte ou dégénéré;*
- *pour i pair et $p_i \leq j < p_{i+1} - 1$, la projection orthogonale de $F_j \cup F_{j+1}$ sur un plan de type mixte est injective;*
- *pour i impair et $p_i \leq j < p_{i+1}$, F_j est de type espace.*

Notons θ_i l'angle de F_i en s. Alors pour i pair, on a

$$\sum_{j=p_i}^{p_{i+1}-1} \theta_j = i\pi - r_i$$

avec $r_i \in \mathbb{R}_+$. De plus, si l'un des r_i (i pair) est nul, alors P est dégénéré en s.

Nous allons encore donner un résultat concernant le cas où toutes les faces de P en s sont de type mixte. Nous utiliserons pour cela l'énoncé suivant:

Assertion 8.6. Soit γ une courbe polyèdrale fermée convexe de $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ contenant deux points p_+, p_- respectivement dans H^2_+, H^2_-. Alors toutes les arêtes qui sont dans S^2_1 sont de type temps. De plus, la longueur de γ est de la forme $2\pi i - r$, avec $r \in \mathbb{R}_+$. Enfin, $r = 0$ si et seulement si γ est composé de deux segments de longueur $i\pi$, et p_+, p_- sont alors antipodaux.

Démonstration. La première assertion est immédiate: si une arête est de type espace, alors elle coupe $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ en deux composantes contenant l'une H^2_+, l'autre H^2_-; par convexité, γ reste dans l'une d'elles, ce qui contredit l'hypothèse.

On considère ensuite la courbe $\tilde{\gamma}$ duale de γ; comme les arêtes de γ qui sont dans S^2_1 sont de type temps, $\tilde{\gamma}$ reste dans S^2_1. Puisque la dualité échange (à un coefficient $-i$ près) les longueurs des arêtes et les angles, il suffit de montrer que la somme des angles de $\tilde{\gamma}$ est de la forme $2\pi + ir'$, avec $r' \in \mathbb{R}_+$. Or c'est une conséquence immédiate du Théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces lorentziennes (Théorème A.9 de [25]).

Si $r = 0$, l'aire de l'intérieur de $\tilde{\gamma}$ est nulle, donc $\tilde{\gamma}$ est composée de deux segments géodésiques, et il en est de même pour γ. q.e.d.

On en déduit par passage au link de P en s la

Proposition 8.7. *Supposons que $s \in S^3_1$, et qu'il existe deux arêtes a_+, a_- de P partant de s et dirigées respectivement vers H^3_+ et H^3_-. Alors les faces de P en s sont de type mixte; les angles en s des faces de P sont tous de la forme $\epsilon\pi/2 + ir$ avec $\epsilon \in \{0, 1, 2\}$ et $r \in \mathbb{R}$, et leur somme est de la forme $2\pi + ir_0$, avec $r_0 \in \mathbb{R}_+$. De plus, $r_0 = 0$ si et seulement si P est dégénéré en s.*

Enfin, on peut utiliser les résultats précédents pour le:

Lemme 8.8. *Si P est un polyèdre convexe non dégénéré de $\tilde{HS}^3$, la métrique HS marquée induite sur P a pour points singuliers les sommets de P, et elle y est convexe. Si P est convexe et si la métrique HS marquée sur P est convexe, alors P est non dégénéré.*

Démonstration. Il est clair que les sommets de P sont les points singuliers de la métrique marquée induite. Il nous reste à considérer chacun des cas dans la définition 4.1, et à montrer à chaque fois que la condition de convexité de la métrique est satisfaite. On a les cas suivants, correspondant aux différents cas de 4.1:

1. si s est un point hyperbolique, alors on applique la Proposition 8.1;
2. si s est dans l'intérieur de E, on utilise la Proposition 8.2;
3. si s est dans l'intérieur de M, on se réfère à l'assertion 8.6;
4. quand $s \in S_A$, il n'y a rien à démontrer;
5. si $s \in M \cap E \cap S$ et $M \setminus \{s\}$ et $E \setminus \{s\}$ sont connexes au voisinage de s, on peut conclure en utilisant l'assertion 7.8 et la Proposition 7.4 (en passant au link de P en s) si $s \in S$, et 8.3 sinon (c'est à dire si $s \in S_B$);
6. enfin, si $s \in E \cap M \cap S$ mais $M \setminus \{s\}$ n'est pas connexe au voisinage de s, on applique la Proposition 8.5, sauf quand les composantes connexes de $M \setminus \{s\}$ sont composées de faces dégénérées au voisinage de s. D'ailleurs, dans ce dernier cas, il ne peut y avoir qu'une seule face dégénérée dans chaque composante connexe de $M \setminus \{s\}$ au voisinage de s, car deux faces adjacentes devraient avoir en commun une arête A-extrémale. La somme des angles des faces en s ne peut pas être 2π, sans quoi $M \setminus \{s\}$ devrait avoir en s deux

composantes connexes, chacune composée úne face dégénérée, et E ne pourrait être composé au voisinage de s que d'arêtes; mais alors P serait dégénéré en s.

Pour la seconde assertion du lemme, on considère encore chaque cas de la définition 4.1, et on remarque que P ne peut être dégénéré en un sommet, sans quoi la condition de convexité de la métrique ne pourrait pas être satisfaite à cause des cas d'égalité de 8.1, 8.2, 8.6, 8.5, 7.8 et 7.4. q.e.d.

9. Un espace de métriques

On introduit dans cette section un espace de métrique qui interviendra dans la preuve du Théorème A, et on en donne quelques propriétés. Pour éviter les problèmes liés à l'étude de cet espace au voisinage de points particuliers, on traite séparément les métriques ayant "trop" de faces dégénérées.

Définition 9.1. On note $\mathcal{M}'_{n,p}$ l'ensemble des métriques HS marquées sur S^2 qui ont exactement n points singuliers, dont p qui sont hyperboliques; $\mathcal{M}_{n,p}$ sera l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}'_{n,p}$ qui vérifient les hypothèses du Théorème A. On appelle $\mathcal{M}^0_{n,p}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{n,p}$ qui ont au plus une face dégénérée qui doit être triangulaire, et $\mathcal{M}^1_{n,p} := \mathcal{M}_{n,p} \setminus \mathcal{M}^0_{n,p}$.

On définit sur $\mathcal{M}^0_{n,p}$ une carte au voisinage de chaque point: si $m \in \mathcal{M}^0_{n,p}$ et si τ est une triangulation de S^2 dont les sommets sont les points singuliers de m telle que m ne change pas de signature sur les triangles de τ, alors il y a au plus un triangle dégénéré dans τ; on associe à m le $(3n-6)$-uplet des cosinus hyperboliques $(c_i)_{i\in\mathbb{N}_{3n-6}}$ des longueurs des cotés des triangles de τ. On a la

Proposition 9.2. *Pour $m \in \mathcal{M}^0_{n,p}$ donné, il existe $\epsilon > 0$ tel que que si $(c'_i)_{i\in\mathbb{N}_{3n-6}}$ est ϵ-proche de $(c_i)_{i\in\mathbb{N}_{3n-6}}$, alors il existe $m' \in \mathcal{M}^0_{n,p}$ telle que les c'_i soient les longueurs pour m' des cotés des triangles de τ.*

Démonstration. Soit d'abord T un triangle de τ sur lequel m est définie négative. T est donc isométrique à un triangle de $(S^2, -\text{can})$, et les longueurs de ses cotés sont de la forme ia, ib, ic avec $a, b, c \in]0, \pi[$ et $a < b+c$, $b < a+c$, $c < a+b$, $a+b+c < 2\pi$. Si on change assez peu les longueurs a, b, c, ces inégalités restent vérifiées, et ia, ib, ic sont encore les longueurs des cotés d'un triangle de $(S^2, -\text{can})$.

De même, si T est un triangle de τ sur lequel m est modelée sur H_1^2, alors les longueurs de ses cotés restent, quand on les modifie un peu, les longueurs des cotés d'un triangle de H_1^2. Par exemple, si les cotés de T sont de type espace, alors leurs longueurs sont de la forme ia, ib, ic avec par exemple $a > b+c$; quand on modifie assez peu a, b, c, cette inégalité reste vérifiée, et T reste isométrique à un triangle de H_1^2. Il en est de même pour les autres cas.

Quand la restriction de m à T est modelée sur $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ avec une composante hyperbolique, on raisonne de la même manière; les longueurs des cotés de T sont maintenant de la forme ia, ib, ic avec $a + b + c > 2\pi$, et cette inégalité subsiste quand on modifie un peu a, b, c; T reste donc isométrique à un triangle de $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ contenant une composante hyperbolique.

Enfin, si m est dégénérée sur T, alors les longueurs des cotés de T sont de l'une des formes suivantes:

- ia, ib, ic avec $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et $a + b + c = 2\pi$. C'est le cas où T contient un point "hyperbolique". Quand on déforme a, b, c, on peut obtenir $a, b, c < 2\pi$, et T devient un triangle sphérique (modelé sur $(S^2, -\mathrm{can})$); ou bien $a + b + c > 2\pi$, et T devient un triangle modelé sur $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ avec une composante hyperbolique.
- ia, ib, ic avec par exemple $a = b+c$, T ne contient alors pas de point "hyperbolique". Si on modifie a, b, c, on peut obtenir $a < b + c$, et le triangle devient sphérique, ou bien $a > b + c$, et la restriction de la métrique à T est alors modelée sur H_1^2.

Notons que, si $m \in \mathcal{M}_{n,p}^0$ et si T_0 est une face triangulaire dégénérée de m sans point hyperbolique, alors, d'après la condition (2) du Théorème A, T_0 doit avoir une arête (au moins) dans ∂E et une arête (au moins) commune avec une autre face de M. La condition topologique (2) du Théorème A reste donc satisfaite.

Bien entendu, dans ces deux cas, la métrique m peut aussi rester dégénérée sur T.

Il suffit donc de prendre ϵ assez petit pour éviter qu'il y ait plus d'une face triangulaire dégénérée, et on obtient le résultat. q.e.d.

On a donc une carte sur $\mathcal{M}_{n,p}^0$ au voisinage de m. On vérifie que les différentes cartes possibles (correspondant aux triangulations convenables de S^2) sont compatibles. $\mathcal{M}_{n,p}^0$ est donc une variété de dimension $3n-6$ à bords. On en déduit une topologie sur $\mathcal{M}_{n,p}^0$.

Ainsi, on identifie deux métriques qui, dans une triangulation bien choisie, définissent les mêmes longueurs sur les cotés des triangles. En d'autres termes, si T est un triangle dégénéré, on l'identifie à un triangle sphérique qui borde un hémisphère si la somme des longueurs de ses arêtes est $2\pi i$, et à un triangle sphérique qui borde un convexe d'aire nulle sinon; et on l'identifie aussi à un triangle "dégénéré" de $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ dans chaque cas.

Lemme 9.3. *Pour $n \geq p \geq 0$, $\mathcal{M}^0_{n,p}$ est connexe par arcs.*

Le principe "heuristique" de la preuve de ce lemme est simple: pour déformer une métrique HS, on la suppose induite par un polyèdre convexe de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$, et on cherche les déformations possibles parmi les polyèdres convexes. On en déduit des déformations de la métrique, et on vérifie (péniblement) qu'elles sont en effet possibles en respectant les hypothèses du Théorème A.

La preuve se fait en trois étapes dont les démonstrations sont reportées plus loin. D'abord, on transforme les faces de type mixte ou dégénéré sans composante hyperbolique en faces de type espace:

Proposition 9.4. *Soit $(\sigma_0, A_0, \emptyset) \in \mathcal{M}^0_{n,p}$; il existe une famille continue $(\sigma_t, A_t, \emptyset)$ dans $\mathcal{M}^0_{n,p}$ telle que tous les points singuliers de $(\sigma_1, A_1, \emptyset)$ soient dans H ou dans E.*

Puis on se ramène au cas où les métriques n'ont aucune arête de type espace par la:

Proposition 9.5. *Soit $(\sigma_1, A_1, \emptyset) \in \mathcal{M}^0_{n,p}$ dont tous les points singuliers sont dans H ou dans E; il existe une famille continue $(\sigma_t, A_t, \emptyset)_{t\in[1,2]}$ d'éléments de $\mathcal{M}^0_{n,p}$ telle que $A_2 = \emptyset$, et que toutes les arêtes de σ_2 aient une composante hyperbolique.*

Enfin, on applique la

Proposition 9.6. *L'ensemble des métriques marquées $(\sigma, \emptyset, \emptyset) \in \mathcal{M}^0_{n,p}$ dont toutes les arêtes ont une composantes hyperbolique est connexe.*

On peut déduire de ces trois propositions la démonstration du lemme 9.3. Si on se donne $(\sigma_0, A_0, B_0), (\sigma'_0, A'_0, B'_0) \in \mathcal{M}^0_{n,p}$, on peut utiliser 9.4 pour les déformer dans $\mathcal{M}^0_{n,p}$ en $(\sigma_1, \emptyset, \emptyset), (\sigma'_1, \emptyset, \emptyset)$ respectivement, puis, grâce à 9.5, en $(\sigma_2, \emptyset, \emptyset), (\sigma'_2, \emptyset, \emptyset)$; enfin, on est dans le cadre de 9.6, et on peut trouver un chemins dans $\mathcal{M}^0_{n,p}$ joignant de $(\sigma_2, \emptyset, \emptyset)$ et $(\sigma'_2, \emptyset, \emptyset)$. En composant les 5 chemins obtenus, on trouve une déformation continue dans $\mathcal{M}^0_{n,p}$ de $(\sigma_0, A_0, \emptyset)$ sur $(\sigma'_0, A'_0, \emptyset)$.

Passons aux preuves des Propositions 9.4 et 9.5. On va déformer des triangles; on utilisera pour la preuve de la Proposition 9.4 l'énoncé suivant:

Assertion 9.7. Soit $a, b, c \in \mathbb{R} \cup (i]0, \pi[) \cup (i\pi/2 + \mathbb{R})$. Alors:

- si a, b, c sont les longueurs des cotés d'un triangle (A, B, C) de HS^2 (resp. de $(S^2, -\mathrm{can})$), alors (A, B, C) est uniquement déterminé (aux isométries près) par a, b, c. De plus, si α est l'angle au sommet opposé au coté de longueur a, on a la formule usuelle:

$$(1) \qquad \cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cos(\alpha)$$

- Il existe un triangle dans $H^2 \subset \mathrm{HS}^2$ dont les cotés sont de longueur a, b, c si et seulement si $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et vérifient les 3 inégalités triangulaires du type: $a \leq b + c$.
- Il existe un triangle de $(S^2, -\mathrm{can})$ dont les cotés sont de longueurs a, b, c si et seulement si $a, b, c \in i]0, \pi[$ et vérifient les trois inégalités triangulaires du type: $|a| \leq |b| + |c|$, et si de plus $|a| + |b| + |c| \leq 2\pi$.
- Il existe un triangle de HS^2 dont les cotés A, B, C sont de type temps, la projection orthogonale de $B \cup C$ sur A étant bijective, avec A, B, C de longueur a, b, c respectivement, si et seulement si $a, b, c \in \mathbb{R}_-$, avec $|a| \geq |b| + |c|$.
- Il existe un triangle de HS^2 dont les cotés A, B, C sont de type espace, la projection orthogonale de $B \cup C$ sur A étant bijective, avec A, B, C de longueur a, b, c respectivement, si et seulement si $a, b, c \in i]0, \pi[$, avec $|a| \geq |b| + |c|$.
- Il existe un triangle de HS^2 avec A de type temps et B, C de type espace et avec A, B, C de longueur a, b, c respectivement, si et seulement si $a \in \mathbb{R}_-$, $b, c \in i]0, \pi[$.
- Il existe un triangle de HS^2 avec A, B de type temps et C de type espace et avec A, B, C de longueur a, b, c respectivement, si et seulement si $a, b \in \mathbb{R}_-$ et $c \in i]0, \pi[$.
- Il existe un triangle de HS^2 avec $B \cap C$ hyperbolique et deux autres sommets "de Sitter" et avec A, B, C de longueur a, b, c respectivement, si et seulement si $b, c \in i\pi/2 + \mathbb{R}$ et soit $a \in i]0, \pi[$, soit $a \in \mathbb{R}_-$ avec $|a| \leq |b - c|$.

- Il existe un triangle de HS^2 avec $B \cap C$ "de Sitter" et deux autres sommets hyperboliques et avec A, B, C de longueur a, b, c respectivement, si et seulement si $b, c \in i\pi/2 + \mathbb{R}$ et $a \in [0, |b-c|]$.

Démonstration. On peut montrer (1) comme dans le cas hyperbolique, c'est à dire d'abord dans le cas où le triangle considéré a un angle $\alpha = \pi/2$, puis dans les autres cas par décomposition en deux triangles "rectangles".

On en déduit ensuite les autres assertions en cherchant, pour chaque valeur de a, b, c donnée, s'il existe un angle α convenable qui permet d'obtenir (1). q.e.d.

On peut déduire de cette assertion le résultat suivant:

Assertion 9.8. Soit $m \in \mathcal{M}^0_{n,p}$, p un point singulier de m qui est dans l'intérieur de M, et V_0 un voisinage de m qui est réunion de trois triangles T_1, T_2, T_3 d'intérieurs disjoints, dont les sommets sont des points singuliers de m (dont p). Alors il existe un voisinage V_1 de V_0 dont le bord est géodésique par morceaux, et une immersion isométrique polyèdrale convexe de $(V_1, m_{|V_1})$ dans HS^3.

On laisse la preuve au lecteur; elle est facile dans la mesure où on ne demande aucune condition au bord du domaine considéré. Il suffit d'utiliser d'abord la Proposition 9.7 pour obtenir une immersion isométrique convexe de $(V_0, m_{|V_0})$ dans HS^3 (qui est toujours convexe) puis de la compléter en utilisant une triangulation d' un voisinage bien choisi de V_0 (encore avec 9.7).

Démonstration rapide de 9.4. On note $\Omega_1, \cdots, \Omega_N$ les composantes connexes de $M \cup E = S^2 \setminus H$ pour m_0, et on se place successivement dans chacune de ces composantes connexes. Traitons par exemple Ω_1. On va montrer qu'on peut déformer m_0 de manière à mettre successivement tous les points singuliers de Ω_1 dans E.

Si Ω_1 contient un seul point singulier p_1 de m_0, alors $p_1 \in S_A \subset E$ d'après la condition (2) du Théorème A, et il n'y a rien à montrer. On suppose donc que Ω_1 contient au moins deux points singuliers $p_1, \cdots, p_k$ de m_0. On considère deux cas:

1. $p_1 \in S_A$, $p_2, \cdots, p_k \notin E$. On peut choisir un point $p_i, 2 \leq i \leq k$ admettant un voisinage V_0 réunion de trois triangles T_1, T_2, T_3 d'intérieur disjoint avec p_1 sommet de T_1 et de T_2. On applique l'assertion 9.8 et on trouve une réalisation isométrique convexe ϕ d'un voisinage V_1 de V_0 dans HS^3. Comme $p_1 \in S_A$, tous les

segments géodésiques de $\phi(V_1)$ issus de $\phi(p_1)$ sont dirigés vers H^3_+. On peut alors déformer ϕ en déplaçant seulement $\phi(p_i)$ (et pas les autres sommets) de manière que $\phi(V_1)$ reste un polyèdre convexe (à bord), jusqu'à ce que le segment $[p_1, p_i] = T_1 \cap T_2$ soit de type espace. Ce faisant, on ne modifie pas m_0 hors de V_0. On obtient ainsi une déformation de m_0 dans $\mathcal{M}^0_{n,p}$ telle que $[p_1, p_i]$ soit finalement dans E.

2. Ω_1 contient plusieurs points singuliers $p_1, \cdots, p_r$ de m_0 dans E. D'après la condition (2) du Théorème A, $E \cap \Omega_1$ a une seule composante connexe, si bien que $p_1, \cdots, p_r$ sont reliés par des segments de type espace. On raisonne comme ci-dessus, mais en prenant un point singulier de m_0, soit p_{r+1}, qui a un voisinage $V_0 = T_1 \cup T_2 \cup T_3$, où T_1 a une arête dans E. Puis on utilise 9.8 pour trouver une immersion isométrique convexe d'un voisinage V_1 de V_0 dans HS^3, qu'on déforme (en déplaçant seulement p_{r+1}) pour changer la métrique induite dans $\mathcal{M}^0_{n,p}$ jusqu'à obtenir que $p_{r+1} \in E$.

q.e.d.

Passons à la démonstration de la Proposition 9.5. Le principe de la preuve est qu'on peut déformer les faces triangulaires de type espace de σ_1 jusqu'à obtenir des hémisphère de S^2, puis (de manière continue pour $\mathcal{T}$) des faces de type dégénéré, puis mixte, avec une composante hyperbolique. Puis on change la longueur des arêtes de type espace jusqu'à ce que chacune ait une composante hyperbolique.

La démonstration repose donc sur les deux énoncés suivants. On a d'abord pour les faces de type espace:

Assertion 9.9. Soit T_0 un triangle de $(S^2, -\mathrm{can})$, dont les cotés sont de longueur il_1, il_2, il_3. Posons $L_0 = (2\pi - \sum l_i)/3$. Alors il existe une famille à un paramètre $(T_t)_{t \in [0, L_0]}$ de triangles de S^2 tels que:

1. pour $t \in [0, L_0]$, le $i^{\text{ème}}$ coté de T_t a pour longueur $l_i + t$;

2. pour $t \leq t'$, il existe une isométrie de T_t dans un domaine de l'intérieur de $T_{t'}$;

3. pour chaque $i \in \mathbb{N}_N$, l'angle extérieur $\theta_i(t)$ au $i^{\text{ème}}$ sommet de T_t est décroissant avec t;

4. T_{L_0} est isométrique à un hémisphère de $(S^2, -\mathrm{can})$.

Démonstration. Notons x_1, x_2, x_3 les sommets de F_0, et, pour $1 \leq j \leq 3$, notons il_j la longueur du coté de F_0 opposé à x_j. Considérons la déformation δ_1 obtenue en fixant x_1, l_2 et l_3 et en faisant varier à vitesse 1 l'angle intérieur de F_0 en x_1. On vérifie facilement qu'alors $l_1' > 0$, et que l'intérieur de F_0 croît (au sens de l'inclusion). Si on appelle δ_2, δ_3 les déformations analogues pour x_2 et x_3, il existe donc une combinaison linéaire des δ_i qui correspond à l'assertion pour $t = 0$. En utilisant la même construction pour $t > 0$, on obtient un champ de vecteur sur la variété des triangles de $(S^2, -\mathrm{can})$ qui convient. q.e.d.

Ensuite, on peut déformer les faces dégénérées ou modelées sur HS^2 ayant une composante hyperbolique par:

Assertion 9.10. Soit T_0 un triangle de H^2_1 dont les arêtes sont de type espace, et qui ne délimite pas un domaine compact. Notons il_1, il_2, il_3 les longueurs de ses cotés. Alors il existe une famille à un paramètre $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^*_+}$ de triangles de S^2_1 tels que, pour tout t, le $i^{\text{ème}}$ coté de T_t a pour longueur $l_i + t$.

La démonstration est similaire à celle de l'assertion 9.9.

On en déduit la

Démonstration de la Proposition 9.5. On choisit une triangulation τ de l'intérieur de E, c'est à dire qu'on décompose l'adhérence de l'intérieur de E en une réunion de triangles d'intérieurs disjoints.

Notons qu'on peut déformer m_1 de manière que, en chaque point singulier $p_i \in \partial E$ de m_1, chaque composante connexe de $M \setminus \{p_i\}$ soit convexe, au sens où la somme des angles des faces en p_i y est de la forme $\pi - ir, r > 0$. Pour le voir, on choisit une triangulation d'un voisinage V de E telle que chaque triangle ait un sommet dans H et deux dans ∂E, ou bien un dans ∂E et deux dans H; puis on augmente la partie réelle des longueurs des arêtes dont la longueur est dans $i\pi/2 + \mathbb{R}$; on vérifie avec (1) qu'on peut diminuer ainsi la partie imaginaire des angles des faces aux points de ∂E, pour que chaque composante connexe de $M \setminus p_i$ soit convexe.

Pour chaque triangle T de τ sur lequel σ_1 est de type espace, on note

$$\phi(T) = 2\pi + i\sum_1^3 L(a_i),$$

où les a_i sont les arêtes de T. Puis on prend T tel que $\phi(T)$ soit minimal. On applique à T l'assertion 9.9, de manière à obtenir sur T une métrique dégénérée, puis l'assertion 9.10, pour avoir une métrique modelée sur HS^2 avec une composante hyperbolique. Comme $\phi(T)$ est minimal, les triangles voisins de T restent de type espace. Comme on augmente la longueur des courbes A-admissibles (cf. la condition 2 de 9.9) la condition (4) du Théorème A reste satisfaite.

Si nécessaire, on peut encore augmenter les parties réelles des longueurs des arêtes joignant un point singulier hyperbolique à un point singulier "de Sitter" de m_1 pour que les conditions de convexité aux sommets (6) et (7) de la définition 4.1 restent vérifiées en chaque point singulier $p \in \partial E$ (chaque composante connexe de $M \setminus \{p\}$ doit être connexe).

Puis on répète cette opération pour les autres triangles de τ (toujours avec $\phi(T)$ minimal) pour obtenir une métrique marquée $(\sigma', A', \emptyset)$ sans face de type espace, et dont toutes les arêtes de type espace sont dans A'.

Enfin, on modifie la longueur des arêtes de type espace en diminuant leur ch jusqu'à -1 puis au-dela, de manière à obtenir des arêtes ayant une composante hyperbolique. Là encore, les hypothèses du Théorème A restent satisfaites, et le chemin défini est donc dans $\mathcal{M}^0_{n,p}$. q.e.d.

Pour la preuve de la Proposition 9.6, on utilisera l'assertion suivante, qui est probablement classique (voir par exemple [13] pour des résultats beaucoup plus élaborés dans un cadre analogue):

Assertion 9.11. Notons $M(n,p)$ l'espace des métriques hyperboliques complètes à p points singuliers coniques (à courbure singulière strictement positive) et à $n-p$ bouts, chacun de volume infini, sur une surface de genre 0. $M(n,p)$ est connexe par arcs.

Démonstration abrégée. Soit $m \in M(n,p)$, et soit $B_i, i \in \mathbb{N}_{n-p}$ un bout de m. "A l'infini", m ressemble au quotient de H^2 par une translation, ce qu'on peut préciser de la manière suivante: il existe un compact K sur la surface dont le complémentaire a $n-p$ composantes connexes Ω_j, chacune feuilletée par des courbes $(g_j(u))_{u\geq m_j}$, où $m_j > 0$, telles que

- $g_j(u)$ est à courbure constante $\tanh(u)$, le domaine délimité par g_j du coté de K étant convexe;
- pour $u' \geq u \geq m_j$, chaque point de $g_j(u')$ est à distance $u'-u$ de $g_j(u)$.

Maintenant, étant donné $m \in M(n,p)$, on peut choisir une famille de courbes $g_j(u_j), j \in \mathbb{N}_{n-p}$, puis une famille $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_{3n-6}}$ de segments géodésiques ouverts disjoints qui ont leurs extrémités soit sur un point conique de m, soit sur une courbe $g_j(u_j)$ qui leur est orthogonale. On obtient ainsi une décomposition d du domaine compact Ω' délimité par les $g_j(u_j)$ en polygones qui ont chacun 3 cotés géodésiques et au plus 3 cotés qui sont des segments d'une courbe $g_j(u_j)$.

On associe alors à m et à d la famille des "longueurs" $(L_i)_{i\in\mathbb{N}_{3n-6}}$ des a_j, où L_j est:

- la longueur de a_i si a_i joint deux points coniques de m;
- $r-u_j$, si a_i est un segment de longueur r qui joint un point conique de m à $g_j(u_j)$;
- $r-u_j-u_k$, si a_i est un segment de longueur r qui joint $g_j(u_j)$ à $g_k(u_k)$.

Ainsi, $(L_i)_{i\in\mathbb{N}_{3n-6}}$ ne change pas si on change les u_j. Cette construction est d'ailleurs simplement une manière d'obtenir, en restant sur la surface considérée, le même paramétrage de l'espace des métriques que celui qu'on aurait si on considérait les extensions de ces métriques en des métriques HS avec un point singulier de type de Sitter dans chaque "bout", et qu'on prenait comme paramétres les longueurs des cotés d'une triangulation dont les sommets sont les points singuliers "hyperboliques" ou "de Sitter".

On construit ainsi une carte sur $M(n,p)$ au voisinage de m. En effet, il est clair que, si m' est proche de m, alors la famille des "longueurs" associée, $(L'_i)_{i\in\mathbb{N}_{3n-6}}$, est proche de $(L_i)_{i\in\mathbb{N}_{3n-6}}$; réciproquement, on vérifie directement (pour chaque nombre possible de cotés) que les polygones hyperboliques qui interviennent sont uniquement déterminés par les longueurs de leurs cotés géodésiques (quand les (u_j) sont fixés).

Etant donnée une métrique $m \in M(n,p)$, on peut ainsi déformer localement m par le système de coordonnées qu'on a construit. On peut vérifier que, quitte à changer de décomposition au cours de la déformation, on peut déformer une métrique m donnée de manière à diminuer la courbure singulière aux points coniques — il faut pour cela augmenter les "longueurs" des arêtes de la décomposition. On obtient de cette manière une courbe $(m_t)_{t\in[0,1[}$ dans $M(n,p)$ telle que $m_0 = m$ et que, quand $t \to 1$, m_t tend vers une métrique hyperbolique à p points marqués (sans singularités).

Or on sait que l'espace $M_0(n,p)$ des métriques hyperboliques complètes à p points marqués sur S^2 privée de $n-p$ points est connexe; si $m' \in M(n,p)$ et si $(m'_t)_{t\in[0,1[}$ est un chemin dans $M(n,p)$ tel que $m'_0 = m'$ et que $\lim_{t\to 1} m'_t \in M_0(n,p)$, on peut trouver un chemin $(n_t)_{t\in[0,1]}$ joignant $\lim_1 m_t$ à $\lim_1 m'_t$ dans $M_0(n,p)$.

Mais la paramétrisation qu'on a construite ci-dessus pour un voisinage de $m \in M(n,p)$ est encore valable pour les points de $M_0(n,p)$, les déformations produisant des métriques hyperboliques admettant p points où la métrique peut être singulière, avec une courbure singulière positive ou négative; on peut ainsi déformer (n_t) en un chemin $(m''_t)_{t\in[0,1]}$ joignant $m_{1-\epsilon}$ à $m'_{1-\epsilon'}$ dans $M(n,p)$; en composant les chemins obtenus, on arrive à joindre m à m' dans $M(n,p)$. q.e.d.

Finalement, voici la

Démonstration de la Proposition 9.6 Les métriques HS sur HS^2 à points singuliers convexes dont toutes les arêtes ont une composante hyperbolique sont définies par leur restriction à l'ensemble des points hyperboliques; en effet, ces restrictions sont des métriques complètes à p points singuliers à courbure singulière positive sur S^2 privée de $n-p$ points. Mais une telle métrique étant donnée, il existe une unique manière de la prolonger en chaque bout en une métrique HS ayant un unique point singulier non hyperbolique (le bout hyperbolique est le quotient de H^2 par une translation, qui agit sur HS^2 avec un point fixe dans $\overline{S}^2_1$ correspondant au point singulier).

Or l'assertion précédente montre que l'espace de Teichmüller de ces métriques est connexe. q.e.d.

10. Fin des preuves

On donne d'abord la démonstration du Théorème A. On note $\mathcal{P}'_{n,p}$ l'ensemble des polyèdres convexes de $\tilde{\mathrm{HS}}^3 \setminus \overline{H}^3_-$ ayant n sommets (non dégénérés), dont p hyperboliques, et qui délimitent un convexe de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$ qui rencontre $\overline{H}^3_+$. Puis on appelle $\mathcal{P}_{n,p}$ le quotient de $\mathcal{P}'_{n,p}$ par l'action naturelle de $\mathrm{Isom}(\tilde{\mathrm{HS}}^3)$, $\mathcal{P}^0_{n,p}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}_{n,p}$ dont les faces sont non dégénérées, sauf au plus une face triangulaire, et $\mathcal{P}^1_{n,p} := \mathcal{P}_{n,p} \setminus \mathcal{P}^0_{n,p}$.

On a alors un opérateur naturel:

$$\Phi_{n,p} : \mathcal{P}_{n,p} \to \mathcal{M}'_{n,p}$$

qui associe à un polyèdre P le triplet $(\sigma, A, \emptyset)$, où σ est la métrique induite sur P, et A l'ensemble des arêtes A-extrémales de P. On note aussi $\Phi^0_{n,p}$ la restriction de $\Phi_{n,p}$ à $\mathcal{P}^0_{n,p}$.

On vérifie que $\Phi^0_{n,p}$ est en fait à valeur dans $\mathcal{M}^0_{n,p}$. En effet:

- la condition (1) du Théorème A est vérifiée pour les éléments de l'image de $\Phi_{n,p}$ car, par convexité, si P a une arête B-extrémale, le convexe délimité par P ne peut pas rencontrer $\overline{H}^3_+$ (cf. la Section 9);
- la condition (2) se vérifie immédiatement car, si on suit une géodésique de type temps de M, soit on s' "éloigne" de H^3_+ et on aboutit sur E, soit au contraire on s'en "approche" et on doit finir sur H;
- la convexité de la métrique en ses points singuliers vient du Lemme 8.8;
- la condition (4) du Théorème A provient du Lemme 7.11;
- il ne peut pas y avoir plus d'une face triangulaire dégénérée pour la métrique, car on a imposé la condition correspondante aux polyèdres.

On note aussi que $\dim(\mathcal{M}^0_{n,p}) = 3n-6 = \dim(\mathcal{P}^0_{n,p})$. De plus, $\Phi_{n,p}$ est différentiable pour la structure de variété qu'on a définie sur $\mathcal{M}^0_{n,p}$ et la structure de variété naturelle sur $\mathcal{P}^0_{n,p}$ (les voisinages des polyèdres sont les quotients par $\mathrm{Isom}(\tilde{\mathrm{HS}}^3)$ des produits des voisinages des sommets); on vérifie directement que cette assertion est vraie avec le choix qu'on a fait des cartes sur $\mathcal{M}^0_{n,p}$ par les cosinus hyperboliques des longueurs des cotés des triangles.

Ensuite, $\Phi^0_{n,p}$ est localement injective; c'est une conséquence directe du Théorème 5.8, qui affirme qu'il n'existe pas de vecteur sur $\mathcal{P}^0_{n,p}$ envoyé par $(\Phi_{n,p})_*$ sur une variation nulle de la métrique induite.

Enfin, $\Phi^0_{n,p}$ est propre: c'est une conséquence du Théorème 6.3, d'après lequel si une suite (P_n) de polyèdres de $\mathcal{P}^0_{n,p}$ induit une suite de métriques qui convergent, alors (P_n) a une sous-suite qui converge, sans quoi une dégénéréscence devrait apparaître le long d'une courbe A-admissible de longueur 2π, et une telle courbe est exclue par la définition de $\mathcal{M}^0_{n,p}$.

Comme $\mathcal{M}^0_{n,p}$ est connexe (Lemme 9.3), $\Phi^0_{n,p}$ est un revêtement de $\mathcal{M}^0_{n,p}$ par $\mathcal{P}^0_{n,p}$, c'est à dire que chaque élément de $\mathcal{M}^0_{n,p}$ a exactement

$N(n,p)$ images réciproques par $\Phi_{n,p}$. Pour montrer que $\Phi^0_{n,p}$ est en fait un homéomorphisme, on utilise les deux énoncés suivants:

Proposition 10.1. *Si $n' \geq n \geq 3$ et $p' \geq p$ avec $n' \geq p'$, alors $N(n',p') \geq N(n,p)$.*

Démonstration. Quand $n = p$, le résultat est connu car on sait (d'après [1]) que $N(n,n) = 1$. De même, le résultat pour $p = 0$ vient de [12]. Il suffit donc de montrer que, si $n > p \geq 1$, alors $N(n+1,p) \geq N(n,p)$ et $N(n+1,p+1) \geq N(n,p)$. On va montrer la seconde de ces inégalités, la preuve de la première est similaire.

On remarque pour cela que, quel que soit $n > p \geq 1$, il existe une métrique HS marquée $m = (\sigma, A, \emptyset) \in \mathcal{M}^0_{n,p}$ et un triangle T de S^2 ayant pour sommets des points singuliers de σ et ayant une composante hyperbolique, tels que toute réalisation polyèdrale de m a T pour face. En effet:

- soit $n - p = 1$ et $p \geq 2$: on prend l'intérieur d'un polygone hyperbolique régulier à p sommets, auquel on ajoute p triangles T_i isométriques entre eux, modelés sur $\tilde{\mathrm{HS}}^2$, avec un sommet "de Sitter" s en commun, toutes les arêtes arrivant en s étant de même longueur. Si on choisit des angles convenables, on a une métrique σ telle que $(\sigma, \emptyset, \emptyset) \in \mathcal{M}^0_{n,p}$, et il est facile de vérifier que les triangles T_i sont des faces de chaque réalisation polyèdrale de $(\sigma, \emptyset, \emptyset)$;

- soit $n-p = 2, p = 1$: le résultat est immédiat car les deux triangles isométriques qui forment S^2 conviennent;

- soit $n - p = 2$ et $p \geq 2$: on choisit p points $x_1, \cdots, x_p = x_0$ à égale distance sur S_1, puis on prend un triangle T modelé sur $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ avec un sommet "de Sitter" et deux sommets hyperboliques à distance $2\pi/p$ ayant chacun un même angle $\theta \in]0, \pi/2[$. On obtient alors une métrique σ en collant de chaque coté de $[x_i, x_{i+1}]$ une copie de T, de manière que, de chaque coté du cercle, tous les triangles aient un même sommet "de Sitter". Alors $(\sigma, \emptyset, \emptyset) \in \mathcal{M}^0_{n,p}$, et on vérifie encore facilement que chacun des triangles qu'on a "collé" est une face de chaque réalisation polyèdrale de σ dans $\tilde{\mathrm{HS}}^3$;

- soit $n - p \geq 3$: on peut prendre pour m une métrique marquée ayant une face triangulaire T dont les cotés sont dans A, et dont la métrique est modelée sur $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ avec une composante hyperbolique.

On choisit donc $m = (\sigma, A, \emptyset) \in \mathcal{M}^0_{n,p}$ tel qu'il existe un tel triangle T, et on suppose que m a N images réciproques $P_1, \cdots, P_N$ distinctes par $\Phi^0_{n,p}$. On prend un point x dans la composante hyperbolique de T, puis on déforme σ en σ' en modifiant la distance entre x et les sommets de T d'au plus ϵ, sans changer les longueurs des arêtes de T ou σ sur le complémentaire de T (cela revient à ajouter une singularité de σ en x). On vérifie directement que, pour ϵ assez petit, celles de ces métriques déformées pour lesquelles σ' est convexe en x sont réalisable par un polyèdre obtenu à partir des P_i en ajoutant un sommet dans la face T. Toujours pour ϵ petit, les polyèdres obtenus à partir des P_i sont distincts, et donc $N(n+1, p+1) \geq N(n, p)$. q.e.d.

Proposition 10.2. *Pour tout* $p \geq 2$, $N(3p+2, 2p) = 1$.

Démonstration. On choisit une triangulation de S^2 à $2p$ faces $(F_i)_{i \in \mathbb{N}_{2P}}$ et $p+2$ sommets (on vérifie que c'est possible en utilisant la formule d'Euler). Puis on choisit dans chaque face triangulaire F_i un point x_i, et on découpe chaque face F_i en 3 faces triangulaires G_i, G'_i, G''_i ayant x_i pour sommet. On définit une métrique marquée $m = (\sigma, A, \emptyset) \in \mathcal{M}^0_{3p+2,2p}$ pour laquelle σ est obtenue en mettant sur chaque triangle G_i, G'_i ou G''_i une métrique modelée sur un triangle de $\tilde{\mathrm{HS}}^2$, avec en x_i un point hyperbolique et un angle dans $]0, 2\pi/3[$, et autres deux autres sommets "de Sitter" ayant un angle dans $\pi/2 - i\mathbb{R}^*_+$; A contient toutes les arêtes des F_i. On vérifie directement qu'on peut construire un tel m dans $\mathcal{M}^0_{n,p}$.

Maintenant, si P est un polyèdre qui induit m, P doit avoir pour arêtes les arêtes de F_i (car elles sont dans A, ce sont donc des arêtes extrémales de P) et les arêtes menant des sommets de chaque F_i à x_i (car il y en a trois, ce qui est le minimum pour un sommet). P définit donc une triangulation de S^2 et, les longueurs des cotés des triangles étant fixés par σ, P est uniquement déterminé. m a donc une unique image réciproque par $\Phi^0_{n,p}$, et $N(3p+2, 2p) = 1$. q.e.d.

On déduit immédiatement de ces deux proposition que $N(n, p) = 1$ pour tout $n \geq p, n \geq 3$.

Enfin, il faut montrer que les éléments de $\mathcal{M}^1_{n,p}$ sont aussi obtenus de manière unique comme métriques marquées induites sur un unique élément de $\mathcal{P}^1_{n,p}$. On définit une topologie $\mathcal{T}'$ sur $\mathcal{M}'_{n,p}$ (et plus seulement sur $\mathcal{M}^0_{n,p}$) en prenant comme base de voisinages de $m = (\sigma, A, B)$ l'ensemble des $m' = (\sigma', A', B')$ tels qu'il existe un homéomorphisme h

de S^2 et une triangulation τ de S^2 adaptée à m (les arêtes de $A \cup B$ sont des arêtes de τ et σ ne change pas de signature sur les faces de τ) et à $h^*(m')$ telle que les cosh des longueurs des cotés de τ pour m et pour $h^*(m')$ diffèrent au plus de ϵ.

On vérifie facilement que $\Phi_{n,p}$ est continue pour la topologie $\mathcal{T}'$ sur $\mathcal{M}_{n,p}$ et la topologie naturelle sur l'espace des polyèdres convexes de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$.

L'existence est encore une conséquence du Théorème 6.3: pour $m \in \mathcal{M}^1_{n,p}$, on prend une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}^0_{n,p}$ qui converge vers m. On note P_n l'image réciproque de m_n par $\Phi_{n,p}$, et la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit admettre une sous-suite qui converge vers un polyèdre dont la métrique marquée induite est m, car m n'admet pas de courbe A-admissible de longueur 2π.

Pour l'unicité, on a la propriété de connexité suivante:

Lemme 10.3. *Soit $m \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $U \subset \mathcal{M}_{n,p}$ un voisinage de m (pour $\mathcal{T}'$) assez petit. Il existe un voisinage $V \subset U$ de m tel que, si $m', m'' \in V \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$, il existe un chemin γ joignant m' à m'' dans $U \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$.*

L'interprétation de ce lemme est simple: si m' et m'' sont "proches", il existe une déformation "courte" de m' sur m'' telle qu'à chaque instant, au plus une face triangulaire soit dégénérée. On repousse la preuve à la fin de cette section. Mais on en déduit que $\Phi_{n,p}$ est injective sur $\mathcal{P}^1_{n,p}$ aussi. En effet, si $P', P'' \in \mathcal{P}^1_{n,p}$ étaient distincts avec $m := \Phi_{n,p}(P') = \Phi_{n,p}(P'')$, on pourrait trouver (par continuité de $\Phi_{n,p}$ pour $\mathcal{T}'$) un voisinage $U \subset \mathcal{M}_{n,p}$ de m tel que P', P'' soient dans des composantes connexes U', U'' disjointes de $\Phi^{-1}_{n,p}(U)$. On pourrait alors prendre un voisinage $V \subset U$ de m obtenu par le lemme précédent, et noter V', V'' les composantes connexes de P', P'' dans $\Phi^{-1}_{n,p}(V)$.

Si $P'_0 \in V' \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$ et $P''_0 \in V'' \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$, on aurait d'après le choix de V un chemin γ joignant $m_0 := \Phi_{n,p}(P'_0)$ à $m'_0 := \Phi_{n,p}(P''_0)$ dans $\mathcal{M}^0_{n,p} \cap U$, et, comme $\Phi^0_{n,p}$ est un homéomorphisme, on obtiendrait par déformation une image réciproque de m''_0 dans U'; m''_0 ayant une autre image réciproque dans U'', $\Phi^0_{n,p}$ ne serait pas injective sur $\mathcal{P}^0_{n,p}$, alors qu'on a montré que c'est un homéomorphisme. Ceci termine la preuve du Théorème A.

Pour démontrer le Théorème B, on vérifie directement les différents points de l'énoncé: si P est un polyèdre convexe de S^3_1 qui induit une métrique marquée $m = (\sigma, A, B)$ alors on a pour m:

1. E a deux composantes connexes E_+, E_- correspondant aux points

où P admet un plan de support de type espace dont la normale "extérieure" est dirigée vers H^3_+ ou vers H^3_- respectivement. Si on suit une géodésique de type temps de M, alors soit on se dirige "vers H^3_+" et on aboutit sur E_+, soit au contraire on va "vers H^3_-" et on finit sur E_-;

2. la convexité de m en ses points singuliers est une conséquence du Lemme 8.8;

3. les courbes B-admissibles simples de m sont de longueur $|L| < 2\pi$ d'après le Lemme 7.20.

De même, on vérifie directement les différents points de l'énoncé du Théorème C:

1. $D = \emptyset$, sans quoi P aurait une face dégénérée, et resterait d'un seul coté du 2-plan dégénéré correspondant de $\tilde{\mathrm{HS}}^3$; P ne pourrait donc pas rencontrer H^3_+ et H^3_-. Pour la même raison, P ne saurait avoir de face de type espace.

   De plus, $A = \emptyset$; sinon, P devrait se trouver dans le convexe délimité par deux hémisphères rencontrant par exemple H^3_+, et P ne pourrait donc pas rencontrer H^3_-. Pour la même raison, $S_A = \emptyset$. De même, $B = \emptyset$, sans quoi P serait compris entre deux plans de type espace, et ne pourrait pas rencontrer H^n_+ et H^n_-; et pour la même raison, $S_B = \emptyset$.

   Ainsi, $E = \emptyset$, et les faces de P ne peuvent être modelées que sur $\tilde{\mathrm{HS}}^2$.

2. H_+, H_- correspondent aux intersections de P avec H^3_+ et H^3_- respectivement.

3. La convexité de m en ses points singuliers est une conséquence du Lemme 8.8.

4. Si γ est une courbe polyèdrale B-admissible pour la métrique marquée induite, on peut lui appliquer le Lemme 7.20 pour voir qu'elle a une longueur $|L| < 2\pi$.

Donnons finalement la preuve du Lemme 10.3. Elle passe par les trois assertions suivantes:

Assertion 10.4. Soit $m \in \mathcal{M}_{n,p}$ et U un voisinage de m dans $\mathcal{M}'_{n,p}$ pour $\mathcal{T}_{n,p}$. Soit τ une triangulation de S^2 adaptée à m, et τ_0 l'ensemble des triangles de τ sur lesquels m est dégénérée. Il existe un voisinage $V_0 \subset U$ de m dans $\mathcal{T}'$ tel que, si $m' \in V_0$, alors:

- m' a même signature que m sur les triangles de $\tau \setminus \tau_0$;
- m' n'a pas de courbe A-admissible de longueur $L \leq 2\pi$.

Démonstration. Il s'agit dans les deux cas de conditions ouvertes. Pour la première, parce qu'on peut la voir comme une famille d'inégalités strictes sur les longueurs des cotés d'une triangulation (du type $a < b+c$ ou $a+b+c < 2\pi$, a, b, c étant les longueurs des cotés d'un triangle de $\tau \setminus \tau_0$, ou bien les inégalités opposées). Pour la seconde condition, c'est parce que la longueur des courbes A-admissibles est continue pour $\mathcal{T}'$, et que, pour m fixé, il existe un voisinage de m pour $\mathcal{T}'$ où les courbes A-admissibles sont proches de courbes A-admissibles de m. q.e.d.

Assertion 10.5. Soit V'_0 un voisinage de m pour $\mathcal{T}'$. Il existe un voisinage $V_1 \subset V'_0$ de m pour $\mathcal{T}'$ tel que, si $m_0 \in V_1 \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$, il existe une déformation $(m_t)_{t\in[0,1]}$ dans $V'_0 \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$ telle que m_1 soit de type mixte sur tous les triangles de τ_0.

Démonstration. On choisit une triangulation τ de S^2 adaptée à m; on note τ_0 l'ensemble des triangles de τ sur lesquels m est dégénérée, et N le nombre de triangles de τ_0. Puis on choisit $\epsilon > 0$ tel que, si on change les longueurs des arêtes de τ d'au plus $(2^{N+1}+2)\epsilon$, on ne change pas la nature de m sur les triangles de $\tau \setminus \tau_0$; c'est possible d'après l'assertion 10.4.

On note V_1 l'ouvert de $\mathcal{T}'$ obtenu en imposant que les longueurs des arêtes de τ ne changent pas de plus de ϵ. On peut alors d'abord déformer m_0 en une métrique HS $m'_0 \in V_1$ en changeant les longueurs des cotés de τ d'au plus ϵ, de manière à obtenir des longueurs qui soient deux à deux distinctes.

On va définir pour chaque arête a de τ_0 un autre poids $\mu(a)$ de la manière suivante. D'abord, on définit un poids μ' par:

- $\mu'(a) = 1$ si a borde un triangle de τ_0 où m a un point hyperbolique;
- $\mu'(a) = 0$ sinon.

Puis on range les arêtes de τ_0 par ordre croissant de longueur, soit $|L(a_1)| < \cdots < |L(a_p)|$, et, pour $i = 1, \cdots, p$ successivement, on décide que $\mu(a_i)$ est le maximum de $\mu'(a_i)$ et des $\mu(b) + \mu(c) + 1$, où (a_i, b, c) bordent un triangle de τ_0 avec $L(a_i) = L(b) + L(c)$. C'est possible car, dans ce cas, on doit avoir $b = a_j, c = a_k$ avec $j < i, k < i$.

On a alors les propriétés suivantes:

1. pour toute arête a d'un triangle de τ_0, $\mu(a) \leq 2^{N+1} - 1$, comme on le voit d'après une récurrence immédiate;

2. si a, b, c bordent un triangle de τ_0 qui a un point hyperbolique, alors $L(a) + L(b) + L(c) = 2\pi i$, et $\mu(a) \geq 1, \mu(b) \geq 1, \mu(c) \geq 1$ grâce au choix de μ';

3. si a, b, c bordent un triangle de τ_0 sans point hyperbolique, avec par exemple $L(a) = L(b) + L(c)$, alors $\mu(a) \geq \mu(b) + \mu(c) + 1$, d'après la définition de μ à partir de μ'.

On définit alors une déformation $(m'_t)_{t\in[0,1]}$ de m'_0 en donnant à chaque arête a de τ_0 la longueur $L(a) + i\epsilon\mu(a)t$. D'après le choix de ϵ et (1), on ne change pas la nature de m'_0 sur $\tau \setminus \tau_0$; d'après (2), les triangles de τ_0 ayant un point hyperbolique pour m deviennent des triangles mixtes avec une composante hyperbolique; enfin, par (3), les triangles de τ_0 sans point hyperbolique pour m deviennent des triangles modelés sur H^2_1.

Enfin, on compose le chemin joignant m_0 à m'_0 à $(m'_t)_{t\in[0,1]}$ pour obtenir la déformation cherchée. q.e.d.

Assertion 10.6. Soit V''_0 un voisinage de m pour $\mathcal{T}'$. Il existe $V_2 \subset V''_0$ tel que, si $m_0, m_1 \in V_2 \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$ sont de type mixte sur tous les triangles de τ_0, alors il existe un chemin $(m_t)_{t\in[0,1]}$ continu dans $V''_0 \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$ joignant m_0 à m_1.

Démonstration. Notons Ω_0 l'intérieur de $D \cap M$. D'après l'assertion 10.4, on peut choisir V_2 de manière que les $m' \in V_2$ aient la même signature que m sur $\Omega \setminus \Omega_0$, et n'aient pas de courbe A-admissible de longueur $L \leq 2\pi$. De plus, on constate directement que les conditions (1) à (6) de la définition 4.1 sont ouvertes pour $\mathcal{T}'$, on peut donc prendre V_2 assez petit pour que ces conditions y soient vérifiées.

Si $m' \in V_2$, on peut lui associer les longueurs $(l_i)_{i\in\mathbb{N}_{3n-6}}$ des cotés des triangles de τ. Les conditions que m' soit mixte sur les triangles de $\Omega \setminus \Omega_0$ apparaissent alors comme autant de conditions linéaires dans

$\mathbb{R}^{3n-6}$. Quitte à réduire V_2, on peut supposer que son image dans $\mathbb{R}^{3n-6}$ est une boule ouverte; les métriques de V_2 qui sont mixtes sur Ω_0 ont alors pour image dans $\mathbb{R}^{3n-6}$ un convexe C_0.

Si m_0, m_1 sont mixtes sur Ω_0, leurs images sont dans C_0, et on peut trouver un chemin qui les relie dans C_0. On obtient donc un chemin (m'_t) dans V_2 qui passe par des points qui satisfont toutes les conditions du Théorème A, sauf éventuellement la condition (7) de la définition 4.1. Il reste à le déformer en un chemin (m_t) qui en plus la satisfait. Pour cela, on constate que pour chaque composante connexe Ω' de Ω_0, on a d'après la condition (2) du Théorème A:

- soit Ω' contient un point hyperbolique pour m, et une région hyperbolique pour chaque m'_t; alors $\partial\Omega' \subset \partial E$. Il existe alors pour chaque m'_t un triangle T dans Ω' modelé sur $\tilde{\mathrm{HS}}^2$ avec une composante hyperbolique. Quitte à supposer qu'on à pris V_2 assez petit, on peut alors modifier les longueurs des cotés de T pour s'assurer qu'on a (7);

- soit Ω' ne contient pas de point hyperbolique pour m, et alors $\partial\Omega$ a un segment sur ∂E et un autre sur ∂M. Quitte à restreidre V_2, on peut alors modifier les longueurs des triangles de Ω' qui ne sont pas sur ∂E, et de manière à avoir (7) aux points singuliers qui sont sur ∂E. Or (7) ne s'applique qu'aux points de $\partial\Omega' \cap \partial E$, donc on peut modifier (m'_t) pour que (7) soit toujours satisfaite.

q.e.d.

On déduit de ces deux dernières assertions la preuve du lemme 10.3. On choisit d'abord $V''_0 = U$, et 10.6 définit un voisinage V_2 de m dans lequel deux éléments de $\mathcal{M}^0_{n,p}$ qui sont mixtes sur τ_0 sont joignables par un chemin dans $U \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$. Puis on utilise 10.5 avec $V'_0 = V_2$, et on trouve V_1 tel que les éléments de $V_1 \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$ peuvent être déformées en des éléments de $\mathcal{M}^0_{n,p} \cap V_2$ qui sont mixtes sur τ_0. On prend alors $V := V_1$; pour $m', m'' \in V \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$, on peut les déformer dans $V_2 \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$ en des métriques m'_0, m''_0 mixtes sur τ_0, qu'on peut déformer l'une sur l'autre dans $U \cap \mathcal{M}^0_{n,p}$. On trouve le résultat en composant les chemins obtenus.

References

[1] A. D. Aleksandrov, *Convex Polyhedra*, GITTL, 1951. En russe; traduction anglaise à paraître chez Springer.

[2] E.M. Andreev, *Convex polyhedra in Lobacevskii space*, Mat. Sb.(N.S.) **81** (123) (1970) 445–478.

[3] ———, *On convex polyhedra of finite volume in Lobacevskii space*, Math. USSR Sb. **12** (3) (1971) 225–259.

[4] Kazuhiro Aomoto, *Analytic structure of Schläfli function*, Nagoya Math. J. **68** 1977 1–16.

[5] R. Bartnik, *Existence theorems for maximal surfaces*, PhD thesis, Princeton University, 1983.

[6] ———, *Existence theorems for maximal hypersurfaces in asymptotically flat spacetimes*, Comm. Math. Physics **94** (1984) 155–175.

[7] Marcel Berger, *Geometrie*, Vol. 1, Nathan, 1990.

[8] David D. Bleecker, *Volume increasing isometric deformation of convex polyhedra*, J. Differential Geom. **43** (1996) 505–526.

[9] A. L. Cauchy, *Sur les polygones et polydres, second mmoire,* J. École Polytechnique **19** (1813) 87–98.

[10] R. Charney & M. Davis. *The polar dual of a convex polyhedral set in hyperbolic space*, Michigan Math. J. **42** (1995) 479–510.

[11] C. Gehrardt, *H-surfaces in lorentzian manifolds*, Comm. Math. Physics **89** (1983) 523–553.

[12] C. D. Hodgson & I. Rivin, *A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, Invent. Math. **111** (1993) 77–111.

[13] D. Hulin & M. Troyanov, *Prescribing curvature on open surfaces,* Math. Ann. **293** (1992) 277–315.

[14] F. Labourie & J.-M. Schlenker, *Surfaces convexes fuchsiennes dans les espaces lorentziens à courbure constante,* Prépublication 96-05, Université de Paris-Sud, 1996.

[15] A.D. Milka, *Unique determination of convex surfaces in pseudo-riemannian spherical space. I*, Ukrain. Geom. Sb. **29** (1986) 113–118.

[16] A. V. Pogorelov, *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces.* Amer. Math. Soc., Transl. Math. Monographs. Vol. 35, 1973.

[17] I. Rivin & C. D. Hodgson. *A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, Invent. Math. **111** (1993) 77–111.

[18] I. Rivin, Thesis, PhD thesis, Princeton University, 1986.

[19] ———, *Intrinsic geometry of convex ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, (M. Gyllenberg and L. E. Persson, eds), Analysis, Algebra, and Computers in Math. Res., Marcel Dekker, 1992 275–292. (Proc. 21st Nordic Congr. of Math.).

[20] I. Rivin, *On the geometry of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Topology **32** (1993) 87–92.

[21] ———, *A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. **143** (1996) 51–70.

[22] J.-M. Schlenker, *Surfaces elliptiques dans des espaces lorentziens à courbure constante*, C. R. Acad. Sci. Sér. A, **319** (1994) 609–614.

[23] ———, *Hyperbolic Monge-Ampère equations over surfaces,* Prépublication no. 1104, École Polytechnique, 1995.

[24] ———, *Surfaces convexes dans des espaces lorentziens à courbure constante,* Comm. Anal. Geom. **4** (1996) 285–331.

[25] ———, *Polyèdres dans les espaces de Sitter-hyperboliques*, Prépublication no. 96-58, Université de Paris-Sud, 1996.

[26] V.D. Sedykh. *Four vertices of a convex space curve,* Bull. Lond. Math. Soc. **26** (1994) 177–180.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, FRANCE