

SUR LES SCINDEMENTS DE HEEGAARD DU TORE T^3

MICHEL BOILEAU & JEAN-PIERRE OTAL

Abstract

We prove that there is, up to isotopy, a unique Heegaard splitting of a given genus $g \geq 3$ in the 3-torus T^3 . Using Meek's results, this classification theorem gives that two minimal surfaces of a given genus $g \geq 3$ in a flat torus are isotopic. This implies, in particular, the topological uniqueness of triply periodic minimal surfaces in \mathbf{R}^3 .

Un scindement de Heegaard de genre g d'une variété fermée orientable de dimension 3, M , est une surface (orientable) de genre g , plongée dans M et séparant M en deux bretzels, c'est-à-dire en deux variétés obtenues chacune par recollement d'anses d'indice 1 sur le bord d'une boule. La classification à isotopie près de tous les scindements de Heegaard d'une variété de dimension trois donnée n'a été obtenue pour l'instant que dans quelques cas très particuliers: la sphère S^3 ([16]), et les espaces lenticulaires ([2]). Le résultat de B. Lawson ([9]) qui montre que toute surface minimale plongée dans une variété de dimension 3 à courbure de Ricci strictement positive est un scindement de Heegaard permet d'en déduire l'unicité à isotopie près des surfaces minimales fermées d'un genre donnée dans S^3 ([9]) et aussi dans les espaces lenticulaires, ces variétés étant munies par exemple de leur métrique sphérique.

Dans cet article, on classe à isotopie près les scindements de Heegaard du tore T^3 . Le résultat principal est le suivant:

Théorème. *A isotopie près, il existe, pour tout $g \geq 3$, un seul scindement de Heegaard de genre g du tore T^3 .*

Pour $g = 3$, ce résultat avait été obtenue par C. Frohman et J. Hass en utilisant la théorie des surfaces minimales ([6]). Leur résultat montrait que tout scindement de genre 3 est isotope au scindement *standard* dont nous rappelons la construction: si on considère le tore T^3 comme le quotient d'un cube par identification des faces opposées, le bord d'un voisinage régulier de l'image des arêtes du cube est un scindement de Heegaard de genre 3, dit *standard* (cf. Figure 1).

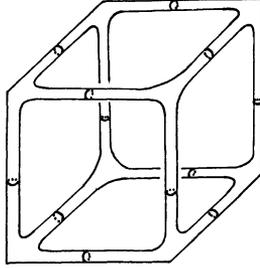


FIGURE 1

Notre résultat montre que tout scindement de Heegaard de T^3 est, à isotopie près, une stabilisation (cf. [12], [14]) du scindement standard ci-dessus.

Notre preuve, totalement indépendante du résultat de Frohman et Hass, repose de manière essentielle sur les techniques fines d'élimination des singularités d'un feuilletage de Morse, introduites par H. Schubert ([13]), ainsi que sur la notion de *minceur* d'une courbe plongée dans une variété par rapport à une fonction de Morse; cette dernière notion a été introduite par D. Gabai dans [7].

D'après W. Meeks ([10], [11]) une surface minimale dans un tore plat T^3 est ou bien un tore totalement géodésique, ou bien un scindement de Heegaard. Nous déduisons donc du théorème ci-dessus le résultat suivant:

Corollaire 1. *Pour tout $g \geq 3$, il existe à isotopie près, au plus une surface minimale de genre g dans un tore plat T^3 .*

On en déduit facilement (en effectuant des glissements d'anses) le corollaire suivant, qui résout une conjecture de Meeks ([11]):

Corollaire 2. *Deux surfaces minimales triplement périodiques de l'espace euclidien \mathbf{R}^3 sont isotopes.*

Ce dernier résultat a été obtenu indépendamment par C. Frohman dans [5], en utilisant des méthodes différentes. Nous remercions H. Rubinstein pour nous avoir posé le problème de la classification des scindements de Heegaard du tore épaissi $T^2 \times [0, 1]$ (Théorème 1.5) et nous avoir indiqué la relation entre cette classification et l'étude des scindements de Heegaard de T^3 .

1. Scindements de Heegaard du tore T^3

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème de classification des scindements de Heegaard du tore T^3 , modulo deux résultats qui seront prouvés dans les paragraphes suivants.

Nous allons d'abord montrer comment réduire l'étude des scindements de Heegaard de T^3 à celle des *scindements de Heegaard* du tore épaissi $T^2 \times [0, 1]$.

Rappelons la définition de *scindement du Heegaard d'une variété à bord* V : c'est une surface fermée plongée dans V et qui découpe V en deux composantes chacune homéomorphe à un *bretzel creux*, c'est-à-dire une variété obtenue à partir d'une surface épaissie $S \times [0, 1]$ par addition d'anses d'indice 2 et remplissage des composantes éventuelles du bord de la nouvelle variété qui sont des sphères par des boules.

Cette réduction à l'étude des scindements de $T^2 \times [0, 1]$ est aussi une étape essentielle de [6]. Nous l'obtenons ici grâce à la proposition technique 1.1 dont la preuve est reportée au §2, et grâce aussi à des arguments essentiellement dus à Casson et Gordon [3] (Corollaire 1.2, Proposition 1.3 et Lemme 1.4).

Ensuite, nous sommes conduits à classifier les scindements de Heegaard de $T^2 \times [0, 1]$ (Théorème 1.5), ce que nous ferons au §3.

Le scindement de Heegaard du tore T^3 que l'on étudie sera noté Σ . On considère T^3 comme le quotient de l'espace euclidien \mathbf{R}^3 par le groupe des translations euclidiennes entières. La projection dans T^3 des trois plans de coordonnées $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ fournit trois tores T_x , T_y , T_z qui s'intersectent deux à deux suivant une fibre d'une fibration en cercles de T^3 ; de plus ces trois tores s'intersectent en un seul point.

Le groupe $\text{Gl}_3(\mathbf{Z})$ fournit par passage au quotient un groupe de difféomorphismes de T^3 (en fait isomorphe au groupe des difféotopies de cette variété [15]).

Avec ces notations, on a alors:

Proposition 1.1. *Soit Σ un scindement de Heegaard de T^3 . Il existe un difféomorphisme ϕ de T^3 tel que les deux tores $\phi(T_x)$ et $\phi(T_y)$ vérifient les deux propriétés suivantes:*

- (1) *les tores $\phi(T_x)$ et $\phi(T_y)$ intersectent transversalement la surface Σ ;*
- (2) *l'intersection $\phi(T_x) \cap \Sigma$ (respectivement $\phi(T_y) \cap \Sigma$) contient une courbe fermée essentielle f_y (resp. f_x), sur $\phi(T_x)$ (resp. $\phi(T_y)$). De plus, ces deux courbes ont un seul point commun et $\Gamma = f_x \cup f_y$ est isotope à l'image par ϕ de la réunion des axes de coordonnées x et y .*

Cette proposition entraîne que l'on peut toujours trouver sur Σ deux courbes f_x et f_y qui se rencontrent en un seul point et qui engendrent un sous-groupe $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ de $\pi_1(T^3)$. De plus, la condition de transversalité

énoncée assure que la trace sur Σ du bord d'un voisinage régulier de $\Gamma = f_x \cup f_y$ est homotope à 0 dans le complémentaire dans T^3 de ce voisinage régulier.

Une notion définie par Casson et Gordon dans [3] est celle de scindement *fortement réductible* (strongly reducible), que nous rappelons ci-dessous:

Définition. Soit Σ un scindement de Heegaard d'une variété M qui la découpe en deux bretzels creux H_1 et H_2 . Le scindement Σ est dit *fortement réductible* s'il existe deux disques D_1 et D_2 respectivement proprement plongés dans H_1 et dans H_2 , dont les bords sont des courbes disjointes, non homotopes à 0 sur Σ .

Nous déduisons tout de suite de la Proposition 1.1 le corollaire suivant.

Corollaire 1.2. *Tout scindement de Heegaard de T^3 est fortement réductible.*

Preuve. Soit $\Gamma = f_x \cup f_y$ le graphe fourni par la Proposition 1.1. Notons N le complémentaire d'un voisinage régulier de Γ dans T^3 . Remarquons que N est obtenu en rajoutant une 1-anse $D^2 \times [0, 1]$ à la variété $T^2 \times [0, 1]$, les deux disques d'attachement de la 1-anse étant contenus dans des composantes distinctes du bord de $T^2 \times [0, 1]$.

La condition de transversalité dans la Proposition 1.1 entraîne que le bord (connexe) de la surface $\Sigma \cap N$ est parallèle sur ∂N au bord de la co-âme de cette 1-anse.

Puisque la surface $\Sigma \cap N$ a un genre supérieur à 2 et un bord connexe qui ne rencontre pas le (seul) disque de compression de ∂N , la surface $\Sigma \cap N$ est compressible dans N . Donc, par une suite de chirurgies le long de disques, on peut transformer la surface $\Sigma \cap N$ en la réunion d'un disque, d'une famille de tores incompressibles et de sphères. Donc, Σ peut être chirurgisée en une famille de tores et de sphères contenant au moins un tore (réunion du disque et du voisinage régulier de Γ sur Σ).

L'existence de ce tore incompressible montre que les disques de chirurgie ne sont pas tous contenus dans le même bretzel; sinon, ce bretzel contiendrait un tore incompressible, ce qui est impossible.

Considérons donc les familles finies de disques de compression pour la surface Σ , $(D_i)_{i=1, \dots, k}$ telles que: les disques sont disjoints, non parallèles, évitent Γ , et sont contenus dans le même bretzel, H_1 par exemple. Choisissons une famille de ce type pour laquelle la caractéristique d'Euler de la surface, obtenue en chirurgisant Σ le long de ces disques et en enlevant les composantes qui sont des sphères, est maximale.

Après avoir chirurgisée Σ le long des disques de cette famille, et l'avoir poussée dans H_1 , on obtient une nouvelle surface Σ' . Soit \mathcal{W} l'adhérence

dans T^3 de la composante de $T^3 - \Sigma'$ qui contient Σ . Alors, la surface Σ définit un scindement de Heegaard de cette variété W .

La surface Σ' est compressible dans W , puisque les compressions de $\Sigma - \Gamma$ ne peuvent pas toutes s'effectuer du même côté. Soit alors D un disque de compression pour Σ' (contenu dans W d'après l'hypothèse de maximalité faite sur la famille (D_i)); le lemme de Haken pour un disque (cf. [2], [3]) dit que l'on peut isotoper D par une isotopie qui fixe son bord de sorte qu'il intersecte la surface Σ en une seule courbe. On obtient alors deux disques de compression disjoints pour la surface Σ respectivement contenus dans H_1 et dans H_2 . q.e.d.

Etant donné un scindement de Heegaard Σ de genre g d'une variété M , nous rappelons l'opération de *stabilisation* (cf. [12], [14]), qui permet d'en obtenir un de genre $g + 1$: elle consiste à faire la somme connexe de Σ avec le scindement standard de genre 1 de la sphère S^3 . La surface obtenue est bien définie à isotopie près.

Dans [3], les auteurs considèrent les scindements de Heegaard fortement réductibles des variétés irréductibles qui ne sont pas de Haken. Ils montrent qu'un tel scindement est toujours une stabilisation d'un scindement de genre strictement inférieur.

Ce résultat n'est plus vrai pour une variété de Haken (telle le tore T^3), mais toutefois la démonstration du Théorème 3.1 de [3] montre:

Proposition 1.3. *Soit M une variété de Haken. Pour un scindement de Heegaard Σ dans M qui est fortement réductible sans être une stabilisation, il existe une famille \mathcal{D} de disques disjoints et qui rencontrent Σ exactement le long de leur bord, telle que:*

- (1) *l'intersection de \mathcal{D} avec l'intérieur de chaque bretzel creux H_1 et H_2 est non vide;*
- (2) *la surface F obtenue en découpant Σ le long de \mathcal{D} est une réunion de sphères et d'au moins une surface incompressible;*
- (3) *chaque sphère de F est entièrement contenue dans l'un ou l'autre des deux bretzels H_1 ou H_2 .*

Sous les hypothèses de la Proposition 1.3, on a le lemme suivant dans lequel F' désigne la réunion des composantes incompressibles de F :

Lemme 1.4. *Soit V l'adhérence dans M d'une composante connexe de $M - F'$. Alors, l'intersection de l'un des bretzels H_1 ou H_2 avec V est connexe, par exemple H_1 ; d'autre part, le bord de la réunion d'un voisinage collier dans V de ∂V et de $H_2 \cap V$ est un scindement de Heegaard de V .*

Preuve. L'adhérence de la surface $\overset{\circ}{V} \cap \Sigma$ est la réunion des sphères de la surface F contenues dans V et d'anneaux, bords de l-anses, dont

la co-âme est un disque $D_i \in \mathcal{D}$. Les sphères de F sont entièrement contenues dans l'un des bretzels H_1 ou H_2 dans lequel elles bordent chacune une boule (car H_1 et H_2 sont irréductibles); donc, les sphères de $V \cap F$ bordent une réunion de boules disjointes contenues dans V (car ∂V est incompressible). Le complémentaire dans V de la réunion de ces boules et de la réunion des 1-anses est connexe, de sorte qu'il est contenu dans l'un des deux bretzels H_1 ou H_2 , disons H_1 . Ceci entraîne que l'intersection $H_1 \cap V$ est connexe et que les disques co-âmes des 1-anses contenues dans V sont tous des méridiens du même bretzel H_2 .

Considérons donc la surface, bord de la réunion d'un voisinage collier de ∂V dans V et de $H_2 \cap V$. Cette surface borde d'un côté une variété homéomorphe à $H_1 \cap V$: cette variété (connexe) obtenue en découpant le bretzel creux H_1 le long de disques est encore un bretzel creux. De l'autre côté, elle borde une variété obtenue à partir du voisinage collier de ∂V en rajoutant des 1-anses: c'est donc encore un bretzel creux. On reconnaît ainsi un scindement de Heegaard de V . q.e.d.

Le lemme ci-dessus permet de reconstruire le scindement Σ , à partir de scindements de Heegaard (de genre strictement inférieur) de sous-variétés à bord de M (cf. Figure 2). Cette construction est la clef de la preuve des théorèmes de classification des scindements de Heegaard des variétés T^3 et $T^2 \times [0, 1]$.

Nous nous intéressons maintenant aux scindements du tore épaissi $T^2 \times [0, 1]$; dans cette dernière variété, il y a deux types de scindements de Heegaard, à savoir, ceux qui séparent les deux composantes de bord et ceux qui les laissent d'un même côté. Appelons les premiers, scindements du type 1, et les autres scindements du type 2. Remarquons qu'il existe un scindement du premier type de genre 1, isotope à une composante de bord de $T^2 \times [0, 1]$, et que tous les scindements de genre 1 sont isotopes entre eux; il existe aussi un scindement du deuxième type de genre 2, obtenu en joignant les deux composantes du bord de $T^2 \times [0, 1]$ par un tube non noué, c'est-à-dire un voisinage régulier d'un arc vertical $x \times [0, 1]$, x appartenant à T^2 .

Il est montré dans [4] que tout scindement de genre 2 du type 2 est isotope à celui-ci. Toutefois, nous n'utiliserons pas ce résultat.

Appelons ces deux scindements des *scindements standards* (Figure 3). Nous montrerons dans le §3 le résultat suivant:

Théorème 1.5. *Tout scindement de Heegaard du tore épaissi $T^2 \times [0, 1]$ est isotope à une stabilisation d'un scindement standard, de genre 1 ou 2 selon le type du scindement de départ.*

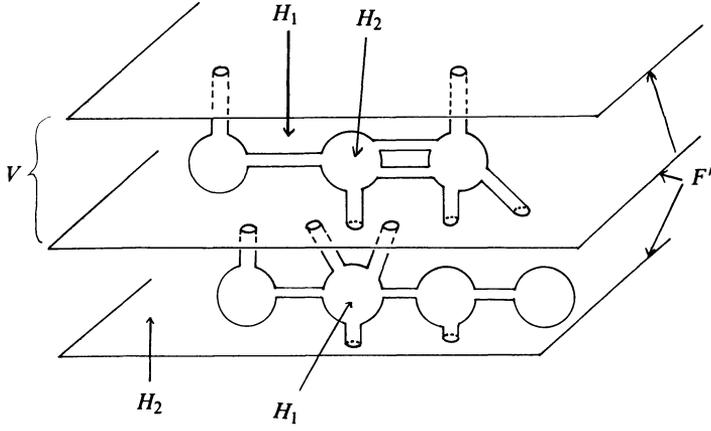


FIGURE 2

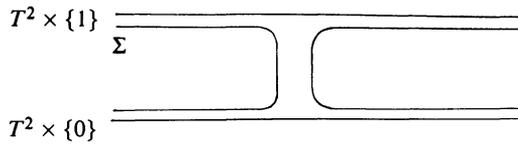
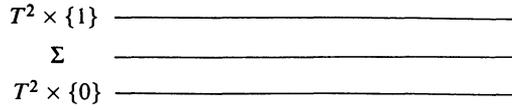


FIGURE 3

Montrons tout de suite comment déduire des résultats précédents la classification à isotopie près des scindements de Heegaard du tore T^3 .

Preuve du Théorème. Soit Σ un scindement de Heegaard de T^3 qui n'est pas une stabilisation. D'après le Corollaire 1.2, la Proposition 1.3 et le Lemme 1.4, Σ est obtenu en *recollant* des scindements de Heegaard le long de surfaces incompressibles disjointes (cf. Figure 2). Dans le tore T^3 , les seules surfaces incompressibles disjointes sont des tores parallèles

qui découpent T^3 en des variétés homéomorphes à $T^2 \times [0, 1]$. Puisque la surface Σ est homologue à 0, il y a nécessairement un nombre pair de ces tores.

La preuve du Lemme 1.4 montre que les scindements de Heegaard de ces tores épaissis induits par Σ sont du type 2. D'après le Théorème 1.5, ils sont isotopes dans chaque $T^2 \times [0, 1]$ à une stabilisation du scindement standard de genre 2. Soit V l'un de ces tores épaissis. Le bord de V rencontre transversalement H_1 et H_2 le long de disques méridiens disjoints. Suivant les notations du le Lemme 1.4, $H_1 \cap V$ est connexe et la fermeture dans V de l'intérieur de $H_2 \cap V$ est homéomorphe à une réunion de bretzels attachés à ∂V le long de disques. L'isotopie du scindement induit par Σ dans V à une stabilisation du scindement standard peut être réalisée par des isotopies et des glissements d'anses sur la réunion de ces bretzels de façon à respecter les disques méridiens de $H_1 \cap \partial V$.

Ainsi, toutes ces isotopies se recollent pour donner une isotopie de la surface Σ à un scindement qui est soit une stabilisation (lorsque l'un des scindements induits était une stabilisation), soit une superposition de scindements standards de genre 2. Lorsqu'on ne superpose que deux scindements standards de genre 2, on reconnaît un scindement de genre 3, isotope au scindement standard de T^3 . Lorsqu'on en superpose au moins 4, on met en évidence deux disques méridiens respectivement contenus dans H_1 et dans H_2 qui se coupent en un seul point (Figure 4).

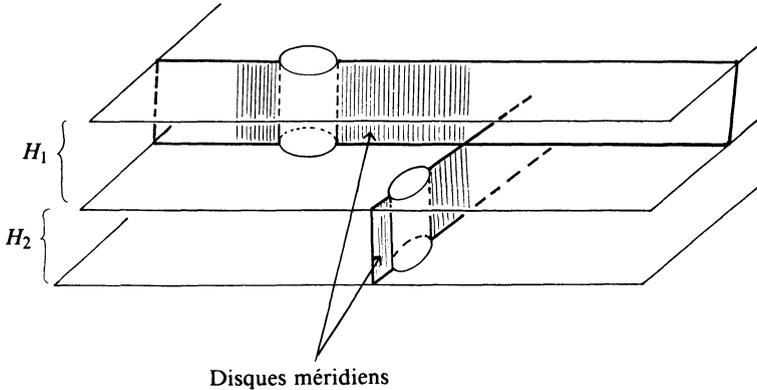


FIGURE 4

Notons pour terminer que les scindements de genre 3 standards sont tous isotopes. En effet, ils sont tous difféomorphes, et le groupe $\pi_0(\text{Diff}(T^3))$ est engendré par les transvections qui induisent des isotopies des scindements standards.

2. Démonstration de la Proposition 1.1: mise en bonne position d'un scindement de Heegaard de T^3

On garde les notations du premier paragraphe. On supposera dans la suite le scindement Σ associé à une fonction de Morse ordonnée h définie sur T^3 , c'est-à-dire que Σ est une surface de niveau de h de caractéristique d'Euler minimale (cf. [2]).

Nous allons démontrer la Proposition 1.1, première étape dans la preuve du Théorème. La démonstration de cette proposition utilise de manière essentielle la notion de *minceur* d'une courbe plongée dans une variété M par rapport à une fonction de Morse h sur cette variété. Cette notion, introduite par D. Gabai dans [7], et utilisée dans [1], est redéfinie ci-dessous.

Définition. Pour une courbe fermée γ plongée dans une variété M munie d'une fonction de Morse ordonnée h , telle que la fonction $h|_\gamma$ est de Morse avec des singularités à des niveaux distincts, la minceur de γ est définie comme le nombre: $m(\gamma) = \sum_i \text{card}(\Sigma_i \cap \gamma)$ où les surfaces Σ_i sont des niveaux réguliers de h qui séparent les valeurs critiques successives de la restriction $h|_\gamma$. La courbe γ est dite *en position mince par rapport à h* , si elle minimise la minceur $m(\gamma)$ dans sa classe d'isotopie et parmi les plongements pour lesquels $h|_\gamma$ a les propriétés requises.

La démonstration de la Proposition 1.1 va résulter d'une suite de lemmes techniques.

Lemme 2.1. *On peut isotoper le tore T_x de sorte qu'il rencontre transversalement la surface Σ et que l'intersection $\Sigma \cap T_x$ contienne au moins une courbe fermée c non homotope à 0 sur T_x .*

Preuve. Supposons le tore T_x en position de Morse par rapport à la fonction h , avec des singularités à des niveaux distincts: cette situation s'obtient par une légère perturbation du tore T_x dans T^3 . Notons \mathcal{F} le feuilletage (de Morse) du tore T_x par les lignes de niveau de la fonction h .

Définition. Une *selle essentielle* de \mathcal{F} est une selle dont les séparatrices sont toutes les deux non homotopes à 0 sur T_x .

Un argument de caractéristique d'Euler montre facilement l'existence d'au moins une selle essentielle pour \mathcal{F} . On en déduit immédiatement l'existence d'une courbe de niveau c de $h|_{T_x}$ qui n'est pas homotope à 0 sur T_x . La surface de niveau de h contenant la courbe c ne coïncide peut-être pas avec la surface Σ . Toutefois, ce niveau est contenu dans l'un des bretzels H_1 ou H_2 , disons par exemple H_1 ; on peut alors par une isotopie à support dans un voisinage de $H_1 \cap T_x$ isotoper l'intersection de

la surface de niveau de c avec T_x dans la surface Σ . Les conclusions du Lemme 2.1 sont alors vérifiées. q.e.d.

Quitte à appliquer un difféomorphisme de T^3 , qui respecte le tore T_x , on peut supposer que la courbe c donnée par le Lemme 2.1 est l'axe des y (d'équation $x = z = 0$). On note alors c' l'axe des z (c'est-à-dire la courbe de T_x d'équation $x = y = 0$). Par position générale, on peut toujours isotoper la courbe c' dans un voisinage collier $\Sigma \times [0, 1]$ de la surface Σ , disjoint des niveaux singuliers de la fonction h .

Les plongements dans T^3 du tore T_x que nous considérerons dans la suite vérifient les propriétés suivantes:

- (1) la fonction $h|_{T_x}$ est une fonction de Morse;
- (2) la courbe c' est contenue dans un voisinage collier de Σ disjoint des niveaux singuliers de h et la fonction $h|_{c'}$ est de Morse;
- (3) il existe une courbe de niveau de $h|_{T_x}$ isotope à la courbe c et correspondant à une valeur régulière de $h|_{c'}$ et de $h|_{T_x}$.

On choisit alors un plongement de T_x dans T^3 qui minimise la minceur $m(c')$ (dans T^3) parmi tous les plongements de T_x du type précédent.

Remarquons que le feuilletage de Morse \mathcal{F} induit par la fonction h sur T_x contient toujours un nombre pair de selles essentielles.

Lemme 2.2. *Après une isotopie de c' dans T_x qui fixe un voisinage de $c' \cap c$ et qui ne change pas la minceur de c' , on peut supposer que c' passe par chaque selle essentielle de \mathcal{F} et est ailleurs transverse à \mathcal{F} ; alors, chaque feuille régulière de \mathcal{F} qui passe par un point régulier de $h|_{c'}$ est alors isotope à c .*

Preuve. Chaque selle essentielle de \mathcal{F} fournit un anneau pincé A dont la frontière est formée des deux séparatrices issues de la selle.

Les anneaux pincés associés aux selles essentielles sont deux à deux disjoints. D'après l'hypothèse de minceur vérifiée par c' , l'intersection de c' avec un tel anneau est connexe ainsi que l'intersection de c' avec chaque composante du complémentaire de ces anneaux.

Par une isotopie de c' dans T_x , on peut remplacer l'arc $c' \cap A$ par un arc avec un seul extrémum dans son intérieur et passant par la selle de l'anneau A . Cette isotopie, modulo son bord, d'un arc κ , avec ses extrémités au même niveau et ayant un seul extrémum, en un arc κ' , ayant les mêmes propriétés mais dont l'extrémum est contenu dans un niveau antérieur, n'augmente pas la minceur.

Ceci étant, une isotopie de c' dans le complémentaire de la réunion des anneaux pincés termine la démonstration de la première partie du lemme.

Pour la deuxième partie du lemme, observons que la courbe c' est monotone entre deux anneaux pincés consécutifs, à cause de l'observation suivante.

Sous-Lemme 2.3. *Soit \mathcal{F} un feuilletage associé à une fonction de Morse générique h sur un anneau A , dont le bord est réunion de deux feuilles régulières, et qui ne contient pas de selles essentielles. Alors, il existe un arc proprement plongé dans A transverse à \mathcal{F} et qui joint les deux composantes de ∂A .*

Preuve. Remarquons pour commencer que le résultat ci-dessus est vrai si le feuilletage étudié ne contient pas de singularités: il suffit alors de considérer une trajectoire du champ de gradient de la fonction h . Rappelons qu'une *séparatrice* est une feuille du feuilletage \mathcal{F} qui passe par une singularité. Nous dirons qu'une séparatrice est *essentielle* si elle n'est pas homotope à 0 sur l'anneau A .

Supposons que le feuilletage \mathcal{F} possède au moins une singularité. Alors, par un argument de caractéristique d'Euler, le feuilletage \mathcal{F} contient au moins une séparatrice essentielle. Soit E la fermeture d'une composante connexe du complémentaire dans A de la réunion des séparatrices essentielles. Soient σ_1 et σ_2 les singularités (eventuelles) de \mathcal{F} contenues dans ∂E . Alors, si le feuilletage \mathcal{F} possède des singularités dans l'intérieur de E , celles-ci sont contenues dans le disque bordé dans E par l'une des séparatrices de σ_1 ou σ_2 (\mathcal{F} n'a pas de selles essentielles). Soit E' le complémentaire dans E de ces deux disques, ou de ce disque, selon qu'il y a deux tels disques ou bien un seul. Alors, le feuilletage \mathcal{F} n'a pas de singularités dans l'intérieur de E' . Donc, on peut construire une transversale qui joint le bord au bord. Cette transversale est aussi une transversale pour le feuilletage $\mathcal{F}|E$. On peut s'arranger pour que les transversales ainsi construites dans toutes les régions complémentaires E se recollent en un arc qui est alors transverse à \mathcal{F} . q.e.d.

Ainsi, la propriété de minceur vérifiée par la courbe c' entraîne qu'entre deux selles essentielles consécutives, la courbe c' est monotone. En particulier, dans un tel anneau, chaque feuille régulière de \mathcal{F} qui la rencontre n'est pas homotope à 0 et est donc isotope à c . q.e.d.

On considère maintenant le tore T_y , transverse à T_x le long de la courbe c' . Le tore T_x étant dans la position fournie par le Lemme 2.1, et c' dans la position fournie par le Lemme 2.2, on peut isotoper le tore T_y , relativement à c' , pour le mettre en position de Morse par rapport à la fonction h , avec des singularités à des niveaux distincts.

Soit R l'anneau obtenu en découpant T_y le long de la courbe c' ; on

note \mathcal{F}' le feuilletage de T_y induit par les lignes de niveau de h et \mathcal{F}'_R le feuilletage induit par \mathcal{F}' sur l'anneau R .

L'allure du tore T_x près des singularités de c' , ainsi que la propriété de transversalité des deux tores T_x et T_y le long de la courbe c' entraînent que, pour chaque singularité de $h|c'$, les deux singularités correspondantes de \mathcal{F}'_R près du bord ∂R sont l'une du type demi-selle, l'autre du type demi-centre.

La preuve de la Proposition 1.1 repose en premier lieu sur le lemme suivant.

Lemme 2.4. *Dans la situation qui vient d'être décrite, il existe une valeur régulière α de la fonction $h|T_y$ telle que l'intersection $T_y \cap h^{-1}(\alpha)$ contient une courbe fermée non homotope à 0 sur T_y et qui passe par un point régulier de la fonction $h|c'$.*

Preuve. La preuve suit des arguments analogues à ceux utilisés dans [1, Affirmation 5] (voir aussi [7]).

Dans la suite, un arc proprement plongé dans l'anneau R est dit *essentiel*, si ses deux extrémités sont situées dans des composantes distinctes de ∂R ; sinon, il est dit *inessentiel*.

Soit κ un arc inessentiel de l'anneau R , contenu dans une feuille du feuilletage \mathcal{F}'_R (c'est éventuellement la réunion de deux séparatrices issues d'une selle ou d'une demi-selle de ce feuilletage). Alors, il existe, par définition, un arc κ_0 , contenu dans ∂R ayant les mêmes extrémités que l'arc κ , et tel que la courbe $\kappa \cup \kappa_0$ est le bord d'un disque Δ plongé dans R . On a alors:

Affirmation 2.5. *La fonction $h|_{\kappa_0}$ a un seul point critique.*

Preuve. Puisque les extrémités de l'arc κ_0 sont situées à un même niveau, la fonction $h|_{\kappa_0}$ a au moins un point critique. Supposons qu'elle en a au moins deux.

Si l'arc κ_0 ne contient pas le point $c \cap c'$, on peut par une isotopie de c' , à support dans κ_0 , éliminer entre elles deux singularités de $h|c'$, réduisant ainsi la minceur de c' .

Si l'arc κ_0 contient le point $c \cap c'$, choisissons une valeur régulière de la fonction $h|c'$ dans le complémentaire de $h(\kappa_0)$, par laquelle passe donc une feuille f du feuilletage \mathcal{F} isotope à la courbe c . Remplaçons alors c par f . On peut ainsi réduire la minceur de c' , tout en gardant la propriété que T_x est transverse à la surface Σ (ou du moins à une surface de niveau de h isotope à Σ) le long de f .

Définition. Un arc inessentiel κ , contenu dans une feuille de \mathcal{F}'_R est dit *négligatif* (resp. *positif*), si la singularité de la fonction $h|_{\kappa_0}$ est un minimum (resp. un maximum).

Soit m le plus haut minimum de la fonction $h|c'$ et soit M le maximum immédiatement supérieur à m .

On définit les deux sous-ensembles suivants S^+ et S^- de l'intervalle $]m, M[$: S^+ (resp. S^-) est l'ensemble des valeurs $\alpha \in]m, M[$ telles que le niveau $h^{-1}(\alpha)$ contient un arc inessentiel positif (resp. négatif).

D'après l'allure locale du feuilletage \mathcal{F}'_R au voisinage des niveaux m et M , S^+ contient un voisinage de M et S^- contient un voisinage de m . Comme dans [7, Lemme 4.4], on montre que S^+ et S^- sont fermés dans l'intervalle $]m, M[$, en utilisant l'Affirmation 2.5.

On distingue ensuite les deux cas suivants:

1er cas. $S^+ \cup S^- \neq]m, M[$.

Il existe alors un niveau régulier de la fonction $h|R$ qui est réunion d'une famille non vide d'arcs essentiels et de courbes fermées homotopes à 0 sur R . Ces arcs essentiels se referment en une réunion de feuilles de \mathcal{F}' , qui sont des courbes simples non homotopes à 0 sur T_y .

2e cas. $S^+ \cup S^- =]m, M[$.

Alors $S^+ \cap S^- \neq \emptyset$. Lorsque la fonction $h|c'$ a plus de deux maximums, on contredit comme dans [7, Lemme 4.4] le fait que c' est en position mince (on raisonne comme dans l'Affirmation 2.5 pour tenir compte de la courbe c).

Sinon, la fonction $h|c'$ a uniquement un maximum. Puisque, par hypothèse, $S^+ \cap S^- \neq \emptyset$, il existe deux arcs inessentiels au même niveau, κ et κ' , l'un positif, l'autre négatif.

Affirmation 2.6. *Il existe deux arcs inessentiels, l'un positif, l'autre négatif, qui sont des feuilles lisses du feuilletage \mathcal{F}'_R .*

Preuve. Notons κ et κ' les deux arcs inessentiels définis avant l'Affirmation 2.6; soient κ_0 et κ'_0 les deux arcs de ∂R qui leur sont respectivement associés.

Si les deux sont des feuilles régulières, l'affirmation est démontrée.

Sinon, comme ils sont au même niveau, au plus un des deux arcs, disons κ , contient une singularité du type selle σ du feuilletage \mathcal{F}'_R . On a les trois possibilités suivantes:

(1) les deux autres séparatrices issues de σ se referment en une courbe homotope à 0;

(2) les deux autres séparatrices issues de σ se referment en une courbe homotope à c' ;

(3) les deux autres séparatrices issues de σ aboutissent à la composante de ∂R qui ne contient pas κ_0 .

Le dernier cas est impossible, par exemple car c' intersecte le niveau de σ en uniquement deux points.

Dans le premier cas, un niveau voisin de celui de σ , contient deux arcs inessentiels qui vérifient l’Affirmation 2.6.

Considérons donc le deuxième cas: une feuille du feuilletage \mathcal{F}'_R passant par un niveau voisin de celui de σ et qui a ses extrémités dans la même composante de ∂R que κ est ou bien un arc inessentiel positif ou bien un arc inessentiel négatif. Puisque la feuille κ' est une feuille régulière du feuilletage \mathcal{F}'_R , toutes les feuilles voisines sont du même type qu’elle. Donc, un niveau voisin de celui de σ contient deux feuilles inessentiels, l’une positive, l’autre négative, aboutissant aux mêmes composantes de ∂R que les feuilles κ et κ' .

Remarquons finalement que ni l’arc κ , ni l’arc κ' ne peuvent contenir une demi-selle du feuilletage \mathcal{F}'_R , par définition de S^+ et S^- .

Ceci termine la démonstration de l’Affirmation 2.6. q.e.d.

Remarquons maintenant que les deux arcs fournis par l’affirmation précédente se referment en une feuille fermée du feuilletage \mathcal{F}' , homotope à c' sur T_y .

Le Lemme 2.4 est donc établi dans tous les cas. q.e.d.

Nous terminons maintenant la démonstration de la Proposition 1.1.

Soit α le niveau fourni par le Lemme 2.4. Le tore T_y est transverse à la surface $h^{-1}(\alpha)$ le long d’une collection de courbes fermées dont l’une, f_x , n’est pas homotope à 0 et passe par le point p de la courbe c' .

Remarquons que la surface $h^{-1}(\alpha)$ est isotope à Σ , puisqu’elle passe par un point de la courbe c' , et qu’on a imposé à cette dernière d’éviter les niveaux singuliers de la fonction h .

Notons maintenant f_y la courbe de niveau de la fonction $h|_{T_x}$ passant par le point p . Cette courbe est isotope à c et coupe c' transversalement au seul point p . En effet, le Lemme 2.2 a fourni une isotopie de c' après laquelle chaque courbe de niveau régulière de $h|_{T_x}$ passant par un point de c' est isotope à c ; et les isotopies de T_y qui ont été effectuées par la suite, étaient toutes relatives à la courbe c' .

Soit maintenant \bar{z} une courbe fermée simple tracée sur T_y qui coupe transversalement f_x au seul point p . On peut supposer que la fonction $h|\bar{z}$ est une fonction de Morse et que α en est une valeur régulière, puisque f_x est une courbe d’intersection transverse des surfaces $h^{-1}(\alpha)$ et T_y . On peut même choisir la courbe \bar{z} de sorte qu’elle contienne un voisinage du point p sur la courbe c' .

Les deux courbes f_y et \bar{z} sont contenues dans un tore incompressible que nous noterons T'_x , transverse au tore T_y le long de la courbe \bar{z} ; on

peut isotoper ce tore T'_x de sorte qu'il contienne un voisinage de la courbe f_y sur T_x .

Le tore T'_x intersecte alors transversalement le niveau $h^{-1}(\alpha)$ le long d'une collection de courbes qui contient f_y . Le tore T_y intersecte transversalement $h^{-1}(\alpha)$ le long d'une collection de courbes qui contient f_x .

Les courbes f_x , f_y et \bar{z} diffèrent des axes de coordonnées de T^3 , x , y , et z par un difféomorphisme ϕ de T^3 .

Ceci termine la démonstration de la Proposition 1.1.

3. Démonstration du Théorème 1.6: scindements de Heegaard de $T^2 \times [0, 1]$

Fixons pour commencer quelques notations: sur $T^2 \times 0$, soient c_1 et c_2 deux courbes duales essentielles s'intersectant transversalement au point x_0 . On utilisera les deux anneaux $A_1 = c_1 \times [0, 1]$ et $A_2 = c_2 \times [0, 1]$ qui s'intersectent transversalement le long de l'arc $k = x_0 \times [0, 1]$.

On notera aussi A'_i le rectangle obtenu en découpant A_i le long de l'arc k , et on dira qu'un arc proprement plongé dans ce rectangle est *essentiel* si ses deux extrémités sont contenues dans des composantes distinctes de $\partial A'_i - \partial(T^2 \times [0, 1])$.

Comme dans le chapitre précédent, on considère une fonction de Morse ordonnée h sur la variété $T^2 \times [0, 1]$, qui admet comme surface de niveau de caractéristique d'Euler minimale le scindement étudié Σ . Précisons davantage le comportement de la fonction h selon le type du scindement Σ considéré. Rappelons qu'on distingue deux types de scindements de Heegaard pour cette variété selon que Σ sépare ou non les deux composantes du bord de $T^2 \times [0, 1]$.

Pour un scindement du premier type, on demande à la composante $T^2 \times 0$ d'être le niveau minimum de h , à la composante $T^2 \times 1$ d'être le niveau maximum, et à la fonction h de ne pas avoir de singularité qui soit un extrémum local.

Pour un scindement du deuxième type, on demande aux deux composantes d'être à un même niveau et à la fonction h de ne pas avoir d'extrémum local dans le bretzel creux qui contient ces composantes.

L'arc k étant en position de Morse par rapport à la fonction h , on peut définir sa minceur vis-à-vis de h : la définition, donnée dans le chapitre précédent dans le cas d'une courbe fermée, se généralise sans difficulté

au cas d'un arc proprement plongé. Supposons maintenant que l'arc k minimise la minceur parmi les arcs dans sa classe d'isotopie dont toutes les singularités sont contenues entre deux niveaux réguliers de la fonction h (et donc isotopes à Σ).

On a alors le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Si l'arc k est en position mince par rapport à la fonction h , ou bien le scindement Σ est fortement réductible, ou bien le nombre de singularités de $h|_k$ est inférieur ou égal à 1.*

Dans la dernière conclusion du lemme précédent, remarquons que lorsque le scindement Σ est du premier type, l'arc k est nécessairement monotone vis-à-vis de la fonction de Morse h , et que si le scindement est du deuxième type, le nombre de singularités est alors exactement 1.

Preuve. Nous allons montrer que si la fonction $h|_k$ a au moins un maximum et un minimum, alors le scindement Σ est fortement réductible.

L'arc k étant en position mince vis-à-vis de la fonction h , on commence par isotoper les deux anneaux A_1 et A_2 de sorte que les fonctions $h|_{A_i}$ soient de Morse avec des singularités à des niveaux distincts. On peut aussi imposer que les points singuliers de $h|_k$ soient des points réguliers de $h|_{A_i}$.

Supposons que la fonction $h|_k$ a au moins un maximum et un minimum. Soit m son plus haut minimum et soit M le premier maximum immédiatement supérieur. Les arguments du Lemme 2.4 (essentiellement dus à D. Gabai) entraînent le résultat suivant:

Affirmation 3.2. *Il existe une valeur régulière $\alpha \in]m, M[$ de la fonction h telle que chaque intersection $h^{-1}(\alpha) \cap A'_i$ est transverse et est une réunion de courbes fermées et d'arcs essentiels.*

Il y a autant d'arcs essentiels dans l'intersection $A'_i \cap h^{-1}(\alpha)$, que de points d'intersection du niveau $h^{-1}(\alpha)$ avec l'arc k . Donc, l'intersection du niveau $h^{-1}(\alpha)$ avec chacun des anneaux A_i contient autant de courbes isotopes à c_i que de points d'intersection avec l'arc k . Par hypothèse, dans tous les cas (que le scindement Σ soit du premier ou du deuxième type) il y a donc $p \geq 3$ courbes d'intersection, isotopes à c_i , du niveau $h^{-1}(\alpha)$ (isotope à Σ) avec les anneaux A_i .

Soit A la réunion des deux anneaux A_1 et A_2 . La surface Σ intersecte transversalement A . La trace sur Σ de A est une réunion de courbes fermées et de p graphes, chacun d'eux étant homéomorphe à la réunion de deux courbes simples ayant un point d'intersection transverse. Nous allons montrer que lorsque le nombre p de composantes de $\Sigma \cap A$ qui sont des graphes est supérieur à 3, le scindement Σ est fortement réductible.

Le complémentaire dans $T^2 \times [0, 1]$ d'un voisinage régulier de A est homéomorphe à une boule B . On peut donc par des chirurgies successives le long de disques de compression contenus dans B transformer la surface $\Sigma \cap B$ en une surface, réunion disjointe de sphères et de disques proprement plongés dans B .

Ces chirurgies induisent une compression de la surface Σ sur une réunion de p tores (chacun correspondant à une composante de $\Sigma \cap A$ qui est un graphe) et de sphères. Remarquons tout d'abord que chacun de ces p tores est incompressible dans la variété ambiante car il est isotope à une composante du bord de $T^2 \times [0, 1]$.

Affirmation 3.3. *Les disques de compression de la surface Σ sur une réunion de sphères et de $p \geq 3$ tores incompressibles ne peuvent être tous contenus dans le même bretzel creux (H_1 ou H_2).*

Preuve. Si on chirurgise la surface Σ dans le même bretzel creux, H_1 par exemple, sur une surface Σ' , cette nouvelle surface borde un bretzel creux contenu dans H_1 . Or le bretzel creux H_1 a au plus deux composantes de bord disjointes de Σ (exactement deux lorsque le scindement considéré est du deuxième type). Donc le nombre de tores incompressibles que la surface Σ' peut contenir est inférieur ou égal à 2. q.e.d.

Le raisonnement utilisé dans la démonstration du Corollaire 1.2, et en particulier le lemme de Haken pour un disque ([2], [3]) entraîne maintenant que le scindement Σ est fortement réductible.

Ceci termine la démonstration du Lemme 3.1. q.e.d.

La stratégie de la démonstration du Théorème 1.5, consiste maintenant à raisonner par récurrence et à étudier les scindements qui ne sont pas fortement réductibles. Nous allons montrer tout de suite qu'ils sont standards. Le même raisonnement que celui utilisé au premier paragraphe dans la preuve du théorème de classification permettra ensuite de *recoller* les informations pour en déduire le Théorème 1.5.

Commençons par la proposition suivante.

Proposition 3.4. *Soit Σ un scindement de Heegaard de $T^2 \times [0, 1]$ qui n'est pas fortement réductible. Alors, il est isotope au scindement standard du même type.*

Preuve. Soit h une fonction de Morse associée au scindement Σ comme précédemment.

Nous distinguons deux cas, selon que la surface Σ est du premier type ou du deuxième type.

I. Le scindement Σ est du premier type. Alors, d'après le Lemme 3.1, on peut isotoper l'arc k de sorte que la fonction $h|_k$ soit monotone:

l'intersection de l'arc k avec chaque niveau de la fonction h , en particulier avec Σ , est donc réduite à un seul point. On a alors:

Lemme 3.5. *Après une isotopie de $A = A_1 \cup A_2$, l'intersection $A \cap \Sigma$ est connexe.*

Preuve de la Proposition 3.4 pour les scindements du premier type, modulo le Lemme 3.5. Dans la situation fournie par le Lemme 3.5, le bord d'un voisinage régulier de $A \cap \Sigma$ est une courbe qui borde deux disques respectivement plongé dans H_1 et dans H_2 . Il en résulte que le scindement Σ est la somme connexe du scindement standard de genre 1 de $T^2 \times [0, 1]$ et d'un scindement de la sphère S^3 ; or tout scindement de la sphère S^3 est une stabilisation, et, en particulier, fortement réductible.

Donc le scindement Σ est le scindement standard de genre 1. q.e.d.

Preuve du Lemme 3.5. La première étape de la preuve est le résultat suivant.

Sous-Lemme 3.6. *On peut isotoper l'anneau A_1 par une isotopie qui fixe l'arc k de sorte que son intersection avec la surface Σ soit transverse et connexe.*

Preuve. Nous allons appliquer à l'anneau A_1 la méthode de Haken pour simplifier l'intersection d'une sphère ou d'un disque avec un scindement de Heegaard. Il est bien connu que cette méthode de réduction ne s'adapte pas à des surfaces de complexité supérieure; toutefois, dans notre situation, nous allons montrer qu'elle s'applique parce que le scindement considéré n'est pas fortement réductible.

Supposons que l'anneau A_1 est transverse à la surface Σ et qu'il minimise le nombre de composantes connexes de $A_1 \cap \Sigma$, dans sa classe d'isotopie relativement à k ; on va montrer qu'alors l'anneau A_1 vérifie le Sous-lemme 3.6.

On note F_i la composante connexe de $A_1 \cap H_i$ qui contient l'arc $k_i = k \cap H_i$, ceci pour $i = 1, 2$. Si F_1 et F_2 sont des anneaux, alors $A_1 = F_1 \cup F_2$ et A_1 intersecte la surface Σ conformément au Sous-lemme 3.6.

Supposons donc par exemple, que la composante F_1 n'est pas un anneau. Dans ce cas, le genre de Σ est supérieur ou égal à 2. On choisit alors dans le bretzel H_1 une famille finie de disques méridiens $(\Delta_i)_{i=1, \dots, m}$ qui découpe le bretzel creux H_1 en un voisinage régulier de la composante incompressible de son bord. Puisque l'arc k est vertical pour la fonction de Morse h , on peut choisir ces disques Δ_i disjoints de k .

D'après l'hypothèse de minimalité sur le nombre de composantes de $A_1 \cap \Sigma$, la surface $\tilde{A}_1 = A_1 \cap H_1$ est incompressible dans H_1 et donc, puisqu'elle n'est pas homéomorphe à une réunion de disques et d'anneaux, son intersection avec la réunion des disques Δ_i est non vide.

Ceci étant vrai pour tous les systèmes de disques, supposons que celui que nous avons choisi minimise le nombre de composantes d'intersection avec \tilde{A}_1 . Considérons alors les intersections de \tilde{A}_1 avec un disque Δ de cette famille; choisissons un arc d'intersection γ qui a la propriété d'être *plus extérieur*, c'est-à-dire qu'il découpe Δ en deux composantes dont l'une, D_0 , n'intersecte pas la surface \tilde{A}_1 .

Comme l'arc $k_1 \subset \tilde{A}_1$ joue un rôle quelque peu particulier, nous utiliserons la définition suivante:

Définition. Un arc γ proprement plongé dans la surface \tilde{A}_1 , disjoint de k_1 est dit *essentiel* si aucune des composantes connexes de $\tilde{A}_1 - (k_1 \cup \gamma)$ n'est un disque.

On distingue deux cas, suivant que l'arc γ est ou n'est pas essentiel sur la surface \tilde{A}_1 .

(a) L'arc γ est essentiel sur la surface \tilde{A}_1 .

On chirurgise alors la surface \tilde{A}_1 le long du disque D_0 ; notons que cette chirurgie est induite par une isotopie de l'anneau A dans $T^2 \times [0, 1]$.

Si c'est la seule possibilité pour les intersections de (Δ_i) avec la surface \tilde{A}_1 (après les modifications de chirurgie éventuelles), la méthode usuelle de Haken permet de conclure; cette méthode est basée sur le résultat suivant:

Affirmation 3.7. *Si après avoir chirurgisé la surface \tilde{A}_1 le long d'arcs essentiels sur \tilde{A}_1 , on obtient une réunion de disques et d'un anneau, alors le nombre de composantes connexes de l'intersection de \tilde{A}_1 et de Σ a strictement diminué.*

Preuve. Il s'agit du lemme de Haken pour la surface $\tilde{A}_1 - k_1$ ([8]). q.e.d.

Donc, lorsque la méthode de Haken s'applique, on contredit la propriété qu'avait l'anneau A_1 de minimiser le nombre de composantes connexes de $A_1 \cap \Sigma$.

(b) L'arc γ n'est pas essentiel sur la surface \tilde{A}_1 , et est contenu dans une composante de \tilde{A}_1 différente de F_1 .

Un raisonnement bien connu permet de modifier le système (Δ_i) , pour réduire le nombre de composantes d'intersection de $\tilde{A}_1 \cap (\cup \Delta_i)$, ce qui est impossible par hypothèse.

Il en est de même, si l'arc γ est contenu dans la surface F_1 , et borde sur la surface $F_1 - k_1$ un disque ne contenant pas k_1 dans son adhérence, car on peut réaliser la même modification du système (Δ_i) .

(c) L'arc γ est inessentiel sur la surface F_1 , et borde sur $F_1 - k_1$ un disque D'_0 qui contient dans sa fermeture l'arc k_1 .

La réunion de la fermeture de D_0 et de D'_0 est un anneau A_0 qui contient k_1 et qui est tangent à F_1 le long de cet arc k_1 .

Notons M la fermeture dans $T^2 \times [0, 1]$ du complémentaire d'un voisinage régulier de la réunion des anneaux A_1 et A_0 . La variété M est homéomorphe au complémentaire dans $T^2 \times [0, 1]$ de l'anneau A_1 ; donc, son groupe fondamental est cyclique. Soit $\tilde{\Sigma}$ la trace dans M de la surface Σ ; $\tilde{\Sigma}$ est donc compressible dans M , car Σ a un genre supérieur ou égal à 2, et les seules surfaces incompressibles dans M sont des disques ou des anneaux. En particulier, on peut, par des compressions le long de disques contenus dans M chirurgiser la surface $\tilde{\Sigma}$ en une surface, réunion disjointe de disques et d'anneaux contenus dans M .

On distingue alors les trois cas suivants.

1er cas. Les disques de compression sont tous contenus dans H_1 .

On peut donc comprimer la surface Σ en une réunion de sphères et de tores contenus dans H_1 . L'un de ces tores est forcément incompressible, à savoir, celui qui contient $k_1 \cap \Sigma$. La composante F_1 de A_1 est contenue dans un tore épaissi: c'est donc un anneau. C'est impossible car on avait supposé que F_1 était différente d'un anneau.

2e cas. Les compressions de la surface $\tilde{\Sigma}$ sont toutes contenues dans H_2 .

Alors, on peut chirurgiser la surface Σ sur une réunion de tores et de sphères contenus dans H_2 ; les composantes $A_0 \cap \Sigma$ et $F_1 \cap \Sigma$ sont contenues dans la même composante de la nouvelle surface chirurgisée, qui est nécessairement un tore parallèle à $\partial H_2 - \Sigma$ (puisque l'arc k_1 coupe en un seul point la surface Σ). On peut alors étendre l'anneau A_0 en un anneau joignant entre elles les deux composantes du bord de $T^2 \times [0, 1]$, ceci en lui rajoutant un anneau, proprement plongé dans H_2 , dont une composante du bord est contenue dans Σ et l'autre dans $\partial H_2 - \Sigma$. L'anneau obtenu est isotope à A_1 et la conclusion du Sous-lemme 3.6 est donc vérifiée.

3e cas. Les disques de compressions de $\tilde{\Sigma}$ dans M ne sont pas tous contenus dans l'un ou l'autre des bretzels creux H_1 ou H_2 .

Alors, comme dans les preuves du Corollaire 1.2 et de l'Affirmation 3.2, le lemme de Haken pour les disques ([2], [3]) entraîne que le scindement Σ est fortement réductible. Ceci est contraire à notre hypothèse.

Ceci termine la démonstration du Sous-lemme 3.6. q.e.d.

Fin de la preuve du Lemme 3.5. Dans la situation fournie par le sous-lemme précédent, l'anneau A_1 est vertical, c'est-à-dire, qu'il rencontre transversalement la surface Σ en une seule courbe fermée.

Pour terminer la démonstration du Lemme 3.5, il nous suffit de voir qu'on peut isotoper l'anneau A_2 dans le complémentaire de A_1 de sorte que l'intersection de A_2 avec Σ soit réduite à une seule courbe fermée.

On note G_i la composante connexe de $H_i \cap A_2$ qui contient l'arc k_i . Notons aussi \tilde{A}_2 l'intersection de A_2 et de H_1 . Supposons finalement que l'intersection de A_2 et de Σ est transverse et que le nombre de composantes connexes de cette intersection est minimal pour le plongement considéré, dans sa classe d'isotopie relative à k_1 .

Supposons par exemple, que G_1 n'est pas un anneau. Considérons les familles finies de disques disjoints (Δ_i) pour le bretzel H_1 , disjoints de l'anneau A_1 , transverses à G_1 et qui découpent H_1 en un tore épaissi; choisissons une famille qui minimise le nombre de composante connexes d'intersection de $\tilde{A}_2 \cap (\cup \Delta_i)$.

Comme dans le raisonnement du Sous-lemme 3.6, si la méthode de Haken ne peut être menée à terme, il apparaît nécessairement parmi l'intersection $G_1 \cap (\cup \Delta_i)$ un arc γ "plus extérieur" sur l'un des disques, Δ , inessentiel sur G_1 et qui borde un disque D'_0 dans $G_1 - k_1$ dont l'adhérence est un anneau qui contient k_1 .

On construit alors un anneau $A_0 = D_0 \cup D'_0$, où D_0 est le disque bordé par γ dans Δ dont l'intérieur est disjoint de G_1 . Le commutateur des courbes $A_0 \cap \Sigma$ et $A_1 \cap \Sigma$ borde une disque D_1 proprement plongé dans le bretzel H_1 qui, par construction, intersecte la surface G_1 le long de l'arc γ . Ce disque D_1 permet de décrire le bretzel H_1 comme la somme connexe d'un bretzel H'_1 et d'un tore épaissi. Par construction, la surface $\tilde{A}'_2 = \tilde{A}_2 \cap H'_1$ intersecte D_1 le long de l'arc γ . On va appliquer la méthode de réduction de Haken à la surface \tilde{A}'_2 dans le bretzel H'_1 en raisonnant relativement au disque $D_1 \subset \partial H'_1$. On choisit donc un système de méridiens pour le bretzel H'_1 , disjoints du disque D_1 et qui découpent H'_1 en une boule. Puisque G_1 n'est pas un anneau, la surface $G'_1 = G_1 \cap H'_1$ n'est pas un disque, donc son intersection avec la famille de méridiens choisie n'est pas vide.

Pour appliquer la méthode de réduction de Haken relativement à l'arc γ , il suffit de voir comment traiter la situation suivante: il existe un arc $\alpha \subset G'_1 \cap (\cup \Delta_i)$, plus extérieur sur un disque Δ de cette famille et qui découpe un disque D''_0 de la surface G'_1 dont le bord contient l'arc γ .

Soient Δ' et Δ'' les deux disques obtenus en découpant Δ le long de l'arc α . Alors, pour chacun des deux disques $\Delta' \cup D''_0$ et $\Delta'' \cup D''_0$, le nombre de composantes connexes d'intersection avec G'_1 a strictement diminué. L'un de ces deux disques peut être incorporé à la place de Δ dans le système de méridiens pour H'_1 ; comme l'intersection de D_1 et de G'_1 est réduite à l'arc γ , on peut par une isotopie, rendre ce disque disjoint de D_1 . On obtient alors un nouveau système de disques méridiens

pour H'_1 . Ceci entraîne que la méthode de Haken peut s'appliquer dans le bretzel H'_1 (notons qu'il a été fondamental pour notre raisonnement que l'intersection de la surface G'_1 et du disque de somme connexe soit réduite à un seul arc).

Comme d'habitude, on en déduit, puisque le nombre de composantes connexes de $\tilde{A}_2 \cap \Sigma$ était minimal, que la surface G'_1 est un disque, ce qui contredit l'hypothèse que G_1 n'est pas homéomorphe à un anneau. q.e.d.

II. Le scindement Σ est du deuxième type. Alors, la fonction $h|k$ a une seule singularité d'après le Lemme 3.1, par exemple un maximum, et Σ sépare $T^2 \times [0, 1]$ en un bretzel H_1 et un bretzel creux H_2 dont les composantes incompressibles du bord correspondent au bord de $T^2 \times [0, 1]$.

Considérons les deux anneaux A_1 et A_2 qui s'intersectent transversalement le long de k . Par une isotopie qui respecte k , on peut obtenir que chacun de ces anneaux est en position de Morse vis-à-vis de la fonction hauteur h ; dans ce cas, le feuilletage de chacun de ces anneaux, induit par les lignes de niveau de la fonction h , possède exactement une selle essentielle, c'est-à-dire une selle dont les deux séparatrices sont non homotopes à 0.

Supposons par exemple que la selle essentielle σ du feuilletage de l'anneau A_1 est située à un niveau α plus bas que celui de la selle essentielle de l'anneau A_2 .

On commence par isotoper l'arc k de sorte qu'il passe par la selle σ . On réalise cette isotopie comme dans le Lemme 2.2 par un mouvement de k sur l'anneau A_1 qui fixe les niveaux de k inférieurs à $\alpha - \varepsilon$. Cette isotopie se prolonge en une isotopie de l'anneau A_2 après laquelle l'intersection de la surface $h^{-1}(\alpha)$ avec $A = A_1 \cup A_2$ est la réunion de deux graphes disjoints Γ et Γ' chacun d'eux étant formé de deux courbes simples, l'une isotope à c_1 , l'autre isotope à c_2 qui se coupent transversalement en un seul point contenu dans le sous-arc k_0 de l'arc k correspondant aux niveaux supérieurs à $\alpha - \varepsilon$. La condition de transversalité des anneaux A_1 et A_2 le long de l'arc k , en particulier sur le sous-arc k_0 , permet d'isotoper k_0 sur la surface $h^{-1}(\alpha - \varepsilon)$ de sorte que son intersection avec $\Gamma \cup \Gamma'$ consiste exactement en ses extrémités.

Appelons θ la réunion de Γ , Γ' et de l'arc obtenu que nous noterons toujours k_0 . On peut supposer que le graphe θ est contenu dans la surface Σ ; si ce n'est pas le cas en effet, on peut utiliser le champ de gradient de la fonction h pour l'y ramener.

Considérons maintenant la variété N , complémentaire dans $T^2 \times [0, 1]$ d'un voisinage régulier ouvert du graphe $\Gamma \cup \Gamma'$: on peut décrire la variété N comme la somme connexe de trois tores épaissis. La condition de transversalité de la réunion $A = A_1 \cup A_2$ à la surface Σ entraîne que le bord d'un voisinage régulier sur Σ de $\Gamma \cup \Gamma'$ est la frontière de deux disques disjoints proprement plongés dans N . Donc par une suite de compressions le long de disques contenus dans N , on peut chirurgiser la surface $\Sigma \cap N$ en une surface, réunion disjointe de deux disques de tores et de sphères.

1er cas. Il existe une famille de disques, de compression pour $\Sigma \cap N$ entièrement contenue dans le bretzel H_1 .

Alors dans la surface chirurgisée, chaque graphe Γ ou Γ' est tracé sur un tore contenu dans H_1 . C'est impossible, puisque H_1 est un bretzel et que ce tore est incompressible.

2e cas. Il existe une famille de disques de compression pour la surface $\Sigma \cap N$ entièrement contenue dans H_2 .

Notons alors γ et γ' le bord d'un voisinage régulier sur Σ des graphes Γ et Γ' . Les deux courbes γ et γ' bordent alors un disque méridien proprement plongé dans H_2 . Soient T_1 et T_2 les deux tores obtenus en coupant la surface Σ le long de ces deux disques. La réunion de ces deux tores est isotope à la réunion des tores incompressibles de ∂H_2 (on utilise ici qu'il y a une famille de disques de compression pour $\Sigma \cap N$ entièrement contenue dans H_2).

Soit alors W la composante du complémentaire dans $T^2 \times [0, 1]$ d'un voisinage régulier ouvert de la réunion $T_1 \cup k_0 \cup T_2$ qui ne rencontre pas le bord de $T^2 \times [0, 1]$. Par construction, W est un bretzel de genre 2 et son bord est le scindement standard de $T^2 \times [0, 1]$.

En utilisant le fait que l'arc k_0 est tracé sur la surface Σ , on déduit que, après avoir poussé le bord de W dans l'intérieur de H_2 , la surface Σ définit un scindement de Heegaard de W . Or les scindements de Heegaard d'un bretzel sont tous obtenus par stabilisation sur le scindement standard, ici ∂W (cf. [2], [16]).

On en déduit que le scindement Σ est une stabilisation du scindement standard.

3e cas. Pour comprimer la surface $\Sigma \cap N$, on doit effectuer des compressions des deux côtés de Σ .

Alors, comme dans la démonstration du Corollaire 1.2, on montre que le scindement Σ est fortement réductible.

Ceci termine la démonstration de la Proposition 3.4. q.e.d.

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 1.5.

Preuve du Théorème 1.5. On raisonne par récurrence sur le genre du scindement étudié.

Un scindement du premier type de genre 1 est toujours standard; et un scindement du deuxième type de genre 2 ne peut pas être fortement réductible, de sorte qu'il est standard, d'après la Proposition 3.4.

Soit Σ un scindement de Heegaard de $T^2 \times [0, 1]$ de genre g .

Si ce scindement est fortement réductible, d'après la Proposition 1.3 et le Lemme 1.4, il existe une famille de disques proprement plongés dans H_1 ou dans H_2 , et qui n'est pas entièrement contenue dans un seul des bretzels creux H_i , telle que: la surface obtenue en chirurgisant Σ le long de ces disques est une réunion de tores incompressibles et de sphères.

Si la surface obtenue par chirurgie ne contient aucun tore, alors, comme dans [3], on voit Σ est une stabilisation. Donc, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Supposons donc que la surface obtenue par chirurgie contient au moins un tore. Considérons une composante V_i du complémentaire de la réunion de ces tores (qui contient éventuellement l'un des tores du bord de $T^2 \times [0, 1]$). Le Lemme 1.4 dit que la surface Σ "induit" un scindement de Heegaard de V_i (qui est homéomorphe à un tore épaissi). L'hypothèse de récurrence s'applique à ce scindement, dont le genre est strictement inférieur à g . Donc le scindement induit est une stabilisation du scindement standard.

On "recolle" les isotopies de $\Sigma \cap V_i$ comme dans la démonstration du Théorème de classification dans le §1.

Pour conclure, si l'un des scindements induits est une stabilisation, il en est de même pour Σ ; il suffit donc de considérer le cas où le scindement Σ est une superposition de scindements standards. Comme dans le §1, on met alors en évidence deux disques méridiens, l'un dans H_1 , l'autre dans H_2 dont les bords s'intersectent en un seul point (cf. Figure 4).

Ceci termine la démonstration du Théorème 1.5.

References

- [1] M. Boileau & J. P. Otal, *Groupe des difféotopies de certaines variétés de Seifert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **303** (1986) 19–22.
- [2] F. Bonahon & J. P. Otal, *Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **16** (1983) 451–466.
- [3] A. J. Casson & C. McA. Gordon, *Reducing Heegaard splittings*, Topology Appl. **27** (1987) 275–283.
- [4] C. Frohman, *Minimal surfaces and Heegaard splittings of the three-torus*, Pacific J. Math. **124** (1986) 119–130.

- [5] —, *The topological uniqueness of triply periodic minimal surfaces in \mathbf{R}^3* , preprint, 1988.
- [6] C. Frohman & J. Hass, *Unstable minimal surfaces and Heegaard splittings*, Prépublication, Math. Sci. Res. Inst., 1987.
- [7] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3 manifolds. III*, J. Differential Geometry **26** (1987) 479–536.
- [8] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math., Vol. 43, 1980.
- [9] B. Lawson, *The unknottedness of minimal embeddings*, Invent. Math. **11** (1970) 183–187.
- [10] W. Meeks, *The conformal structure and geometry of triply periodic minimal surfaces in \mathbf{R}^3* , Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977) 134–136.
- [11] —, *Lectures on Plateau's problem*, Inst. Mate. Pura. Appl., Rio de Janeiro, Brazil, 1978.
- [12] K. Reidemeister, *Zur dreidimensionalen Topologie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1933) 189–194.
- [13] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Z. **65** (1956) 133–170.
- [14] J. Singer, *Three dimensional manifolds and their Heegaard diagrams*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933) 88–111.
- [15] F. Waldhausen, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannfaltigkeiten. I; II*, Invent. Math. **3** (1967) 308–333; **4** (1967) 87–117.
- [16] —, *Heegaard Zerlegungen der 3-Sphäre*, Topology **7** (1968) 195–203.

UNIVERSITÉ TOULOUSE III, TOULOUSE
UNIVERSITÉ PARIS-SUD, ORSAY

