

## LE PROBLEME GENERAL DES VARIABLES ACTIONS-ANGLES

PIERRE DAZORD & THOMAS DELZANT

### Introduction

La mécanique des systèmes hamiltoniens complètement intégrables conduit à l'étude des systèmes complets d'intégrales premières, c'est-à-dire en langage géométrique, des feuilletages lagrangiens des variétés symplectiques.

Dans cette direction trois résultats principaux ont été obtenus:

1. A. Weinstein [42] a prouvé que les feuilles d'un feuilletage lagrangien sont des variétés affines.

2. V. Arnold [3] a prouvé, ce qui constitue le théorème des variables actions-angles proprement dit, que si un feuilletage lagrangien  $\mathcal{L}$  possède une feuille compacte  $L_0$  sans holonomie on peut construire un difféomorphisme symplectique d'un voisinage  $\mathcal{L}$ -saturé de  $L_0$  sur un ouvert  $T^n$  invariant de  $T^*T^n$ , transportant  $\mathcal{L}$  sur les orbites de  $T^n$ , ce qui entraîne en particulier qu'au voisinage de  $L_0$  on peut réaliser  $\mathcal{L}$  par l'action hamiltonienne libre de  $T^n$ .

3. J. J. Duistermaat [14] a prouvé que si  $\mathcal{L}$  est une fibration  $f: M \rightarrow P$  à fibres compactes,  $P$  hérite d'une structure affine définie par un réseau  $\mathcal{R}$  de 1-formes fermées sur  $P$ , qui est un  $\mathbf{Z}^k$ -revêtement de  $P$  dont l'holonomie  $\mathcal{M}$ , appelée monodromie de  $f$ , est une obstruction à ce que  $f$  soit réalisée par l'action hamiltonienne libre d'un tore  $T^k$ . D'autre part  $f$  est un fibré localement isomorphe à  $T^*P/\mathcal{R}$  ce qui permet d'associer à  $f$  sa classe de Chern  $\nu \in H^2(P, \mathcal{R})$ .  $\mathcal{M}$  et  $\nu$  sont les obstructions à ce que,  $f: M \rightarrow P$  soit un  $T^k$ -fibré principal trivial.

L'analyse, la mécanique et la physique quantique imposent d'examiner la situation plus générale des feuilletages symplectiquement complets (en abrégé, s.c.) notion due à P. Libermann [23]:  $\mathcal{V}$  est un feuilletage s.c. si et seulement si son orthogonal symplectique  $\mathcal{V}^\sigma$  est un feuilletage.

**Exemples.** 1. Les feuilletages coïsotropes sont toujours s.c. La théorie géométrique des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre est la recherche des sous-variétés lagrangiennes de tels feuilletages.

2a. Les orbites de l'action symplectique localement libre d'un groupe de Lie local forment un feuilletage s.c.

2b. En particulier si  $(f_1, \dots, f_k)$  sont  $k$  intégrales premières indépendantes en involution d'un hamiltonien  $H$ , le feuilletage engendré par les champs hamiltoniens  $X_{f_i}$  associés aux  $f_i$  est isotrope s.c., son orthogonal symplectique ayant pour feuilles les surfaces de niveau de  $f = (f_i)$ . Cette situation est appelée intégrabilité généralisée par Fomenko-Mischenko [16] et Marle [27].

3. Les feuilletages isotropes s.c. s'introduisent en quantification géométrique: si  $\mathcal{P}$  est une polarisation complexe admissible au sens de B. Kostant [22], le feuilletage  $\mathcal{V}$ , dont le complexifié est  $\mathcal{P} \cap \bar{\mathcal{P}}$ , est isotrope s.c..

4. Karašev et Maslov [46] considèrent une situation plus générale que celle décrite en 2b, dans laquelle le hamiltonien  $H$  a un groupe de symétrie  $G$  pas forcément commutatif. Les orbites de  $G$  (exemple 2a) forment un feuilletage s.c.  $\mathcal{V}$ . Pour la construction d'opérateurs d'entrelacements, ils font l'hypothèse que  $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma$  est une fibration isotrope symplectiquement complète à fibres compactes et connexes.

L'étude des feuilletages symplectiquement complets repose sur la remarque suivante de P. Libermann [23]: Localement un tel feuilletage est une fibration de Poisson sur une variété de Poisson. Dans le langage de A. Weinstein [44] un tel feuilletage définit localement une paire duale. Ceci entraîne que  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$  est un feuilletage à singularités au sens de Stefan [39] et que  $\mathcal{F} = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma$  possède, sans être en général un feuilletage, la propriété de variété intégrale maximale. Par analogie avec la théorie des équations aux dérivées partielles, les variétés intégrales maximales de  $\mathcal{F}$  sont appelées caractéristiques de  $\mathcal{V}$  (ou  $\mathcal{V}^\sigma$ ). Sous certaines conditions ce sont des espaces homogènes de groupes de Lie à isotropie discrète. Plus généralement ce sont des variétés  $K$ -plates discrètes au sens de C. Albert [2]. Les deux outils de cette étude sont d'une part la notion de structure de Poisson transverse d'A. Weinstein [44] et d'autre part la remarque ([5], [6], [7]) que la structure symplectique met en relation propriétés transverses et propriétés des feuilles d'un feuilletage.

Les résultats précédents assurent que, si l'action hamiltonienne libre d'un groupe de Lie fournit un exemple de feuilletage symplectiquement complet, inversement, sous certaines conditions, les feuilles d'un feuilletage isotrope symplectiquement complet sont des espaces homogènes de groupes de Lie; ceci invite à formuler le problème général suivant: classifier les feuilletages isotropes symplectiquement complets et en particulier déterminer les obstructions

à ce qu'ils soient obtenus par l'action d'un groupe de Lie. Dans le cas particulier des fibrations lagrangiennes, les travaux cités précédemment de V. Arnold et J. J. Duistermaat apportent une réponse. C'est à la même tâche pour les fibrations isotropes symplectiquement complètes à fibres compactes ( $f: (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ ) (F.I.S.C. en abrégé) que vont être consacrées les paragraphes 2, 3, 4. Dans ce cas la variété de Poisson  $(P, \Lambda)$  base de  $f$  est non triviale ( $\Lambda \neq 0$ ) si la fibration n'est pas lagrangienne. Ceci constitue la nouveauté essentielle de la situation à laquelle on généralise le résultat central de J. J. Duistermaat [14]: à  $f$  est associé un réseau  $\mathcal{R}$  transverse au feuilletage symplectique  $\zeta$  de  $(P, \Lambda)$  et constitué de différentielles de fonctions de Casimir.  $\mathcal{R}$  est un  $\mathbf{Z}^k$ -revêtement de  $P$  dont l'holonomie  $\mathcal{M}$  est appelée monodromie de  $f$ . D'autre part si  $\nu^*\zeta$  est le fibré conormal de  $\zeta$ ,  $f$  est un fibré à faisceau structural  $C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R})$  au sens de Grothendieck [19] ce qui permet d'associer à  $f$  sa "classe de Chern"  $\nu \in H^2(P, \mathcal{R})$ . Au voisinage d'un point  $x_0 \in P$ , on a des coordonnées actions angles partielles, ce qui avait été observé par Nekhoroshev [33] (cf. [7] également).  $\mathcal{M}$  est l'obstruction à ce que  $f$  soit obtenue par l'action hamiltonienne d'un tore. Si  $\mathcal{M} = 0$ ,  $\zeta$  est un feuilletage transversalement parallélisable et sous certaines conditions c'est une fibration sur une variété affine  $Q$ ; ce résultat contient une généralisation du théorème "période énergie" de Gordon (cf. [1], [20]).  $\mathcal{M} = 0 = \nu$  est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe globalement des "coordonnées actions angles partielles." Ceci contient un résultat de Nekhoroshev [33] assurant qu'il en est ainsi si  $P$  est 2-connexe.

Le lien entre  $\nu$  et la topologie de  $P$  s'établit par l'intermédiaire de la cohomologie relative de  $(P, \zeta)$ ,  $H^*(P, \zeta)$ , cohomologie du faisceau différentiel  $(C^\infty(\nu_p^*\zeta), d)$  où  $\nu_p^*(\zeta)$  est le fibré des  $p$ -formes sur  $P$  induisant sur toute feuille de  $\zeta$  une forme nulle. Cette cohomologie avait déjà été considérée par Vaisman [41]. A  $(P, \Lambda)$  on associe une classe relative  $[\zeta]$ , obstruction à ce que les formes symplectiques des feuilles de  $\zeta$  s'étendent en une 2-forme fermée sur  $P$ . Ceci résout, différemment et sans l'hypothèse que  $\zeta$  soit une fibration, un problème étudié par Gotay, Lashof, Sniatcky, et Weinstein [18]. Cette classe est généralement non nulle, même par exemple, pour la variété formée d'une composante connexe de l'ouvert des points réguliers du dual d'une algèbre de Lie compacte, si du moins cette algèbre n'est pas abélienne.

Le résultat principal est alors l'existence d'un morphisme  $\hat{d}: H^2(P, \mathcal{R}) \rightarrow H^3(P, \zeta)$  tel que  $\hat{d}\nu = [\zeta]$  ce qui lie  $[\zeta]$  qui mesure la variation de la forme symplectique des feuilles à la classe de Chern  $\nu$  et étend les résultats de Duistermaat et Heckmann [15] obtenus dans le cas de l'action hamiltonienne localement libre d'un groupe  $T^k$ .

Inversement  $(P, \Lambda)$  étant une variété de Poisson munie d'un réseau  $\mathcal{R}$ , l'équation  $d\nu = [\zeta]$  permet de déterminer les réalisations isotropes symplectiquement complète (R.I.S.C.) associées à  $(P, \Lambda, \mathcal{R})$ , i.e. les variétés symplectiques  $(M, \sigma)$  qui possèdent une F.I.S.C. au-dessus de  $(P, \zeta)$  de réseau  $\mathcal{R}$ . Le problème est résolu par l'insertion de  $\hat{d}: H^2(P, \zeta) \rightarrow H^3(P, \zeta)$  dans une suite exacte. En particulier si  $H^2(P, \zeta) = 0$ , à tout  $\nu$  tel que  $\hat{d}\nu = [\zeta]$  est associée, à un isomorphisme près, une unique R.I.S.C.

La dernière partie (V) est consacrée à la classification des germes de R.I.S.C. au-dessus d'un voisinage d'une feuille compacte  $\Sigma_0$  de  $P$ . Si  $\Sigma_0$  est une orbite régulière de l'action coadjointe d'un groupe compact  $G_0$  (que l'on peut supposer semi-simple et simplement connexe), on peut toujours se ramener au cas où  $P = \Sigma_0 \times \mathbf{R}^k$ . Le résultat le plus spectaculaire est le suivant: Si  $\nu$  considéré comme morphisme de  $\mathbf{Z}^k$  dans  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})$  est un isomorphisme, si  $G$  désigne le groupe compact  $G_0 \times T^k$ ,  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie,  $P$ , s'identifie à un ouvert de l'ensemble (ouvert) des points réguliers de  $\mathcal{G}^*$  et le germe de la R.I.S.C.  $f: M \rightarrow P$  voisinage de  $\Sigma_0$  est isomorphe au germe au voisinage de  $\Sigma_0$  de  $f_0: G \times C \rightarrow \mathcal{G}^*$  où  $C$  est une chambre de Weyl (duale) de  $\mathcal{G}^*$ , ouverte, et  $f_0(g, \xi) = \text{ad}_g^* \xi$ .

Ce résultat est l'exacte généralisation au cas non commutatif du théorème des variables actions-angles d'Arnold pour lequel  $\Sigma_0$  est réduit à un point et  $G = T^k$ : si  $f: M \rightarrow P$  était engendré par l'action d'un groupe  $\tilde{G}$  d'algèbre de Lie compacte, on a déformé l'action de  $G$  en l'action d'un groupe compact ayant mêmes orbites.

La classification des R.I.S.C. est à rapprocher des résultats de C. M. Marle [27], [28], [29] et R. Nicolai [31], [32] sur les modèles locaux d'action hamiltonienne de groupes.

Les résultats sur les R.I.S.C. peuvent également être considérés comme une généralisation de la quantification géométrique de B. Kostant [22] et J. M. Souriau [36]: si  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  est à classe  $[\sigma_0]$  entière et si  $\pi_1 \Sigma_0 = 0$  l'unique R.I.S.C. au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  associée à  $\nu: \mathbf{Z} \rightarrow H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})$ ;  $p \rightarrow p [\sigma_0]$ , est la symplectisée de la variété quantique  $(E(\mathbf{S}^1), \theta)$  où  $\theta$  est une  $\mathbf{S}^1$ -connexion de courbure  $\sigma_0$  sur le  $\mathbf{S}^1$ -fibré principal  $E(\mathbf{S}^1) \rightarrow \Sigma_0$  de classe de Chern  $[\sigma_0]$ . Si  $\pi_1 \Sigma_0 \neq 0$  les R.I.S.C. sans holonomie sont classifiées par  $H^1(\Sigma_0, \mathbf{S}^1)/\text{Im } H^1(\Sigma_0, \mathbf{R})$  [36].

Une note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [6] a annoncé certains des résultats présentés dans cet article; dans divers travaux antérieurs de l'un ou l'autre des deux auteurs ([5], [6], [7], [10], [12]) avaient été données des extensions partielles des théorèmes de V. Arnold, J. J. Duistermaat, et A. Weinstein.

Les auteurs adressent leurs remerciements à C. M. Marle et P. Molino pour d'intéressantes discussions pendant l'élaboration de cet article, ainsi qu'au rapporteur qui leur a signalé les articles de Karasev et Maslov [46] et Nekhoroshev [33].

## 0. Notations

Toutes les données géométriques sont  $C^\infty$ .  $(M, \sigma)$  désigne une variété symplectique et on note  $\#$  le morphisme fibré de  $T^*M$  dans  $TM$  défini par  $\iota(\#\omega)\sigma = -\omega$ . Si  $\mathcal{V}$  est un sous-fibré de  $TM$  on note  $\mathcal{V}^\sigma$  son orthogonal symplectique,  $\nu\mathcal{V}$  (resp.  $\nu^*\mathcal{V}$ ) le fibré normal (resp. conormal). Si  $V$  est une sous-variété (immergée),  $\nu V$  (resp.  $\nu^*V$ ) est le fibré normal  $TM|_V/TV$  (resp. conormal) de  $V$ .

Par feuilletage on entend un feuilletage à singularité au sens de Stefan [39], [8], [9]. Les feuilletages sont systématiquement identifiés aux distributions  $C^\infty$  au sens de Sussmann [40], [8], [9] qui les déterminent. Les feuilletages ordinaires [35], i.e., sans singularité sont appelés réguliers.

Les variétés de Poisson sont notées  $(P, \Lambda)$  où  $\Lambda$  est le tenseur de Poisson, au sens de Lichnerowicz [25], définissant la structure.

## 1. Feuilletages symplectiquement complets

La proposition suivante, due à P. Libermann [23], est le point de départ de l'étude entreprise:

**Proposition 1.1.** *Soit  $\mathcal{V}$  un feuilletage sur  $(M, \sigma)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $\mathcal{V}^\sigma$  est un feuilletage.
- (ii) Le crochet de Poisson de deux intégrales premières locales de  $\mathcal{V}$  est une intégrale première.
- (iii) L'espace des plaques de tout ouvert  $\mathcal{V}$ -distingué est canoniquement muni d'une structure de Poisson pour laquelle la projection est un morphisme de Poisson.

Ceci conduit à introduire la terminologie suivante [23]:

**Définition 1.1.**  $\mathcal{V}$  est symplectiquement complet si  $\mathcal{V}$  vérifie l'une des assertions équivalentes de la proposition précédente.

Un feuilletage symplectiquement complet est toujours régulier.

Dans tout ce paragraphe  $\mathcal{V}$  désigne dorénavant un feuilletage symplectiquement complet,  $U$  un ouvert  $\mathcal{V}$ -distingué en  $x_0$ ,  $(P_u, \Lambda_u)$  la variété de Poisson de ses plaques,  $\pi_u: U \rightarrow P_u$  la projection canonique.

Si  $\tilde{\Sigma}$  est la feuille symplectique de  $y \in P_u$  (cf. [25], [44])  $\pi_u^{-1}\tilde{\Sigma}$  est une variété intégrale de  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$  qui est clairement une distribution  $C^\infty$  ce qui assure [10]:

**Proposition 1.2.** *Si  $\mathcal{V}$  est symplectiquement complet  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$  est un feuilletage au sens de Stefan.*

Soit  $\mathcal{F} = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma$ .  $\mathcal{F}$  n'est un feuilletage que si  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$  est régulier. Cependant si  $\Sigma$  est une feuille de  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ ,  $\mathcal{F}|_\Sigma$  est un feuilletage régulier ce qui prouve que les feuilles de  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}^\sigma$ ,  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$  sont des variétés présymplectiques au sens de Souriau [36], et permet d'autre part de parler des variétés intégrales maximales de  $\mathcal{F}$ , que l'on appellera caractéristiques de  $\mathcal{V}$ .

Inversement à tout point  $x_0 \in \Sigma$  feuille de  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ , on peut associer,  $U$  étant un ouvert  $\mathcal{V}$ -distingué en  $x_0$ , le germe en  $y_0 = \pi_u(x_0)$  de structure de Poisson transverse au sens de Weinstein [44]. Par construction ce germe  $\Lambda_{y_0}$  ne dépend que de la composante connexe de  $x_0$  dans  $\Sigma \cap U$ . Il en résulte qu'à un difféomorphisme près,  $\Lambda_{y_0}$  ne dépend que de  $\Sigma$  et sera noté  $\Lambda_\Sigma$ .

**Définition 1.2.**  $\Lambda_\Sigma$  est le germe de structure de Poisson transverse de  $\Sigma$ .

Si  $k$  est la codimension de  $\Sigma$ ,  $\Lambda_\Sigma$  se réalise comme germe en 0 dans  $\mathbf{R}^k$  d'une structure de Poisson. On notera  $\underline{K}$  l'algèbre de Lie duale de  $\mathbf{R}^k$  muni de la structure linéarisée en 0 de  $\Lambda_\Sigma$ .  $\underline{K}$  ne dépend évidemment que de  $\Sigma$ . Si  $\tilde{\Sigma}$  est la feuille symplectique de  $y_0 = \pi_u(x_0)$ ,  $\underline{K}^*$  s'identifie à  $\nu\tilde{\Sigma}(y_0)$  munie de la structure linéarisée de  $\Lambda_{y_0}$ .

**Remarque.** D'une manière analogue on peut associer à toute feuille  $V$  de  $\mathcal{V}$  une structure de Poisson  $\Lambda_V$  "transverse à  $V$ ."

Soit  $F$  une caractéristique de  $\mathcal{V}$  et  $V$  (resp.  $\Sigma$ ) la feuille de  $\mathcal{V}$  (resp.  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ ) la contenant. La connexion de Bott de  $V$  induit une connexion plate dans le fibré  $\nu^*V|_F \rightarrow F$  qui par l'isomorphisme  $\#$  se transporte en une connexion plate  $\nabla$  du fibré  $\mathcal{V}^\sigma|_F \rightarrow F$ . Si  $x_0 \in F$  et si  $U$  est un ouvert  $\mathcal{V}$ -distingué en  $x_0$ ,  $F_0$  désignant la composante connexe de  $x_0$  dans  $F \cap U$ ,  $\nabla$  est définie au-dessus de  $F_0$  par

$$y_0 = \pi_u(x_0) \text{ et } \nabla \# \pi_u^* \alpha = 0 \text{ si } \alpha \in T_{y_0} P_u.$$

L'espace tangent à  $F_0$  s'identifiant à  $\# \pi^* \nu^* \tilde{\Sigma}(y_0)$  où  $\tilde{\Sigma}$  est la feuille symplectique de  $y_0$ ,  $\nabla$  induit sur  $F$  une connexion linéaire. Cette même identification munit  $F$  d'une structure de variété à crochet au sens de C. Albert [2]. De ce que tout champ hamiltonien tangent à  $\mathcal{V}$  commute à tout champ hamiltonien tangent à  $\mathcal{V}^\sigma$  on déduit:

**Théorème 1.1.** *Toute caractéristique  $F$  d'un feuilletage symplectiquement complet est une variété  $\underline{K}$ -plate discrète au sens de C. Albert, l'algèbre de Lie  $\underline{K}$  ne dépendant que de la feuille  $\Sigma$  de  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$  contenant  $F$ .*

$\underline{K}$  est abélienne sur l'ouvert dense de  $M$  constitué des points réguliers de  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$  (cf. [10]).

L'holonomie infinitésimale de la connexion construite sur  $F$  est un sous-groupe de l'holonomie infinitésimale de  $V$ . Si on échange les rôles, de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}^\sigma$ , cette connexion est changée en la connexion conjuguée  $\nabla^\sigma$ , i.e.

$$\nabla_X Y - \nabla_Y^\sigma X = [X, Y].$$

Si  $V$  est sans holonomie infinitésimale, ses caractéristique sont les orbites d'une action localement libre de  $\underline{K}$ . Si les champs de Killing de cette action sont complets, un théorème de Palais [34] montre que celles-ci sont difféomorphes au quotient du groupe de Lie  $K$  connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\underline{K}$  par un sous-groupe discret  $K_{x_0}$  (dépendant de la caractéristique considérée). Dans ce dernier cas,  $\nabla^\sigma$  étant la connexion conjuguée, l'holonomie de  $\nabla^\sigma$  est fournie par la représentation adjointe de  $K_{x_0}$ . En particulier toute caractéristique compacte  $F$  telle que les feuilles de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}^\sigma$  la contenant sont sans holonomie infinitésimale, est un groupe de Lie compact. Plus généralement,  $\nabla$  désignant la connexion sur  $F$  déduite de la connexion de Bott de  $V$ , on montre comme en [5]:

**Proposition 1.3.** (i) *Si  $F$  est  $\nabla$ -complète,  $F$  est isomorphe au quotient de  $K$  par un groupe discret de difféomorphismes préservant les champs de  $K$  invariants à gauche.*

(ii) *Si de plus  $\underline{K}$  abélienne et si l'holonomie de  $\nabla$  est relativement compacte,  $F$  est isomorphe au produit d'un quotient fini de tore par un espace numérique.*

Les résultats précédents généralisent au cas d'intégrabilité partielle des résultats antérieurs [5], [7] étendant des théorèmes de V. Arnold [3] et A. Weinstein [42] relatifs aux feuilletages lagrangiens, qui peuvent être caractérisés comme les feuilletages symplectiquement complets tels que la structure de Poisson transverse de toute feuille soit triviale.

## 2. Monodromie des fibrations isotropes symplectiquement complètes

Dans toute la suite de cet article  $f: M \rightarrow P$  est une *fibration isotrope de la variété symplectique*  $(M, \sigma)$ , *symplectiquement complète, à fibres compactes et connexes, en abrégé F.I.S.C.*, ce qui contient le cas des fibrations lagrangiennes étudiées par Arnold [3] et Duistermaat [14] dont on généralise les méthodes. Soit  $\Lambda$  le tenseur de Poisson de  $P$ . Comme  $f$  est isotrope, elle est identique à son feuilletage caractéristique, le rang de  $\Lambda$  est constant et on a la relation

$$(1) \quad k = \dim \text{Ker } \Lambda = \dim M - \dim P.$$

Réciproquement si on se donne une fibration de Poisson  $f: M \rightarrow P$ , elle définira un feuilletage isotrope symplectiquement complet si et seulement si la relation (1) est vérifiée ce qui est le cas d'intégrabilité généralisée de Mischenko et Fomenko [16] et Marle [27].

**Exemples.** 1. Supposons que  $(M, \sigma)$  soit munie d'une action libre hamiltonienne isotrope d'un groupe compact connexe  $G$ . Alors nécessairement  $G = T^k$  [7] et les orbites de  $G$  définissent une F.I.S.C.

2. Si  $(M, \sigma)$  est munie d'une action localement libre coïsothrope d'un groupe  $G$  de moment  $\mathcal{I}$ , si les composantes connexes des variétés de niveau de  $\mathcal{I}$  sont compactes, elles définissent une F.I.S.C.

3. Soit  $\mathcal{P}$  une polarisation complexe intégrable [20], [21], [1].  $\mathcal{P} \cap \bar{\mathcal{P}}$  est le complexifié d'un feuilletage isotrope  $\mathcal{F}$  d'orthogonal symplectique  $\mathcal{F}^\sigma$  admettant  $\mathcal{P} + \bar{\mathcal{P}}$  comme complexifié. Les hypothèses faites en physique quantique [22], [45] assurent que  $\mathcal{F}$  est une F.I.S.C.<sup>1</sup>

On note  $\zeta$  le feuilletage symplectique de  $(P, \Lambda)$ ,  $C^\infty(\nu_k^*\zeta)$  le faisceau des  $k$ -formes relatives, i.e. des  $k$  formes  $\alpha$  telles que pour toute feuille  $i_S: S \hookrightarrow P$ ,  $i_S^*\alpha = 0$ ,  $Z(\nu_k^*\zeta)$  le sous-faisceau des  $k$ -formes relatives fermées. On écrit  $\nu^*\zeta$  au lieu de  $\nu_1^*\zeta$ .

$f: M \rightarrow P$  étant à fibres compactes et  $P$  étant régulière, du paragraphe précédent assurent que  $\pi: \nu^*\zeta \rightarrow P$  qui est un fibré en algèbre de Lie abélienne  $\mathfrak{a}$ , comme fibré en groupes abéliens, une action fibrée localement libre sur les fibres de  $M \rightarrow P$ , qui sont donc des tores. Plus précisément, l'action  $\varphi$  de  $\nu^*\zeta$  dans  $M$  est définie ainsi:

$$\varphi(\omega) \cdot y = F_1(\omega) \cdot y \quad \text{si } \omega \in \nu_x^*\zeta, \quad y \in f^{-1}(x)$$

où  $F_t$  est le flot—complet—de  $\#f^*\omega$ . Soit  $\mathcal{R}_x$  le groupe d'isotropie de cette action.  $\mathcal{R}_x$  est un réseau maximal et  $f^{-1}(x) = \nu_x^*\zeta/\mathcal{R}_x$ .

On note  $\mathcal{R} = \bigcup_{x \in P} \mathcal{R}_x$  et on introduit la notion suivante:

**Définition 2.1.** *Un réseau d'une variété de Poisson  $(P, \Lambda)$  est un revêtement de  $P$ , sous-faisceau de  $Z(\nu^*\zeta)$ , qui en chaque point est un réseau maximal de la fibre correspondante de  $\nu^*\zeta$ .*

**Théorème 2.1** [12]. *Le noyau  $\mathcal{R}$  de l'action fibrée  $\varphi$  de  $\nu^*\zeta$  sur  $M \rightarrow P$  est un réseau de  $(P, \Lambda)$ .*

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert de  $P$  muni d'une section  $s$  de  $f$ . On définit un difféomorphisme local  $\varphi_s: \nu^*\zeta|_U \rightarrow f^{-1}(U)$  ainsi:

$$\varphi_s(\omega) = \varphi(\omega) \cdot s(x), \quad \omega \in \nu_x^*\zeta.$$

Si  $\eta_{x_0} \in \mathcal{R}_{x_0}$ , le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un unique germe de section de  $C^\infty(\nu^*\zeta)$  prolongeant  $\eta_{x_0}$  et à valeurs dans  $\mathcal{R}$  ce qui identifie  $\mathcal{R}$  à un sous-faisceau de  $C^\infty(\nu^*\zeta)$ .

---

<sup>1</sup>Si  $f_i(M, \sigma) \rightarrow (P_i, \Lambda_i)$  sont deux fibrations symplectiquement complètes, formant une paire duale au sens de Weinstein [44], Karašev et Maslov [46] font l'hypothèse que le feuilletage somme est une F.I.S.C.

Pour prouver que  $\mathcal{R}$  est un revêtement de  $P$ , on procède ainsi: soit  $x_0 \in P$  et  $(\eta^i_0)_{1 \leq i \leq k}$  une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{R}_{x_0}$ . D'après ce qui précède, il existe un voisinage connexe  $U$  de  $x_0$  et  $k$  représentant  $\eta^i: U \rightarrow \mathcal{R}_U$  des germes associés à  $\eta^i_0$ . Si  $x_1 \in U$  et si  $\eta_1 \in \mathcal{R}_{x_1}$  il existe  $(k + 1)$  entiers,  $n \neq 0$ ,  $(n_i)_{1 \leq i \leq k}$  tels que

$$n\eta_1 + \sum_1^k n_i \eta^i(x_1) = 0.$$

Soit  $\eta$  la section au-dessus de  $U$  de  $C^\infty(\nu^*\zeta)$  définie par  $n\eta + \sum_1^k n_i \eta^i = 0$ . Soit  $W$  le fermé de  $U$  constitué de point  $x$  tels que  $\eta(x) \in \mathcal{R}_x$ .  $W \neq \emptyset$  car par construction  $x_1 \in W$ . Si  $y \in W$ , soit  $\rho$  l'unique germe de sections de  $\mathcal{R}$  défini par  $\eta(y)$ .  $n\rho$  et  $-\sum n_i \eta^i$  étant deux germes de sections de  $\mathcal{R}$  prolongeant  $n\eta(y)$ ,  $n\rho = -\sum n_i \eta^i$  ce qui assure que  $\rho = \eta$  et donc que  $W$  est ouvert, ce qui à son tour entraîne que  $W = U$ . Mais si  $\eta$  est une section de  $\mathcal{R}$ ,  $\sum_1^k (n_i/n) \eta^i_0 \in \mathcal{R}_{x_0}$  ce qui implique que  $n_i/n \in \mathbf{Z}$  et permet d'affirmer que toute  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{R}_{x_0}$  s'étend en une  $\mathbf{Z}$ -base des sections de  $\mathcal{R}$  au-dessus de  $U$ , ce qui prouve que  $\mathcal{R}$  est un  $\mathbf{Z}^k$ -revêtement de  $P$ .

Que  $\mathcal{R}$  soit en fait un sous-faisceau de  $Z(\nu^*\zeta)$  résulte du lemme suivant

**Lemme 2.1.** *Si  $\tilde{\omega}$  est une section de  $\nu^*\zeta$*

$$\varphi(\tilde{\omega})^* \sigma - \sigma = -f^* d\tilde{\omega}.$$

*Preuve du lemme.*

$$\frac{d}{dt} F_t(\tilde{\omega})^* \sigma = F_t^* \mathcal{L}(\#f^* \tilde{\omega}) = F_t^* dt^*_{f^* \tilde{\omega}} \sigma = -f^* d\tilde{\omega}$$

ce qui, par intégration entre 0 et 1, donne le résultat.

**Corollaire 1.** *Tout point  $x_0$  de  $P$  possède un voisinage  $U$  sur lequel sont définies  $k$  fonctions de Casimir  $a_i$  telles que  $\mathcal{R}_U = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{Z} da_i$ .*

De ce corollaire, il résulte que  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}$  est muni d'une structure de variété  $C^\infty$  fibrée en tores sur  $P$  rendant exacte la suite de fibrés en groupes abéliens

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \nu^*\zeta \rightarrow \nu^*\zeta/\mathcal{R} \rightarrow 0,$$

ce qui permet d'identifier les faisceaux  $C^\infty(\nu^*\zeta)/\mathcal{R}$  et  $C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R})$  faisceau des sections de  $\nu^*\zeta/\mathcal{R} \rightarrow P$ .

$\mathcal{R}$  étant un sous-faisceau de  $Z(\nu^*\zeta)$ , la différentielle extérieure  $d: C^\infty(\nu^*\zeta) \rightarrow Z(\nu^*\zeta)$  passe au quotient par  $\mathcal{R}$  et définit un morphisme  $\hat{d}$  de  $C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R})$  dans  $Z(\nu^*\zeta)$ . Si  $\hat{\varphi}$  désigne l'action de  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}$  sur  $M$  déduite de  $\varphi$  par passage au quotient,

**Corollaire 2.**  *$\nu^*\zeta/\mathcal{R}$  est un fibré localement trivial en tores muni d'une action  $\hat{\varphi}$  sur  $f: M \rightarrow P$  telle que pour toute section  $\omega$  de  $\nu^*\zeta/\mathcal{R} \rightarrow P$ ,*

$$\hat{\varphi}(\omega)^* \sigma = \sigma - f^* \hat{d}\omega.$$

Reprenant la terminologie de Duistermaat [14], on pose la

**Définition 2.2.** *L'holonomie du revêtement  $\mathcal{R} \rightarrow P$  s'appelle la **monodromie** de la fibration.*

C'est un sous-groupe  $\mathcal{M}$  de  $\mathrm{GL}(\mathbf{Z}, k)$ .  $\mathcal{M} = 0$  si et seulement si  $\mathcal{R} \rightarrow P$  est trivial. Dans ce cas  $\nu^*\zeta$  est isomorphe à  $P \times \mathbf{R}^k$ , la fibration  $M \rightarrow P$  est un  $T^k$  fibré principal et l'on est dans la situation décrite dans l'exemple 1. *La monodromie est donc l'obstruction à ce que la fibration considérée soit obtenue par une action hamiltonienne libre de  $T^k$ .*

Si la monodromie est triviale, le feuilletage  $\zeta$  peut être défini par  $k$  1-formes fermées globales.  $\zeta$  est donc transversalement parallélisable associé à l'algèbre abélienne  $\mathbf{R}^k$ . Cette situation a été étudiée notamment par Molino [30]: Si  $\zeta$  est transversalement complet et possède une feuille fermée,  $\zeta$  est une fibration. Sinon la partition de  $P$  par les adhérences des feuilles de  $\zeta$  est une fibration.

Soit  $S$  une feuille de  $\zeta$ .  $\mathcal{R}$  étant constitué de 1-formes fermées normales à  $\zeta$ , la connexion de Bott de  $S$  induit sur  $\mathcal{R}|_S \rightarrow S$  la connexion canonique du  $\mathbf{Z}^k$ -revêtement de  $S$ . En particulier  $S$  est sans holonomie infinitésimale si et seulement si  $\mathcal{R}|_S \rightarrow S$  est trivial;  $\mathcal{R}$  étant un revêtement, si  $S$  est propre,  $S$  possède un voisinage  $U$  au-dessus duquel  $\mathcal{R}$  est trivial. Plus généralement il se déduit de cette remarque que pour une feuille propre holonomie et holonomie infinitésimale coïncident.

Si  $\zeta$  est une fibration  $\mathcal{F}: P \rightarrow Q$  le diagramme  $P \xleftarrow{f} M \xrightarrow{\mathcal{F}_0 f} Q$  est une paire duale (isotrope/coisotrope) au sens de Weinstein [44]. Dans cette situation on peut prouver:

**Proposition 2.1.** *Si  $\zeta$  est une fibration  $\mathcal{F}: P \rightarrow Q$ :*

(i)  *$\mathcal{R}$  est l'image réciproque par  $\mathcal{F}$  d'un  $\mathbf{Z}^k$ -revêtement de la variété  $Q$ ,  $\mathcal{R}_0$ , constitué de 1-formes fermées, et  $Q$  est un quotient d'un ouvert de  $\mathbf{R}^k$  par un groupe discret de difféomorphismes.*

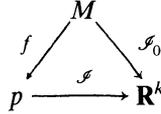
(ii) *Si de plus l'holonomie de  $Q$  est relativement compacte dans  $\mathrm{GL}(\mathbf{R}, k)$  et si  $Q$  est complète,  $Q$  est le produit par un espace numérique d'un quotient fini de tore.*

*Démonstration.*  $\zeta$  étant une fibration,  $\mathcal{R}|_S$  est trivial ce qui assure (i). (ii) résulte de ce que si l'holonomie de  $Q$  est relativement compacte,  $Q$  est une variété riemannienne plate (cf. [5]).

La proposition 2.1 contient une généralisation du théorème "période-énergie" dû à Gordon (cf. [1], [20]) qui dit que si un système hamiltonien est périodique de période  $C^\infty T(x)$ ,  $T$  est constante sur les composantes connexes des variétés de niveau du hamiltonien.

En effet, supposons que l'on ait une action hamiltonienne de  $\mathbf{R}^k$  dans  $M$ , localement libre, de moment  $\mathcal{F}_0$  dont toutes les orbites sont compactes. Si

chaque feuille du feuilletage des orbites est sans holonomie, on peut considérer la variété de Poisson  $P$  des orbites et on a une paire duale:



On est dans la situation étudiée précédemment et on sait alors que le réseau des périodes est constant sur les composantes connexes des variétés de niveau de  $\mathcal{S}$  donc de  $\mathcal{S}_0$  puisque les fibres de  $f$  sont les orbites de  $\mathbf{R}^k$ .

Plus généralement si une orbite de  $\mathbf{R}^k$  a une holonomie finie relativement au feuilletage des orbites (ceci généralise l'hypothèse qu'il existe une fonction période), on se ramène localement au voisinage de l'orbite à la situation précédente en considérant le revêtement—fini—d'holonomie. Le réseau des périodes d'un point contient alors celui des points voisins appartenant à la même composante connexe d'une variété de niveau de  $\mathcal{S}_0$ . On a donc prouvé:

**Proposition 2.2.** *Si  $(M, \sigma)$  est munie d'une action hamiltonienne localement libre de  $\mathbf{R}^k$  à orbites compactes et s'il existe une famille libre maximale du réseau des périodes dépendant continûment de  $x \in M$ , c'est-à-dire une famille  $T_j^i(x)$  de fonctions, alors*

- (i) *cette matrice est constante sur les composantes connexes des variétés de niveau du moment  $\mathcal{S}_0$ ,*
- (ii) *les formes différentielles  $\omega^i = \sum_{i \leq j \leq k} T_j^i(x) d\mathcal{S}_0^j$  sont fermées.*

### 3. Structure locale et théorème des variables actions-angles

On note  $\lambda$  la restriction à  $\nu^*\zeta$  de la 1-forme de Liouville de  $T^*P$ . Comme  $\mathcal{R} \subset Z(\nu^*\zeta)$ ,  $d\lambda$  se projette sur  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}$  en une 2-forme fermée  $\beta$ .

**Théorème 3.1.** *Si  $f: M \rightarrow P$  possède une section globale  $s$ , l'application  $\hat{\phi}_s$  de  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}$  dans  $M$  définie par  $\hat{\phi}_s(\omega) = \hat{\phi}(\omega) \cdot s(\pi(\omega))$  est un difféomorphisme compatible avec les fibrations et  $\hat{\phi}_s^*(\sigma) = -\beta + \pi^*s^*\sigma$ .*

Ce théorème étend un résultat de Duistermaat [14] relatif au cas lagrangien ( $\Lambda = 0$ ).

*Démonstration.* Soit  $\omega$  une section de  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}$ . D'après le Corollaire 2 du théorème 2.1,  $(\hat{\phi}(\omega))^*\sigma = \sigma - f^*\hat{d}\omega$ . Des relations  $s^*(\hat{\phi}(\omega))^* = \omega^* \circ \varphi_s^*$ ,  $\pi \circ \omega = \text{Id}$ ,  $\omega^*\beta = \hat{d}\omega$ , on déduit que  $\omega^*(\hat{\phi}_s^*\sigma - \pi^*s^*\sigma + \beta) = 0$  ce qui suffit à prouver le résultat.

On introduit les notations suivantes:  $2r$  est le rang de  $P$ ,  $k$  la codimension de  $\zeta$ .  $\sigma_r$  désigne la structure standard de  $\mathbf{R}^{2r} = \mathbf{C}^r$ ,  $d\lambda_k$  la structure standard de  $T^*T^k$ .

Tout point  $x_0$  de  $P$  possède un voisinage ouvert  $U$  équipé d'une carte adaptée  $\chi_0$  [25], [44] à valeurs dans  $\mathbf{R}^{2r} \times \mathbf{R}^k$  muni de la structure de Poisson produit de  $(\mathbf{R}^{2r}, \sigma_r)$  par la structure triviale sur  $\mathbf{R}^k$ . Si  $\chi_\nu$  est la carte de  $\nu^*\zeta$  associée,  $\mathcal{R}$  admettant localement une  $\mathbf{Z}$ -base formée de différentielles de fonctions de Casimir on peut assurer que  $\chi_\nu$  transforme  $\mathcal{R}_U$  en le réseau de  $\mathbf{R}^{2r} \times \mathbf{R}^k$  engendré par la base canonique de  $\mathbf{R}^{2k}$ . Si  $y_0 \in f^{-1}(x_0)$ ,  $\chi_0$  étant adaptée, un théorème de Carathéodory assure que l'on peut compléter les coordonnées de  $f^*\chi_0$  en une base symplectique au voisinage de  $y_0$ , c'est-à-dire construire un symplectomorphisme d'un voisinage de  $(0 \times 0)$  dans  $(\mathbf{R}^{2r}, \sigma_r) \times (\mathbf{R}^{2k}, -\sigma_k)$  (le signe—devant  $\sigma_k$  est choisi de façon que  $(\mathbf{R}^{2k}, -\sigma_k)/(0 \times \mathbf{Z}^k) = (T^*T^k, d\lambda_k)$ ) compatible avec les fibrations, ce qui permet de construire sur un voisinage de  $x_0$  une section  $s$  de  $f$  telle que  $\chi_0^{-1}s^*\sigma = \sigma_r$ . Si  $U$  désigne par abus de notation ce voisinage et  $\hat{\chi}_\nu$  la carte de  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}_{1U}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^{2r} \times T^*T^k$  associée,  $\psi = \hat{\phi}_s \circ \chi_\nu^{-1}$  est une carte de  $f^{-1}(U)$  telle que

$$\psi^*\sigma = \chi_\nu^{-1}*(-\beta + \pi^*s^*\sigma) = d\lambda_k + \sigma_r.$$

**Théorème 3.2** [33], [5]. *Si  $f: (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$  est une F.I.S.C. pour tout point  $x_0$  de  $P$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  dans  $P$ , un symplectomorphisme  $\chi$  de  $f^{-1}(U)$  dans  $\mathbf{C}^r \times T^*T^k$  munis de leurs structures canoniques, qui est un morphisme de F.I.S.C.*

Autrement dit le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} (f^{-1}(U), \sigma) & \xrightarrow{\chi} & (\mathbf{C}^r, \sigma_r) \times (T^*T^k, d\lambda_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\chi_0} & \mathbf{C}^r \times \mathbf{R}^k \end{array}$$

Si on note  $(a_i)$  les coordonnées dans  $\mathbf{R}^k$ ,  $\theta_i$  les  $k$  1-formes fondamentales de  $T^k = \mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k$ ,

$$(1) \quad \sigma = \chi^*(\sigma_r + da_i \wedge \theta^i).$$

Les  $(a_i)$  s'appellent les actions, et dans l'écriture usuelle (incorrecte)  $\theta^i = dq^i$ ,  $(q^i)$  les angles.

Le théorème 3.2 généralise au cas des F.I.S.C. le théorème des variables actions-angles d'Arnold [3], valable dans le cas lagrangien.

**Remarque.** La formule (1) entraîne que pour toute section locale  $s$  de  $f$ ,  $s^*\sigma$  est une 2-forme fermée induisant sur les feuilles de  $\zeta$  leur structure symplectique.

#### 4. Classe de Chern

On se propose d'étendre au cas  $\Lambda \neq 0$  les théorèmes de Duistermaat [14] relatifs au cas  $\Lambda = 0$  (fibration lagrangienne). La principale différence est qu'il n'existe pas nécessairement sur  $P$  une 2-forme fermée dont les restrictions à chaque feuille soit la forme symplectique de la feuille. Il existe une obstruction que l'on va construire dans une cohomologie déjà considérée par I. Vaisman [41].

(a) **Cohomologie relative et classe fondamentale de  $(P, \Lambda)$ .** Pour tout feuilletage  $\zeta$  sur une variété  $P$  on considère le faisceau différentiel [17] des formes relatives  $(C^\infty(\nu_k^*\zeta), d)_{k \geq 0}$  où  $d$  est la différentielle extérieure (cf. §II). On désigne par  $Z(\nu_k^*\zeta)$  le sous-faisceau des  $k$ -cocycles et par  $H^*(P, \zeta)$  la cohomologie associée appelée cohomologie relative de  $(P, \zeta)$ . On écrit  $\nu^*\zeta$  pour  $\nu_1^*\zeta$ .

**Lemme 4.1** (*Lemme de Poincaré relatif*) [42]. *Si  $f$  est un feuilletage régulier, pour tout  $p \geq 1$ ,  $d: C^\infty(\nu_p^*\zeta) \rightarrow Z(\nu_{p+1}^*\zeta)$  est surjectif.*

*Démonstration.* Tout revient à prouver qu'une  $p + 1$  forme fermée  $\omega$  sur  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$  relative par rapport à la 2ème projection  $\pi_2$  admet une primitive relative. Soit  $\eta$  une primitive de  $\omega$  et pour tout  $y \in \mathbf{R}^k$ ,  $i_y$  l'injection  $x \rightarrow (x, y)$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^{n+k}$ ,  $i_y^*\eta$  est, pour tout  $y$ , fermée et admet donc une primitive  $\alpha_y$ . Soit  $\alpha$  la  $(p - 1)$ -forme sur  $\mathbf{R}^{n+k}$  définie au point  $(x, y)$  par  $\pi_1^*\alpha_y$ ;  $\eta - d\pi_1^*\alpha$  est une  $p$ -forme relative de différentielle extérieure  $\omega$ . q.e.d.

$\zeta$  étant régulier,  $C^\infty(\nu_p^*\zeta)$  est un faisceau mou. Des résolutions,

$$0 \rightarrow Z(\nu_p^*\zeta) \rightarrow C^\infty(\nu_p^*\zeta) \xrightarrow{d} C^\infty(\nu_{p+1}^*\zeta) \rightarrow \dots$$

on déduit [cf. 17].

**Lemme 4.2.**  $H^k(P, Z(\nu_p^*\zeta)) \simeq H^{p+k}(P, \zeta)$ ,  $k \geq 1$ .

Cet isomorphisme s'explique aisément pour  $k = 1$ . Si  $\mu_{ij}$  est un 1-cocycle de  $Z(\nu_p^*\zeta)$ ,  $C^\infty(\nu_p^*\zeta)$  étant mou, on peut écrire  $\mu_{ij} = u_j - u_i$ ,  $u_i \in C^\infty(\nu_p^*\zeta)$  les formes  $du_i$  se raccordent puisque  $d\mu_{ij} = 0$  et définissent une  $(p + 1)$ -forme relative  $\eta$ . L'isomorphisme cherché associe à  $[\mu_{ij}] \rightarrow [\eta]$  où  $[\ ]$  désigne la classe du cocycle correspondant.

*Remarque.* En dimension 0 le Lemme 4.1 fournit la suite exacte suivante (cf. [41])  $0 \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{O}_\zeta \rightarrow Z(\nu^*\zeta) \rightarrow 0$  où  $\mathcal{O}_\zeta = C^\infty(\nu_0^*\zeta)$  est le faisceau des germes de fonctions constantes sur les feuilles. La cohomologie de  $\mathcal{O}_\zeta$  est appelée par Vaisman [41] cohomologie de type  $(h, 0)$  de  $\zeta$ :  $(H^{h,0}(P, \zeta))$ . Elle se trouve donc liée à la cohomologie relative par la suite exacte:

$$\dots \rightarrow H^h(P, \mathbf{R}) \rightarrow H^{h,0}(P, \zeta) \rightarrow H^{h+1}(P, \zeta) \rightarrow H^{h+1}(P, \mathbf{R}) \rightarrow \dots$$

Dans le cas d'une fibration  $\mathcal{S}: P \rightarrow Q$  la cohomologie relative est distincte, en général, de la cohomologie basique, sauf en dimension 1 où  $H^1(P, \zeta) \cong H^1(Q, \mathbf{R})$ . Par exemple si  $\mathcal{S}: \mathbf{R} \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $H^2(P, \zeta) = C^\infty(\mathbf{R})$ . Cependant:

**Lemme 4.3.** *Si  $\mathcal{S}: P \rightarrow Q$  est une fibration à fibre type compacte  $\Sigma_0$  telle que  $H^1(\Sigma_0, \mathbf{R}) = 0$ ,  $H^2(P, \zeta) \cong H^2(Q, \mathbf{R})$ ,*

*Démonstration.* Soit  $Z(\zeta)$  (resp.  $B(\zeta)$ ) l'espace des 1-formes tangentes au feuilletage qui sont tangentiellement fermées (resp. exactes).  $H^*(\zeta) = Z(\zeta)/B(\zeta)$  est un fibré sur  $Q$  de fibre type  $H^1(\Sigma_0, \mathbf{R})$ . Le lemme précédent résulte de:

**Lemme 4.4.** *On a une suite exacte*

$$0 \rightarrow H^2(Q, \mathbf{R}) \xrightarrow{J^*} H^2(P, \zeta) \xrightarrow{L} \Gamma(H^*(\zeta) \otimes T^*Q)$$

où  $\Gamma(H^*(\zeta) \otimes T^*Q)$  est le  $C^\infty(Q, \mathbf{R})$  module des sections du produit fibré  $H^*(\zeta) \otimes T^*Q$ .

*Démonstration.* Pour tout  $x \in Q$  et  $X \in T_x Q$ , soit  $\hat{X}$  un champ le long de  $\mathcal{S}^{-1}(x)$  tel que  $\mathcal{S}^T \hat{X} = X$ . Pour toute section  $\alpha$  de  $Z(\nu_2^* \zeta)$  on pose  $L(\alpha)(X) = i_S^* i_{\hat{X}} \alpha$  où  $i_S: S \hookrightarrow P$  désigne l'inclusion de la fibre de  $x$ . Comme  $\alpha \in Z(\nu_2^* \zeta)$ ,  $L(\alpha)(X)$  est bien défini et l'on voit, en coordonnées locales fibrées par exemple, que  $\bar{d}L(\alpha)(X) = 0$  où  $\bar{d}$  est la dérivation le long des fibres et que si  $\alpha = d\beta$  où  $\beta \in C^\infty(\nu_2^* \zeta)$ ,  $L(d\beta)(X) = \bar{d}i_S^* i_{\hat{X}} \beta$ , ce qui assure que

$$\begin{aligned} L: Z(\nu_2^* \zeta) &\rightarrow \Gamma(Z(\zeta) \otimes T^*Q) \\ \alpha &\rightarrow (X \rightarrow L(\alpha)(X)) \end{aligned}$$

passé au quotient et définit une application, encore notée  $L$  par abus de notations, de  $H^2(P, \zeta)$  dans  $\Gamma(H^*(\zeta) \otimes T^*Q)$ .

Si  $L[\alpha] = 0$  et si  $\alpha$  est un représentant de  $[\alpha]$ ,  $L(\alpha)(X)$  est exacte pour tout  $x \in Q$  et tout  $X \in T_x Q$ . Il existe donc une application  $h_x$  telle que  $\bar{d}h_x = L(\alpha)(X)$ . On définit une 1-forme  $\beta \in C^\infty(\nu_2^* \zeta)$  en posant:

$$\beta(\xi) = h_{\mathcal{S}^T \xi}.$$

De là on déduit que  $d\beta + \alpha = \alpha_1$  est une 1-forme fermée projetable, ce qui assure l'existence d'une 2-forme fermée  $\alpha_0$  sur  $Q$  telle que  $\mathcal{S}^*[\alpha_0] = \alpha$ .

Enfin si  $[\alpha_0] \in H^2(Q, \mathbf{R})$  et si  $\mathcal{S}^*[\alpha_0] = 0$ , il existe une 1-forme  $\beta \in C^\infty(\nu_2^* \zeta)$  telle que  $d\beta = \mathcal{S}^* \alpha_0$  ce qui entraîne que  $\beta$  est projetable et donc que  $[\alpha_0] = 0$  ce qui achève la démonstration.

Si  $\zeta$  est un feuilletage régulier sur  $P$  et si  $\tilde{\sigma}$  est une section de  $\Lambda^k \zeta^*$  dont la restriction aux feuilles est fermée, soit  $\tilde{\sigma}$  une extension de  $\tilde{\sigma}$ , i.e. une  $k$ -forme sur  $P$  telle que pour toute feuille  $S$ ,  $i_S^* \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}|_S$ .  $d\tilde{\sigma} \in Z(\nu_{k+1} \zeta^*)$  et sa classe dans  $H^{k+1}(P, \zeta)$  ne dépend que de  $\tilde{\sigma}$ .  $[d\tilde{\sigma}]$  est trivialement l'obstruction à ce

que  $\tilde{\sigma}$  possède une extension fermée. En particulier, si  $\zeta$  est le feuilletage symplectique de  $(P, \Lambda)$  et  $\tilde{\sigma}$  la 2-forme symplectique des feuilles, on définit ainsi une 3-classe de cohomologie relative  $[\zeta]$  de  $(P, \zeta)$ .

**Définition 4.1.**  $[\zeta]$  est la classe fondamentale de la variété de Poisson régulière  $(P, \Lambda)$ .  $[\zeta] = 0$  si et seulement si  $\tilde{\sigma}$  possède une extension fermée.

**Remarque.** Même si  $\zeta$  est une fibration, la situation étudiée est plus générale que celle envisagée par Gotay, Lashof, Sniaticky, et Weinstein [18]: Ainsi, si  $\mathcal{U}$  est l'ouvert des points réguliers du dual  $\underline{G}^*$  de l'algèbre de Lie d'un groupe connexe compact  $G$ ,  $\mathcal{U}$  est fibré sur une chambre de Weyl  $C$  à fibre simplement connexe  $G/T$  où  $T$  est un tore maximal. Mais  $[\zeta] \neq 0$  si et seulement si  $G$  n'est pas abélien. En fait les fibrations étudiées en [17] sont symplectiquement localement triviales—ce qui n'est pas le cas de  $\mathcal{U} \rightarrow C$ —ce qui implique que pour chaque fibre, il existe un voisinage ouvert réunion de fibres sur lequel  $\tilde{\sigma}$  s'étend en une 2-forme fermée. En général  $[\zeta]$  mesure la variation de la forme symplectique des feuilles.

**(b) Classe de Chern.** On note  $C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R})$  (resp.  $Z(\nu^*\zeta/\mathcal{R})$ ) le faisceau quotient par  $\mathcal{R}$  de  $C^\infty(\nu^*\zeta)$  (resp.  $Z(\nu^*\zeta)$ ), +l'addition dans le fibré en groupes abéliens  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}$ .

Si  $s$  est une section locale de  $f: M \rightarrow P$  on définit une carte  $\psi_s$  ainsi:

$$\psi_s^{-1}(y) = \hat{\phi}(y) \cdot s(x) \quad \text{si } \pi y = x.$$

Si  $s_i$  ( $i = 1, 2$ ) est une section au-dessus de  $U_i$ , et si  $U_i \cap U_j = \emptyset$  soit  $\mu_{ij}$  l'unique section de  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}$  au-dessus de  $U_i \cap U_j$  définie par

$$\hat{\phi}(\mu_{ij})s_i(x) = s_j(x).$$

Comme  $\psi_{s_i} \circ \psi_{s_j}^{-1}(y) = y + \mu_{ij} \circ \pi(y)$  on a prouvé dans la terminologie de Grothendieck [19].

**Théorème 4.1.**  $f: M \rightarrow P$  est localement isomorphe à  $\nu^*\zeta/\mathcal{R} \rightarrow P$  le faisceau structural étant  $C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R})$ .

On peut donc associer à  $f: M \rightarrow P$  une 1-classe de cohomologie  $\mu$  dans  $H^1(P, C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R}))$ .

De la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow C^\infty(\nu^*\zeta) \rightarrow C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R}) \rightarrow 0$$

et de ce que  $C^\infty(\nu^*\zeta)$  est mou on déduit que le cobord  $\delta$  est un isomorphisme de  $H^1(P, C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R}))$  sur  $H^2(P, \mathcal{R})$ .

**Définition 4.2** (cf. [14]).  $\delta\mu = \nu$  est la classe de Chern de la fibration isotrope symplectiquement complète à feuilles compactes:  $f: M \rightarrow P$ .

$\mu$  et donc  $\nu$  est une classe d'isomorphismes de fibrés localement isomorphes à  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}$  et de faisceau structural  $C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R})$ . En particulier  $\nu = 0$  si et seulement si  $M \rightarrow P$  est isomorphe à  $\nu^*\zeta/\mathcal{R}$ .

Si l'on tient compte des isomorphismes fournis par le lemme 4.2 la suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow Z(\nu^*\zeta) \rightarrow Z(\nu^*\zeta/\mathcal{R}) \rightarrow 0$$

conduit au résultat suivant:

**Proposition 4.1.** *On a une suite exacte s'écrivant pour tout  $h \geq 0$*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^h(P, Z(\nu^*\zeta/\mathcal{R})) &\xrightarrow{\Delta} H^{h+1}(P, \mathcal{R}) \xrightarrow{\hat{d}} H^{h+2}(P, \zeta) \\ &\rightarrow H^{h+1}(P, Z(\nu^*\zeta/\mathcal{R})) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

et commençant par

$$0 \rightarrow H^0(P, \mathcal{R}) \rightarrow H^0(P, Z(\nu^*\zeta)) \rightarrow H^0(P, Z(\nu^*\zeta/\mathcal{R})) \rightarrow \dots$$

où le morphisme  $\Delta$  est le cobord de la suite exacte (\*) et où  $\hat{d}$  est, par abus de notation, le morphisme rendant commutatif le diagramme ( $h \geq 0$ )

$$\begin{array}{ccccc} H^{h+1}(P, \mathcal{R}) & \xrightarrow{\hat{d}} & H^{h+1}(P, Z(\nu^*\zeta)) & \xrightarrow{\sim} & H^{h+2}(P, \zeta) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ H^h(P, C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R})) & \xrightarrow{\hat{d}_*} & H^h(P, Z_2(\nu^*\zeta)) & & \end{array}$$

où  $\hat{d}_*$  est le morphisme déduit de  $\hat{d}: C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R}) \rightarrow Z(\nu^*\zeta)$ .

*Démonstration.* Le seul point restant à démontrer concerne  $\hat{d}$ . On écrit la démonstration pour  $h = 1$ . L'image de  $[\mu_{ij}] \in H^1(P, C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R}))$  dans  $H^2(P, \mathcal{R})$  est la classe du cocycle  $\rho_{ijk} = \tilde{\mu}_{ij} + \tilde{\mu}_{jk} - \tilde{\mu}_{ik}$  où  $\tilde{\mu}_{ij}$  est une section au-dessus de  $U_i \cap U_j$  relevant  $\mu_{ij}$  dans  $C^\infty(\nu^*\zeta)$ . Le 2-cocycle de  $Z(\nu^*\zeta)$  associé à  $\rho_{ijk}$  ayant dans  $H^1(P, Z(\nu^*\zeta))$  pour image le 1-cocycle  $d\tilde{\mu}_{ij} = d\hat{\mu}_{ij}$  (cf. lemme 4.2). La démonstration est achevée. Pour  $h = 0$  un examen direct donne le résultat.

Dorénavant on identifie  $\hat{d}$  et  $\hat{d}_*$ .

Si  $(P, \Lambda)$  est une variété de Poisson, on dira avec A. Weinstein [42] que  $f: (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$  est une *réalisation* de  $(P, \Lambda)$  si  $f$  est un morphisme de Poisson surjectif de la variété symplectique  $(M, \sigma)$  sur  $(P, \Lambda)$ . Si  $(P, \Lambda)$  possède un réseau  $\mathcal{R}$  (cf. §2) on s'intéresse aux *réalisations* isotropes symplectiquement complètes à fibres compactes (*en abrégé R.I.S.C.*) associées à  $\mathcal{R}$  c'est-à-dire pour lesquelles  $f$  est une F.I.S.C. de réseau  $\mathcal{R}$ .

*Par isomorphisme de R.I.S.C.* on entend un difféomorphisme symplectique compatible avec les fibrations; un tel isomorphisme induit un difféomorphisme de Poisson des bases qui échange les réseaux, ce qui permet à un isomorphisme près de fixer la base et le réseau.

**Théorème 4.2.** Si  $\nu \in H^2(P, \mathcal{R})$  est la classe de Chern de la F.I.S.C.  $f: (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$  de réseau  $\mathcal{R}$ ,  $[\zeta] = \hat{d}\nu$ .

Inversement

**Théorème 4.3.** Soit  $(P, \Lambda)$  une variété de Poisson régulière, de feuilletage canonique  $\zeta$  de codimension  $k$  possédant un réseau  $\mathcal{R}$  et  $\nu \in H^2(P, \mathcal{R})$ .

(i)  $\nu$  est la classe de Chern d'une R.I.S.C. associée à  $\mathcal{R}$  si et seulement si  $\hat{d}\nu = [\zeta]$ .

(ii) Les R.I.S.C. associées à  $\mathcal{R}$  sont classifiées à isomorphisme de R.I.S.C. près, par  $H^2(P, \zeta)/\hat{d}H^1(P, \mathcal{R})$ .

*Démonstration de 4.2.* De la démonstration du théorème 4.1 on déduit que  $s_j(x) = \varphi(\mu_{ij}(x)) \cdot s_i(x)$  ce qui assure que  $s_j^*\sigma = s_i^*\sigma - d\mu_{ij}$  compte tenu du théorème 2.1 (Corollaire 2).

Le 1-cocycle  $s_i^*\sigma - s_j^*\sigma$  de  $Z(\nu_2^*\zeta)$  a pour image dans le faisceau mou  $C^\infty(\nu_2^*\zeta)$  un cobord  $u_j - u_i$ . Ainsi  $s_i^*\sigma + u_i$  définit une extension  $\alpha$  de la forme symplectique des feuilles de  $P$  ce qui assure que  $[\zeta]$  est la classe de  $u_j - u_i = \hat{d}\mu_{ij}$ .

*Démonstration de 4.3.*  $P$  étant régulière,  $[\zeta]$  peut être définie par le 1-cocycle  $\sigma_i - \sigma_j$  où  $(U_i)$  est un recouvrement ouvert  $\zeta$ -distingué de  $P$  et  $\sigma_i$  une extension fermée de  $\sigma$  à  $U_i$ . Soit  $\mu_{ij}$  le 1-cocycle définissant  $\nu$ . En modifiant éventuellement chaque  $\sigma_i$  par un élément de  $Z(\nu^*\zeta|_{U_i})$  on peut assurer que

$$\hat{d}\mu_{ij} + \sigma_j - \sigma_i = 0.$$

Soit  $M \rightarrow P$  un représentant de  $\nu \in H^2(P, \mathcal{R})$ . On peut supposer que pour tout  $i$  on a un isomorphisme fibré  $\psi_i$  de

$$f^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} \nu^*\zeta/\mathcal{R}|_{U_i}$$

et  $\psi_i \circ \psi_j^{-1}(y) = y + \mu_{ij}(x)$  si  $y \in \pi^{-1}(x)$ .

Soit  $\Sigma_i$  la 2-forme sur  $f^{-1}(U_i)$   $f^*\sigma_i - \psi_i^*\beta$

$$\Sigma_j - \Sigma_i = f^*(\sigma_j - \sigma_i) - (\psi_j^*\beta - \psi_i^*\beta).$$

Or  $\psi_j^{-1*}\psi_i^*\beta = \beta + \pi^*\hat{d}\mu_{ij}$ .

Il en résulte que  $\Sigma_j - \Sigma_i = f^*(\sigma_j - \sigma_i + \hat{d}\mu_{ij}) = 0$ . On peut donc définir sur  $M$  une 2-forme  $\Sigma$  par  $\Sigma|_{f^{-1}(U_i)} = \Sigma_i$  et  $\Sigma$  est fermée. Le reste de l'assertion (i) est évident.

(ii) Soit  $\nu \in \hat{d}^{-1}[\zeta]$ . Deux représentants de  $\nu$  étant isomorphes comme fibrés à faisceau structural  $C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R})$ , on peut identifier l'ensemble des représentants de  $\nu$  aux structures symplectiques sur un même fibré  $f: M \rightarrow P$ , faisant de  $f$  une fibration isotrope symplectiquement complète de réseau  $\mathcal{R}$  et classe de Chern  $\nu$ . Si  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$  sont deux telles structures sur  $f$ ,  $(\psi_i)$  et  $(\tilde{\psi}_i)$  les cartes associées au-dessus d'un recouvrement  $(U_i)$  de  $P$ ,  $(\tilde{\psi}_i \circ \psi_i^{-1})$  est défini

par  $a_i \in C^\infty(U_i, \nu^*\zeta(\mathcal{R}))$  et si  $\mu_{ij}$  est le 1-cocycle  $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$  (resp.  $\tilde{\mu}_{ij} = \tilde{\psi}_i \circ \tilde{\psi}_j^{-1}$ )  

$$\tilde{\mu}_{ij} = a_i + \mu_{ij} - a_j.$$

L'équation  $\hat{d}\nu = [\zeta]$  entraîne avec des notations évidentes

$$\hat{d}\mu_{ij} + \sigma_j - \sigma_i = \hat{d}\tilde{\mu}_{ij} + \tilde{\sigma}_j - \tilde{\sigma}_i = 0$$

et

$$\sigma = -\psi_i^*\beta + f^*\sigma_i, \quad \tilde{\sigma} = -\tilde{\psi}_i^*\beta + f^*\tilde{\sigma}_i.$$

Il en résulte que  $\sigma_i - \tilde{\sigma}_i + \hat{d}a_i = \sigma_j - \tilde{\sigma}_j + \hat{d}a_j$  et définit donc une 2-forme  $\eta$  section globale de  $Z(\nu^*\zeta)$  telle que  $\tilde{\sigma} - \sigma = f^*\eta$ .

Si  $(M, \sigma)$  et  $(\tilde{M}, \tilde{\sigma})$  sont comme fibrés symplectiquement isomorphes et si  $\chi$  est cet isomorphisme, on pose

$$c_i = \tilde{\psi}_i \circ \chi \circ \psi_i^{-1} \in C^\infty(U_i, \nu^*\zeta/\mathcal{R}).$$

$\tilde{\psi}_i \circ \chi$  et  $\psi_i$  étant associé au même cocycle, les  $c_i$  se recollent en une section globale  $\gamma$  de  $C^\infty(\nu^*\zeta/\mathcal{R})$  et la relation  $\sigma = \chi^*\tilde{\sigma}$  s'écrit

$$\chi^*\tilde{\psi}_i^*(-\beta + \pi^*\tilde{\sigma}_i) = \tilde{\psi}_i^*(-\beta + \pi^*(\tilde{\sigma}_i - \hat{d}c_i))$$

ce qui entraîne que  $\eta = \hat{d}\gamma$ .

Inversement si  $\eta = \hat{d}\gamma$  le corollaire du théorème 2.1 assure l'existence d'un difféomorphisme symplectique  $\chi$  tel que  $\chi^*\tilde{\sigma} = \sigma$ , ce qui achève la démonstration compte tenu de la proposition 4.1.

**Remarques.** (i) La relation  $[\zeta] = \hat{d}\nu$  traduit la variation de la forme symplectique des feuilles de  $P$ ; on étend ainsi le résultat de Duistermaat et Heckmann [15] aux F.I.S.C.

(ii) Le théorème 4.3 fournit une interprétation des termes de la suite exacte précédant  $H^2(P, \mathcal{R})$ . En particulier si  $H^2(P, \zeta)/\hat{d}H^1(P, \mathcal{R}) \neq 0$  la structure symplectique d'une solution  $\nu$  de  $\hat{d}\nu = [\zeta]$  n'est pas canonique. Compte tenu du lemme 4.3 on peut préciser:

**Corollaire 1.** (i) Si  $\pi_1 P = 0$ , les structures symplectiques sur une solution de  $\hat{d}\nu = [\zeta]$  sont classifiées à un symplectomorphisme près par  $H^2(P, \zeta)$ .

(ii) Si  $g: P \rightarrow Q$  est une fibration à fibre type compacte  $\Sigma_0$  à premier nombre de Betti nul, et si  $Q$  est à deuxième nombre de Betti nul, toute solution de  $\hat{d}\nu = [\zeta]$  est, à un symplectomorphisme près, munie canoniquement d'une structure symplectique.

La partie (i) explicite un résultat imprécis de [11].

Le cas  $[\zeta] = 0$  est proche du cas lagrangien étudié par Duistermaat [14].

**Corollaire 2.**  $[\zeta]$  étant nulle soit  $\tilde{\omega}$  une extension fermée de la forme symplectique des feuilles de  $(P, \Lambda)$ ; les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\nu = 0$  et il existe une section  $s$  de  $f: M \rightarrow P$  telle que  $s^*\sigma = \tilde{\omega}$ .
- (ii)  $\nu = 0$  et il existe une section  $s$  de  $f: M \rightarrow P$  telle que  $[s^*\sigma - \tilde{\omega}] \in \hat{d}H^1(P, \mathcal{R})$ .

(iii)  $(M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$  est symplectiquement isomorphe au fibré  $\nu^*\zeta/\mathcal{R} \rightarrow P$  muni de la 2-forme  $-\beta + \pi^*\tilde{\omega}$ .

(c) **Cas où la monodromie est triviale.** Dans ce cas  $\mathcal{R}$ , identifié à  $H^0(P, \mathcal{R})$ , est un groupe abélien libre de rang  $k$ . On pose  $\underline{\mathcal{T}} = \mathcal{R} \otimes \mathbf{R}$  et  $\mathcal{T} = \underline{\mathcal{T}}/\mathcal{R}$  est un groupe compact isomorphe à  $T^k$ .

On a les isomorphismes canoniques:

$$\begin{aligned} H^h(P, \mathcal{R}) &= H^h(P, \mathbf{Z}) \otimes \mathcal{R}, \\ H^h(P, \underline{\mathcal{T}}) &= H^h(P, \mathbf{R}) \otimes \underline{\mathcal{T}} = H^h(P, \mathcal{R}) \otimes \mathbf{R}. \end{aligned}$$

On notera  $\widetilde{H^h(P, \mathbf{Z})}$  la partie libre de  $H^h(P, \mathbf{Z})$  identifiée au réseau des classes de  $h$ -formes entières.

Si  $\nu \in H^2(P, \mathcal{R})$  soit  $\tilde{\nu}$  son image dans  $H^2(P, \mathcal{T})$ .  $\widetilde{H^2(P, \mathbf{Z})} \otimes \mathcal{R}$  est l'image de  $H^2(P, \mathcal{R})$  dans  $H^2(P, \mathcal{T})$ .

$f: M \rightarrow P$  étant un  $\mathcal{T}$ -fibré principal et l'algèbre de Lie de  $\mathcal{T}$  par construction même étant  $\mathcal{T}$ , la classe de Chern au sens usuel du  $\mathcal{T}$ -fibré principal  $f$ , i.e., la classe de la courbure d'une  $\mathcal{T}$ -connexion quelconque de  $f$ , appartient à  $H^2(P, \underline{\mathcal{T}})$ .

**Proposition 4.2.** *L'image  $\tilde{\nu}$  de  $\nu$  dans  $H^2(P, \underline{\mathcal{T}})$  est la classe de Chern au sens usuel du  $\mathcal{T}$ -fibré principal  $f$ .*

*Démonstration.* Si  $\mu_{ij}$  est le cocycle représentant  $\nu$  la donnée d'une  $\mathcal{T}$ -connexion équivaut à la donnée sur chaque  $U_i$  d'une 1-forme  $\omega_i$  telle que

$$\omega_j - \omega_i = \hat{d}\mu_{ij}$$

où  $\mu_{ij}$  considéré comme  $\mathcal{T}$ -cocycle est une  $C^\infty$ -application de  $U_i \cap U_j$  dans  $\mathcal{T}$ , ce qui permet de conclure.

**Remarque.** En présence de torsion, l'application de  $H^2(P, \mathbf{Z})$  dans  $H^2(P, \mathbf{R})$  n'est pas injective, ce qui explique que  $\tilde{\nu} = 0$  n'est qu'une condition suffisante de trivialité du fibré principal  $f: M \rightarrow P$  à la différence de  $\nu = 0$ . L'exemple suivant éclaire cette remarque: si on considère le  $\mathbf{Z}_2$ -fibré principal  $\mathbf{S}^n \rightarrow P^n(\mathbf{R})$  et  $E_n$  le  $\mathbf{S}^1$ -fibré principal obtenu par extension à  $\mathbf{S}^1$  du groupe  $\mathbf{Z}_2$ , la classe de Chern réelle de  $E_n$  est nulle. Cependant  $E_n \rightarrow P^n(\mathbf{R})$  n'est jamais trivial car  $E_n$  s'identifie à  $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^1)/\mathbf{Z}_2$  où  $\mathbf{Z}_2$  agit naturellement  $((x, \theta) \rightarrow (-x, -\theta))$ . Ceci assure que si  $P^n(\mathbf{R})$  est orientable,  $E_n$  ne l'est pas et vice versa ce qui interdit à  $E_n$  d'être trivial.

$\hat{d}: H^h(P, \mathcal{R}) \rightarrow H^{h+1}(P, \zeta)$  est le composé des morphismes canoniques de  $H^h(P, \mathcal{R})$  dans  $H^h(P, \underline{\mathcal{T}})$  et de  $H^h(P, \underline{\mathcal{T}})$  dans  $H^{h+1}(P, \zeta)$  ce dernier étant déduit du morphisme canonique de fibrés de  $\text{Hom}(\Lambda^h TP, T^*P)$  dans  $\text{Hom}(\Lambda^{h+1} TP, \mathbf{R})$ . Si  $\eta_i$  est une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$  et si  $\tilde{\nu} = [\Omega_i]$ ,  $\eta_i$  ( $\eta_i$  est une base de  $\underline{\mathcal{T}}$ )  $\hat{d}\nu = [\Sigma\Omega_i \wedge \eta_i]$ .

Si  $\omega$  est une connexion de courbure  $\Omega$ , dans la base  $(\eta_i)$  de  $\mathcal{R}$ ,  $\omega = (\omega_i)_{1 \leq i \leq k}$ . Si  $X_i = \#f^*\eta_i$ ,  $\iota_{X_i}(\sigma - \sum_1^k f^*\eta_i \wedge \omega_i) = 0$  ce qui assure que  $\sigma - \sum_1^k f^*\eta_i \wedge \omega_i$  se projette sur une 2-forme  $\alpha$  de  $P$  prolongeant la forme symplectique des feuilles. Compte tenu des théorèmes 4.1 et 4.2 on a prouvé:

**Proposition 4.3.** (i) *Si  $f: M \rightarrow P$  est sans monodromie, il existe sur  $P$  une 2-forme  $\alpha$  étendant la forme symplectique des feuilles et une  $\mathcal{F}$ -connexion  $\omega$  sur  $M$  telle que*

$$\sigma = f^*\alpha + \sum_1^k f^*\eta_i \wedge \omega_i$$

où  $(\eta_i)$  est une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$  et  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq k}$  les composantes de  $\omega$  dans cette base.  $[\xi] = [\sum_1^k \eta_i \wedge \Omega_i]$  où  $(\Omega_i)$  est la courbure de  $\omega$  écrite dans la base  $(\eta_i)$ .

(ii) *Inversement si  $(P, \Lambda)$  est muni d'un réseau trivial  $\mathcal{R}$  et si  $\tilde{\nu} \in H^2(P, \mathbf{Z}) \otimes \mathcal{R}$ , il existe un  $T^k$ -fibré principal  $f: M \rightarrow P$  qui est une F.I.S.C. de classe de Chern  $\nu$  d'image  $\tilde{\nu}$  dans  $H^2(P, \mathbf{Z}) \otimes \mathcal{R}$ . Les fibrés supports sont classifiés à un isomorphisme fibré près par la torsion de  $H^2(P, \mathbf{Z}^k)$ . Les R.I.S.C. correspondant à un même fibré sont classifiées à un isomorphisme près par  $H^2(P, \xi)/\hat{d}(H^1(P, \mathbf{Z}) \otimes \mathcal{R})$ .*

De ceci on déduit le

**Théorème 4.4** (Existence globale de variables actions angles). *La monodromie et la classe de Chern sont nulles si et seulement si il existe une extension fermée  $\alpha$  de la forme symplectique des feuilles de  $P$  et il existe  $k$  1-formes fermées  $\eta_i$  normales à  $\xi$  telles que, si  $(\theta_i)$  désignent les  $k$  1-formes fondamentales de  $T^k$ , il existe un difféomorphisme de fibrés  $\psi: M \rightarrow P$  sur  $P \times T^k \rightarrow P$  vérifiant*

$$\psi^* \left( \pi_1^*\alpha + \sum_1^k \pi_1^*\eta_i \wedge \pi_2^*\theta_i \right) = \sigma$$

(où  $\pi_i$  désigne,  $i = 1, 2$ , la  $i$ ème projection de  $P \times T^k$  sur ses facteurs).

Si  $\pi_1(P) = 0$  (ce qui assure que  $\mathcal{M} = 0$ ) et si  $\nu = 0$ , il existe  $k$  fonctions de Casimir globales telle que

$$\psi^{-1*}\sigma = \pi_1^*\alpha + \sum_1^k d\pi_1^*a_i \wedge \pi_2^*\theta_i.$$

Dans ce cas les applications  $\pi_1^*a_i$  s'appellent les actions et les paramètres angulaires de  $T^k$  les angles. En particulier si  $\pi_1(P) = 0 = \pi_2(P)$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\nu$  sont nuls. On retrouve le résultat de Nekhoroshev [33].

**Remarque.** On peut donner de  $\sigma$  une expression intrinsèque: Si  $\omega$  est une  $\mathcal{F}$ -connexion sur  $M$ , on note  $\tilde{\omega}$  la 2-forme sur  $M$  définie par  $\tilde{\omega}$

$$\tilde{\omega}(X, Y) = \langle \omega(X), f^T Y \rangle - \langle \omega(Y), f^T X \rangle$$

(ce qui a un sens car  $\mathcal{R} \subset C^\infty(T^*P)$ ). Alors:

La mécanique du solide fournit un exemple à  $\mathcal{M} = 0$ ,  $[\zeta] \neq 0$  et donc  $\nu \neq 0$ .

**Exemple.** *Mouvement du solide pesant à point fixe.* On est exactement dans le domaine d'application de la proposition précédente. Avec des notations usuelles,  $M = (T^*\text{SO}(3), d\lambda)$  et possède  $\mathbf{S}^1$  comme groupe d'action hamiltonienne de moment  $\mathcal{J}$  agissant sans point fixe.  $M$  est donc un  $\mathbf{S}^1$ -fibré principal sur  $P$  variété de Poisson des orbites, elle-même fibrée sur  $\mathbf{R}$  par l'application  $\tilde{\mathcal{J}}$  déduite de  $\mathcal{J}$  par passage au quotient. Les feuilles de  $P$  sont comme variétés isomorphes à  $T^*\mathbf{S}^2$  (cf. [24]), ce qui permet d'identifier  $P$  à  $\mathbf{R} \times T^*\mathbf{S}^2$ . La 2-forme construite sur la feuille  $\{a\} \times T^*\mathbf{S}^2$  est  $d\lambda_0 + a\sigma_0$  où  $\lambda_0$  est la forme de Liouville de  $T^*\mathbf{S}^2$  et  $\sigma_0$  la contre-image sur  $T^*\mathbf{S}^2$  de la structure symplectique standard de  $\mathbf{S}^2$ , ce qui entraîne que  $[\zeta] = [da \wedge \sigma_0] \neq 0$  car  $(\mathbf{S}^2, \sigma_0)$  n'est pas exacte.  $\nu$  s'identifie à la classe de Chern de la fibration de Hopf  $\mathbf{S}^1 \rightarrow \text{SO}(3) \rightarrow \mathbf{S}^2$ . Ainsi  $\mathcal{M} = 0$ ,  $[\zeta] \neq 0 \neq \nu$ . Il n'y a pas de variables actions-angles globales bien que  $P = \mathbf{R} \times T^*\mathbf{S}^2$  soit simplement connexe.

### 5. Réalisation d'une variété de Poisson au voisinage d'une feuille compacte

$(\Sigma_0, \sigma_0)$  étant variété symplectique compacte, on note  $(P, \Lambda, \Sigma_0, \sigma_0)$  un germe au voisinage de  $\Sigma_0$  de variété de Poisson contenant  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  comme feuille compacte. Deux tels germes  $(P_i, \Lambda_i, \Sigma_0, \sigma_0)$  sont isomorphes si il existe un germe de difféomorphisme de Poisson au voisinage de  $\Sigma_0$ ,  $\varphi$ , de  $P_1$  sur  $P_2$ , tel que  $\varphi(\Sigma_0) = \Sigma_0$ .

**Définition 5.1.** *On appelle germe de R.I.S.C. (resp. de R.I.S.C. sans holonomie) au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  la donnée d'un germe  $(P, \Lambda, \Sigma_0, \sigma_0)$  de variété de Poisson contenant  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  (resp. comme feuille sans holonomie) et d'un germe de F.I.S.C.  $f: (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$  au voisinage de  $f^{-1}\Sigma_0$ . Deux tels germes de R.I.S.C. sont isomorphes si il existe un germe de difféomorphisme symplectique compatible avec les fibrations échangeant les contre-images de  $\Sigma_0$ .*

Si  $(P, \Lambda, \Sigma_0, \sigma_0)$  contient  $\Sigma_0$  comme feuille compacte sans holonomie le théorème de stabilité locale [27], [21] permet d'affirmer qu'il existe un représentant de  $(P, \Lambda, \Sigma_0, \sigma_0)$  qui est une fibration  $\mathcal{J}$  sur  $\mathbf{R}^k$  ce qui assure que  $(P, \Lambda, \Sigma_0, \sigma_0)$  possède un réseau. On peut alors choisir la fibration  $\mathcal{J}$  de façon que ce réseau soit  $\mathcal{J}^*\mathcal{R}_0$  où  $\mathcal{R}_0 = \bigoplus \mathbf{Z} dp_i$  si  $\mathbf{R}^k = \{(p_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ . Ceci justifie que l'on étudie la situation où  $P$  est fibré sur  $\mathbf{R}^k$  de réseau  $\mathcal{R} = \mathcal{J}^*\mathcal{R}_0$ . Le lemme de Poincaré-Weinstein [44] entraîne que  $H^{h+1}(P, \zeta) = C_0^\infty(\mathbf{R}^k, H^2(\Sigma_0, \mathbf{R}))$  où  $C_0^\infty$  désigne les fonctions  $C^\infty$  nulles à l'origine. D'autre part si  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont deux structures de Poisson sur  $P = \Sigma_0 \times \mathbf{R}^k$  de feuilletage caractéristique la deuxième projection  $J: P \rightarrow \mathbf{R}^k$  associées à la

même classe  $[\zeta] \subset H^3(P, \zeta)$ , il existe une extension  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) de la structure symplectique des feuilles de  $(P, \Lambda_i)$  telle que  $d\sigma_1 = d\sigma_2$ . Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  coïncident sur  $\Sigma_0 \times 0$ , le lemme de Poincaré-Weinstein assure l'existence d'une 1-forme  $v$  sur  $P$  telle que  $\sigma_1 - \sigma_2 = dv$  et le théorème de Darboux-Weinstein [42] entraîne que sur un voisinage  $\Sigma_0 \times U_0$  de  $\Sigma_0 = \mathcal{F}^{-1}(0)$ , les germes de  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont isomorphes.

**Proposition 5.1.** *Les germes de structures de Poisson au voisinage de  $\Sigma_0$  sur  $P_0 = \Sigma_0 \times \mathbf{R}^k$  dont le feuilletage canonique est la première projection  $\mathcal{F}_0$  et induisant sur  $\Sigma_0 = \mathcal{F}_0^{-1}(0)$  la structure symplectique donnée  $\sigma_0$  sont classifiés à un isomorphisme près par  $C_0^\infty(\mathbf{R}^k, H^2(\Sigma_0, \mathbf{R}))$ .*

Afin de classifier à isomorphisme près les germes de R.I.S.C. sans holonomie au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  il faut déterminer d'après la proposition 4.1,  $\hat{d}H^2(P, \mathcal{R})$ .  $\Sigma_0$  étant un rétracté par déformation de  $P$ ,  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}) = H^2(P, \mathbf{Z})$ . D'autre part  $\mathcal{R}$  étant trivial, il découle de la proposition 4.3 que si l'on écrit

$$H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}^k) = \text{Hom}(\mathbf{Z}^k, H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})),$$

$\hat{d}$  se factorise à travers le morphisme canonique de  $\text{Hom}(\mathbf{Z}^k, H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}))$  dans  $\text{Hom}(\mathbf{Z}^k, \widehat{H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})})$ :

$$H^2(P, \mathcal{R}) = \text{Hom}(\mathbf{Z}^k, H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})) \xrightarrow{\hat{d}} C_0^\infty(\mathbf{R}^k, H^2(\Sigma_0, \mathbf{R})) = H^3(P, \rho)$$

$\swarrow \qquad \searrow$   
 $\text{Hom}(\mathbf{Z}^k, \widehat{H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})})$

$$d(v)(p) = \tilde{v}(p) = \sum p^i [\Omega_i] \quad \text{si } \tilde{v} = ([\Omega_i]).$$

Inversement si  $\tilde{v} \in \text{Hom}(\mathbf{Z}^k, \widehat{H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})})$  soit  $K$  un monomorphisme de  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{R})$  dans  $C^\infty(\Lambda^2 T^* \Sigma_0)$  tel que  $[K(\alpha)] = \alpha$ . Par exemple on associe à  $\alpha$  la 2-forme harmonique la représentant. On considère sur  $\Sigma_0 \times \mathbf{R}^k$  la 2-forme qui, au point  $(x_0, p)$ , s'écrit  $\sigma_0(x_0) + K \circ \tilde{v}(p)$ ; on peut restreindre  $\mathbf{R}^k$  à un voisinage  $U$  de 0 tel que pour tout point  $p$  de  $U$ , la restriction de  $\sigma_0(x_0) + K \circ \tilde{v}(p)$  à  $\Sigma_0 \times p$  soit une 2-forme symplectique.  $P_{\tilde{v}} = \Sigma_0 \times U$  est alors muni par construction même d'une structure de Poisson  $\Lambda_{\tilde{v}}$  de classe fondamentale  $[\rho] = \tilde{v}$  et admettant une R.I.S.C.

**Définition 5.2.**  $(P_{\tilde{v}}, \Lambda_{\tilde{v}})$  est le représentant canonique de  $\tilde{v}$ .

Il résulte de ce qui précède que compte tenu de 4.1 la solution du problème posé est donnée par la suite exacte de cohomologie sur  $\Sigma_0$  déduite de  $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^1 \rightarrow 0$  ce qui conduit au théorème suivant:

**Théorème 5.1.** (i) *L'espace des classes de germes isomorphes de variétés de Poisson contenant  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  comme feuille sans holonomie et admettant une R.I.S.C. est isomorphe à  $\text{Hom}(\mathbf{Z}^k, \widehat{H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})})$ .*

(ii) Si  $H^1(\Sigma_0, \mathbf{R}) = 0$  l'espace des classes d'isomorphismes de R.I.S.C. sans holonomie au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  est isomorphe à  $\text{Hom}(\mathbf{Z}^k, H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}))$ , le sous-ensemble de celles qui proviennent d'un même  $\tilde{\nu} \in \text{Hom}(\mathbf{Z}^k, H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}))$  est isomorphe à  $(H^1(\Sigma_0, \mathbf{S}^1))^k$ .

(ii) provient de ce que  $H^1(\Sigma_0, \mathbf{R}) = 0$  entraîne  $H^2(P, \zeta) = 0$ .

Si  $\pi_1(\Sigma_0) = 0$ , tout germe de variété de Poisson contenant  $\Sigma_0$  la contient comme feuille sans holonomie. De plus  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})$  est alors un  $\mathbf{Z}$ -module libre et  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(\Sigma_0, \mathbf{R})$  est injective:

**Corollaire 1.** Si  $\pi_1(\Sigma_0) = 0$ , l'espace des classes d'isomorphismes de germes de R.I.S.C. au-dessus de  $\Sigma_0$  est isomorphe à  $\text{Hom}(\mathbf{Z}^k, H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}))$ .

**Remarque.** Si  $f: (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$  est un germe de R.I.S.C. sans holonomie au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$ , soit  $N_0 = f^{-1}(\Sigma_0)$ . Si  $x_0 \in \Sigma_0$ ,  $f^{-1}(x_0)$  est isomorphe à  $\nu^* \rho_{x_0} / \mathcal{R}_{x_0}$  ce qui identifie  $\pi_1 f^{-1}(x_0)$  à  $\mathcal{R}$  et permet de considérer l'opérateur bord

$$\partial: \pi_2 \Sigma_0 \rightarrow \pi_1 f^{-1}(x_0)$$

comme un morphisme de  $\pi_2(\Sigma_0)$  dans  $\mathcal{R}$ . Soit  $\phi$  l'homomorphisme d'Hurewicz de  $\pi_2(\Sigma_0)$  dans  $H_2(\Sigma_0, \mathbf{Z})$ .  $N_0 \rightarrow \Sigma_0$  est un  $\mathcal{F}$ -fibré principal (notations de 4.c). Il existe une connexion  $\theta$  à valeurs dans  $\mathcal{F}$  de courbure  $\tilde{\nu}$ . En explicitant  $\partial$ , on prouve, compte tenu des propriétés fonctorielles de  $\phi$  [37], [38].

**Proposition 5.2.**  $\iota \phi \circ \tilde{\nu} = \iota \partial$  où  $\iota$  désigne la  $\mathbf{Z}$ -transposition.

On se propose dans la suite de déterminer, quand  $\Sigma_0$  est simplement connexe compacte, les R.I.S.C., nécessairement sans holonomie, au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$ . On se donne  $\mathcal{R}$  groupe abélien libre isomorphe à  $\mathbf{Z}^k$  et, comme en 4.c, on pose  $\mathcal{R} \otimes \mathbf{R} = \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}/\mathcal{R} = \mathcal{I}$ .  $\mathcal{F}$  est isomorphe à  $T^k$ . Comme  $\pi_1(\Sigma_0) = 0$ ,  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}) = H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})$ . Soit  $\nu \in \text{Hom}(\mathcal{R}, H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}))$  et  $f_0: E(\Sigma_0) \rightarrow \Sigma_0$  un  $\mathcal{F}$ -fibré principal (unique à un isomorphisme près) de classe de Chern  $\nu$ . Soit  $\theta$  une  $\mathcal{F}$ -connexion sur  $f_0$ .

**Proposition 5.3.** Si  $\pi_1(\Sigma_0) = 0$ , les germes de R.I.S.C. au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  associés à  $\nu$  sont isomorphes au germe en  $E(\Sigma_0)$  de  $f: E(\Sigma_0) \times \mathcal{I}^* \rightarrow \Sigma_0 \times \mathcal{I}^*$  (où  $f = f_0 \times \text{Id}_{\mathcal{I}^*}$ ) muni de la 2-forme  $f_0^* \sigma_0 + d\langle p, \theta \rangle$ , et la structure symplectique du germe de  $E(\Sigma_0) \times \mathcal{I}^*$  est exacte si et seulement si  $[\sigma_0] \in \tilde{\nu}(\mathcal{I}^*)$ .

*Démonstration.* La première partie de la proposition résulte de la proposition 4.3 en prenant  $\sigma_0 + K\tilde{\nu}(p)$  comme extension de la forme symplectique des feuilles. La partie directe de la dernière partie découle de ce qu'il existe  $p_0 \in \mathcal{I}^*$  tel que  $\sigma_0 = K\tilde{\nu}(p_0) + d\alpha$  où  $\alpha$  est une 1-forme sur  $\Sigma_0$ . La réciproque se prouve par un calcul analogue à celui indiqué dans la démonstration de la proposition 5.2.

Tout revient donc à étudier  $\nu \in \text{Hom}(\mathcal{R}, H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z}))$  où  $\mathcal{R} \simeq \mathbf{Z}^k$  et où  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})$  est un  $\mathbf{Z}$ -module libre car  $\pi_1(\Sigma_0) = 0$ . Soit  $k_1$  le rang de  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})$  et  $r$  le rang de  $\nu$ . Il existe [4] une  $\mathbf{Z}$ -base de  $\mathcal{R}$  et une  $\mathbf{Z}$ -base de  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})$  telles que dans ces bases  $\nu$  s'identifie au morphisme

$$\mathbf{Z}^k = \mathbf{Z}^r \times \mathbf{Z}^{k-r} \rightarrow \mathbf{Z}^r \times \mathbf{Z}^{k_1-r} = \mathbf{Z}^{k_1}, \quad (X_1, X_2) \rightarrow (\rho(X_1), 0),$$

où  $\rho$  est le morphisme défini par

$$\rho(X_1) = \rho\left(\left(X_1^i\right)_{1 \leq i \leq r}\right) = \left(\left(\prod_{j=1}^i a_j\right) X_1^i\right)_{1 \leq i \leq r}$$

où les  $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$  sont  $r$  entiers non nuls.

Une R.I.S.C. au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  ( $\pi_1(\Sigma_0) = 0$ ) est donc caractérisée par un entier  $r$ ,  $r$  éléments  $[\Omega_i]$  d'une  $\mathbf{Z}$ -base de  $H^2(\Sigma_0, \mathbf{Z})$  et  $r$  entiers non nuls  $(a_i)$ . Si  $r$  et  $[\Omega_i]_{1 \leq i \leq r}$  sont donnés on note  $\nu(r)$  le morphisme correspondant à  $a_i \equiv 1$  ( $1 \leq i \leq r$ ). Afin de clarifier les relations entre la R.I.S.C. relative à  $\nu(r)$  et celle relative à  $\nu$ , on modifie le point de vue adopté jusqu'ici et on représente toutes les R.I.S.C. au-dessus du même germe  $P_{\nu(r)}$  ce qui conduit à associer à  $\nu$  le réseau  $\mathcal{R}_\nu$  qui, si  $\mathcal{R}_{\nu(r)}$  est le réseau  $\bigoplus_1^k \mathbf{Z} dp_i$  de  $\mathbf{R}^k$ , s'écrit:

$$\mathcal{R}_\nu = \bigoplus_1^r \mathbf{Z} \left( \prod_{j=1}^i a_j^{-1} \right) dp_i \bigoplus_{r+1}^k \mathbf{Z} dp_i.$$

On note  $\Gamma_\nu$  le groupe fini  $\mathbf{Z}_{a_1} \times \mathbf{Z}_{a_1 a_2} \times \dots \times \mathbf{Z}_{a_1 \dots a_r}$  que l'on considère comme sous-groupe de  $T^r$ .

Pour tout  $\nu$  on note  $M_\nu$  la R.I.S.C. associée fibrée au-dessus de  $P_{\nu(r)}$  et on note  $f_r: E_r(\Sigma_0) \rightarrow \Sigma_0$  un  $T^r$ -fibré principal au-dessus de  $\Sigma_0$  de classe de Chern  $([\Omega_i])_{1 \leq i \leq r}$ . La proposition 5.2 implique que  $\pi_1(E_r(\Sigma_0)) = 0$ ,  $\pi_2(E_r(\Sigma_0)) = \mathbf{Z}$  et de la proposition 5.3 on déduit que, en tant que germe,

$$M_{\nu(r)} \equiv E_r(\Sigma_0) \times \mathbf{R}^r \times T^*T^{k-r} \rightarrow \Sigma_0 \times \mathbf{R}^k$$

muni de la structure symplectique de forme:

$$\sigma_{\nu(r)} = f_r^* \sigma_0 + \sum_1^r d(p_i \theta^i) + d\lambda_{k-r}$$

où  $(\theta_i)$  est une  $T^r$ -connexion de courbure  $\Omega_i$ ,  $\mathbf{R}^k = \{(p_i)_{1 \leq i \leq k}\}$ , et  $\lambda_{k-r}$  est la 1-forme de Liouville de  $T^*T^{k-r}$ . Soit  $(\theta^i)$  par abus de notation la 1-forme sur  $E_r(\Sigma_0)/\Gamma_\nu$  déduite de  $(\theta^i)$  par passage au quotient.  $(\prod_{j=1}^i a_j) \theta^i$  est une connexion sur  $E_r(\Sigma_0)/\Gamma_\nu$  de courbure  $(\prod_{j=1}^i a_j) \Omega_j$  ce qui assure que

$$M_\nu \equiv (E_r(\Sigma_0)/\Gamma_\nu) \times \mathbf{R}^r \times T^*T^{k-r} \rightarrow \mathbf{R}^k$$

muni de la 2-forme  $f_r^* \sigma_0 + \sum_1^r d(p_i \theta^i) + d\lambda_{k-r}$ . En particulier  $M_{\nu(r)} \rightarrow M_\nu$  est un  $\Gamma_\nu$  revêtement symplectique.

Ces résultats peuvent être précisés si l'on suppose que  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  est une orbite régulière de la représentation coadjointe d'un groupe compact  $G_1$ , que l'on peut, sans perte de généralité, supposer semi-simple et simplement connexe, ce qui entraîne [13]  $\pi_2(G_1) = 0$ .  $\Sigma_0 = G_1/\mathcal{T}_1$  où  $\mathcal{T}_1$  est un tore maximal de  $G_1$ , et  $\pi_1 \Sigma_0 = 0$ . Les lettres soulignées désignant les algèbres de Lie des groupes correspondants  $\underline{\mathcal{T}}_1 = \underline{\mathcal{T}}_1/\mathcal{R}_1$  où  $\mathcal{R}_1$  est un réseau de  $\underline{\mathcal{T}}_1$ . Soit  $\mathcal{R}$  un groupe abélien libre de rang  $k$ ; on note  $\underline{\mathcal{T}} = \mathcal{R} \otimes \mathbf{R}$  et on appelle tore associé au réseau  $\mathcal{R}$  le tore  $\mathcal{T} = \mathcal{R} \otimes \mathbf{R}/\mathcal{R}$ .  $\pi_1(\mathcal{T})$  s'identifie canoniquement alors à  $\mathcal{R}$ . Soit  $\nu$  un homomorphisme de  $\mathcal{R}^*$  dans  $\mathcal{R}_1^*$  et  $\tilde{\nu}$  son extension par produit tensoriel par  $\mathbf{R}$ .  $\tilde{\nu}: \mathcal{T}^* \rightarrow \underline{\mathcal{T}}_1^*$ .  $\tilde{\nu}$  définit par passage au quotient un homomorphisme de groupes abéliens  $\rho: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}$  et on considère les deux suites exactes,

$$0 \rightarrow A \rightarrow \mathcal{T}_1 \xrightarrow{\rho} \mathcal{T} \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \underline{A} \rightarrow \underline{\mathcal{T}}_1 \xrightarrow{\tilde{\nu}} \underline{\mathcal{T}} \rightarrow \underline{Z} \rightarrow 0.$$

$A$  est le produit d'un groupe fini  $\Gamma_\nu$  par un tore de dimension  $k_1 - r$  où  $k_1$  est le rang de  $\mathcal{T}_1$  et  $r$  le rang de  $\nu$ . On identifie  $\underline{Z}$  avec un supplémentaire de  $\tilde{\nu}(\underline{\mathcal{T}}_1)$  dans  $\underline{\mathcal{T}}$  admettant la trace de  $\mathcal{R}$  comme réseau. On décompose ainsi  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}_r \times (\mathcal{R} \cap \underline{Z})$  ce qui identifie par  $\rho$ ,  $\mathcal{T}_1/A$  au tore associé à  $\mathcal{R}_r$ .  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  est l'orbite d'un point  $p_0$  de  $\underline{\mathcal{T}}_1^*$  que l'on identifie à  $\underline{Z}^\perp$ . Avec ces notations:

**Proposition 5.4.** *L'unique germe de R.I.S.C. au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  orbite régulière du groupe de Lie semi-simple compact simplement connexe  $G_1$ , de classe de Chern  $\nu$  est le germe de  $M(\nu): f: G_1/A \times \underline{Z}^\perp \times T^*Z \rightarrow G_1/\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}^*$  muni de la 2-forme  $d\langle p + p_0, \theta \rangle + d\lambda$  où  $\lambda$  est la forme de Liouville de  $T^*Z$ ,  $\theta$  l'image dans  $G_1/A$  de la  $\mathcal{T}_1$ -connexion  $G_1$  invariante canonique de  $G_1 \rightarrow G_1/\mathcal{T}_1$ ,  $p \in \underline{Z}^\perp$ .*

*Démonstration.* Compte tenu de l'identification  $\mathcal{T}^* = \underline{Z}^\perp \oplus \underline{Z}^*$ , la seule chose à prouver est que  $G_1/A \rightarrow G_1/\mathcal{T}_1$  a comme classe de Chern considérée comme application de  $\mathcal{R}_r^*$  dans  $\mathcal{R}_1^*$  l'application  $\nu$ . Comme  $\pi_1(\Sigma_0) = 0$ , compte tenu de la proposition 5.2, tout revient à prouver que l'opérateur bord  $\partial: \pi_2(G_1/\mathcal{T}_1) \rightarrow \pi_1(\mathcal{T}_1/A)$  est le transposé de  $\nu$ . Par construction même les isomorphismes  $\pi_2(G_1/\mathcal{T}_1) = \pi_1(\mathcal{T}_1) = \mathcal{R}_1$  et  $\pi_1(\mathcal{T}_1/A) = \mathcal{R}_r$  assurent que  $\partial$  se transporte en l'application canonique de  $\pi_1(\mathcal{T}_1)$  dans  $\pi_1(\mathcal{T}_1/A)$  elle-même se transportant alors sur  $\tilde{\nu}: \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_r \subset \mathcal{R}$ , ce qu'il fallait prouver.

Les résultats sont plus agréables encore si l'on suppose que  $\tilde{\nu}: \mathcal{T}^* \rightarrow \underline{\mathcal{T}}_1^*$  est surjective. Dans ce cas  $A$  est un groupe discret compact abélien et, comme on l'a vu plus haut, il suffit, à un revêtement fini près, d'examiner le cas où  $A$

est réduit à l'identité, i.e. supposer que  $\nu: \mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}_1^*$  est surjective et  $\nu = \nu(k_1)$ . La R.I.S.C. au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  est le germe de

$$M\nu(k_1): f: G_1 \times \underline{Z}^\perp \times T^*Z \rightarrow G_1/\mathcal{T}_1 \times \underline{\mathcal{T}}^*$$

muni de la 2-forme  $\sigma = d\langle p_0 + p, \theta_1 \rangle + d\lambda$  où  $\theta_1$  est la connexion canonique  $G_1$  invariante du  $\mathcal{T}_1$  fibré principal  $G_1 \rightarrow G_1/\mathcal{T}_1$ ,  $p \in Z^\perp$ .

Soit  $G_c = G_1 \times Z$ . Si  $\theta$  est la 1-forme invariante à gauche de  $G_c$  définie par  $\theta|_{G_c} = -\text{Id}$ ,  $M(\nu(k_1), \sigma)$  est le germe de

$$\begin{aligned} G_c \times \underline{\mathcal{T}}^* &\rightarrow G_c/\mathcal{T} \times \underline{\mathcal{T}}^*, \\ \sigma &= d\langle p + p_0, \theta \rangle, \quad p \in \mathcal{T}^*. \end{aligned}$$

Le signe est choisi de façon que  $d\theta(X, Y) = [X, Y]$ .

On sait [26] que l'application  $\varphi: G_c/\mathcal{T} \times C \rightarrow \mathcal{U}$  ouvert des points réguliers de  $\underline{G}_c$  définie par

$$\varphi(gx_0, \lambda) = \text{ad}_g^* \lambda$$

où  $C$  est une chambre de Weyl de  $\mathcal{T}$  (considérée dans  $\mathcal{G}^*$ ) et  $x_0$  la projection de l'identité, est un difféomorphisme. Le calcul précédent montre que l'on peut choisir pour représentant de la R.I.S.C. associée à  $\nu(k_1)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}: G_c \times C \rightarrow \mathcal{U} \\ (g, p) \rightarrow \text{ad}_g^* p \end{array} \right.$$

muni de la 2-forme exacte  $d\langle p, \theta \rangle$ .

**Définition 5.3.** ( $\mathcal{I}: G_c \times C \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $d\langle p, \theta \rangle$ ) est la  $\nu(k_1)$ -R.I.S.C. standard de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$ .

Il est immédiat de vérifier que  $G_c$  agit sur  $(G_c \times C, d\langle p, \theta \rangle)$  comme groupe d'action coisotrope hamiltonienne de moment  $\mathcal{I}$ .

**Théorème 5.2.** Si  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  est une orbite régulière d'un groupe de Lie semi-simple compact simplement connexe  $G_1$ , les R.I.S.C. au-dessus de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  de classe de Chern  $\nu$  de rang  $k_1$  deuxième nombre de Betti de  $\Sigma_0$  sont isomorphes à la R.I.S.C. standard d'un groupe compact  $G_c$ , produit direct de  $G_1$  par un tore, quotientée par un sous-groupe discret abélien compact de  $G_1$ .

La seule donnée de  $(\Sigma_0, \sigma_0)$  orbite de  $G_1$  permet donc dans le cas où  $\nu$  est de rang  $k$ , de reconstruire la R.I.S.C. au-dessus de  $\Sigma_0$  de classe de Chern  $\nu$  comme action localement libre coisotrope d'un groupe compact  $G_c$ , d'isotropie abélienne finie fixée; cette action est de plus hamiltonienne. On est ainsi dans la situation de l'exemple 2, §2.

Inversement ce théorème va permettre d'obtenir dans certaines conditions des modèles d'actions coisotropes.

**Corollaire.** Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie compacte  $\underline{G}$ . On suppose que  $G$  agit sur  $(M, \sigma)$  de façon coïsothrope localement libre de moment  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Soit  $\tilde{\Sigma}_0$  une orbite compacte de  $G$  telle que  $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\Sigma}_0)$  soit une orbite régulière. Alors il existe un voisinage  $W(\tilde{\Sigma}_0)$  et une forme compacte  $G_c$  de  $\underline{G}$  telle que

(i)  $W(\tilde{\Sigma}_0)$  est munie d'une action coïsothrope hamiltonienne localement libre de  $G_c$  de mêmes orbites, d'isotropie fixée  $A$  sous-groupe abélien discret compact de  $G_c$ ,

(ii) il existe un difféomorphisme  $G_c$  équivariant de  $W(\tilde{\Sigma}_0)$  sur un ouvert du quotient par  $A$  de la R.I.S.C. standard de  $G_c$ .

*Démonstration.* Comme  $\tilde{\Sigma}_0$  est simplement connexe, que  $\mathcal{F}$  est une submersion puisque  $G$  agit de façon localement libre,  $\tilde{\Sigma}_0$  est une feuille compacte sans holonomie ce qui permet [21], [35] de construire un voisinage  $W(\tilde{\Sigma}_0)$  tel que  $(W(\tilde{\Sigma}_0), \mathcal{F})$  soit une fibration isotrope symplectiquement complète sans monodromie. Tout revient alors à prouver, compte tenu de la proposition 5.2 que  $\partial: \pi_2(\tilde{\Sigma}_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}^{-1}(x_0))$  où  $x_0 \in \tilde{\Sigma}_0$ , est injectif ce qui va résulter de ce que  $\pi_2(\tilde{\Sigma}_0) = 0$ . On ne change rien au problème en remplaçant  $G$  par son revêtement universel, ce qui permet alors [13] de supposer  $\pi_2(G) = 0$ . Comme  $\tilde{\Sigma}_0$  est un quotient de  $G$  par un groupe discret il en résulte que  $\pi_2(\tilde{\Sigma}_0) = 0$  ce qui achève la démonstration.

**Remarques.** 1. Ce corollaire résout un problème posé par Abraham et Marsden [1] (cf. [7] également): On a réussi à déformer l'action de  $G$  au voisinage de  $\tilde{\Sigma}_0$  en l'action (hamiltonienne) d'une forme compacte de  $\underline{G}$  dont l'isotropie a été fixée.

2. Plus généralement, le théorème 5.2 est une généralisation non commutative du théorème des variables actions angles d'Arnold [3], ce dernier correspondant au cas où  $\Sigma_0$  est réduit à un point!

3. Marle [27] et Nicolai [31] ont donné pour les actions hamiltoniennes de groupe des modèles locaux au voisinage d'une orbite  $V$  ou, avec les notations de cet article, au voisinage d'une feuille  $\tilde{\Sigma}$  de  $\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ . La différence avec le point de vue développé ici est qu'a priori on n'a pas d'action de groupe: en fait on la construit. Inversement si le feuilletage est donné par une action de groupe d'algèbre de Lie compacte, le corollaire précédent assure qu'on peut "déformer" l'action du groupe en l'action d'un groupe compact. On retrouve dans ce cas là les modèles locaux fournis par Marle et Nicolai.

4. Si  $\Sigma_0$  est une orbite régulière de la représentation coadjointe et si  $\tilde{\nu}$  est surjectif les résultats précédents entraînent en particulier que la variété de Poisson  $(P_{\tilde{\nu}}, \Lambda_{\tilde{\nu}})$  est linéarisable, puisque isomorphe à  $\underline{G}^*$ .

5. Si  $\Gamma$  est un groupe de Lie compact et connexe d'actions hamiltoniennes sur  $(\Sigma_0, \sigma_0)$ , l'action de  $\Gamma$  se prolonge naturellement (par produit) à  $(P_{\tilde{\nu}}, \Lambda_{\tilde{\nu}})$ :

en effet,  $\Gamma$  étant compact et connexe laisse invariant une métrique riemannienne sur  $\Sigma_0$  et les formes harmoniques qu'elle définit; il suffit alors de représenter  $\nu$  par des 2-formes harmoniques. Si de plus  $\Sigma_0$  est simplement connexe ou semi-simple, l'action de  $\Gamma$  sur  $P_{\bar{\nu}}$  admet un moment  $\tilde{J}: P_{\bar{\nu}} \rightarrow \underline{\Gamma}^*$ . Si  $(M, \sigma)$  est une R.I.S.C. au-dessus de  $\Sigma_0$ , on en déduit par composition un morphisme de Poisson  $\tilde{\mathcal{J}}: M \rightarrow \underline{\Gamma}^*$ , moment d'une action hamiltonienne du revêtement universel  $\tilde{\Gamma}$  de  $\Gamma$  pour lequel d'ailleurs  $f: M \rightarrow P_{\bar{\nu}}$  est équivariante. Le cas étudié à la fin du paragraphe  $V$  est celui où  $\Gamma = G$  est transitif sur  $\Sigma_0$ .

### References

- [1] R. Abraham & J. E. Marsen, *Foundations of mechanics*, 2e ed., Benjamin, Reading, MA, 1978.
- [2] C. Albert, *Some properties of k-flat manifolds*, J. Differential Geometry **11** (1976) 103–128.
- [3] V. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Traduction française, MIR, Moscou, 1976.
- [4] N. Bourbaki, *Algèbre*, Hermann, Paris, Chapitre VII.
- [5] P. Dazord, *Sur la géométrie des sous fibrés et feuilletages lagrangiens*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1981) 465–480.
- [6] ———, *Feuilletages en géométrie symplectique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. **294** (1982) 489–491.
- [7] ———, *Feuilletage et mécanique hamiltonienne*, Publ. Dép. Math. Lyon, 1983, 3 et 3B.
- [8] ———, *Holonomie des feuilletages singuliers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **298** (1984).
- [9] ———, *Feuilletages à singularités*, Indag. Math. **47** (1985) 21–39.
- [10] ———, *Stabilité et linéarisation dans les variétés de Poisson*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie (J. C. Dufour, éd.), Travaux en Cours, Hermann, Paris.
- [11] P. Dazord & T. Delzant, *Classes de Chern de certaines fibrations isotropes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **300** (1985) pp. 137–140.
- [12] T. Delzant, *Sur certaines fibrations des variétés symplectiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984) 883–886.
- [13] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, Tome IX, Gauthier-Villars, Paris.
- [14] J. J. Duistermaat, *On global action angle coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 687–706.
- [15] J. J. Duistermaat & G. J. Heckmann, *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, Invent. Math. **69** (1983) 259–268.
- [16] H. Fomenko & A. Mischenko, *Generalized Liouville method of integration of hamiltonian system*, Functional Anal. Appl. **12** (1978) 113–121.
- [17] R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris.
- [18] M. Gotay, R. Lashof, J. Sniatcky & A. Weinstein, *Closed torus on symplectic fiber bundles*, Comment. Math. Helv. **58** (1985) 617–621.
- [19] A. Grothendieck, *A general theory of fibre bundles with structure sheaf*, 2<sup>e</sup> ed., University of Kansas, Lansing, Kansas, 1958.
- [20] V. Guillemin & S. Sternberg, *Geometric asymptotics*, Math. Surveys, No. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
- [21] A. Haefliger, *Variétés feuilletées*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **16** (1962) 367–397.
- [22] B. Kostant, *Quantization and unitary representations, Part I: Prequantization*, Lecture Notes in Math., Vol. 170, Springer, Berlin, 1970, 87–208.
- [23] P. Libermann, *Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique*, 3<sup>e</sup>me rencontre de Géométrie du Schnepfeuried, Asterisque n° 107/108, Soc. Math. France, Paris. [1982]

- [24] P. Libermann & C. M. Marle, *Géométrie symplectique: Base théorique de la mécanique*, Publ. Math. Univ. Paris VII, à paraître.
- [25] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry **12** (1977) 253–300.
- [26] O. Loos, *Symmetric spaces*, 2 volumes, Benjamin, New York, 1969.
- [27] C. M. Marle, *Sous-variétés de rang coestant et sous-variétés symplectiquement régulières d'une variété symplectique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, Math. **295** (1982) 119–122.
- [28] ———, *Classification des actions hamiltoniennes au voisinage d'une orbite*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984).
- [29] ———, *Modèle d'action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur une variété symplectique*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, à paraître.
- [30] P. Molino, *Geometrie globale des feuilletages riemanniens*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **85** (1982) 45–76.
- [31] R. Nicolai, *Action libre et hamiltonienne d'un groupe compact dans une variété symplectique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983) 985–987.
- [32] ———, *Modèle d'action libre et hamiltonienne d'un groupe de Lie compact connexe sur une variété symplectique*, Thèse 3ème cycle, 1984, Université Paris VI.
- [33] N. N. Nekhoroshev, *Action-angle variables and their generalizations*, Trans. Moscow Math. Soc. **26** (1972) 180–198.
- [34] R. S. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 22, 1957.
- [35] G. Reeb, *Sur certaines propriétés des variétés feuilletées*, Hermann, Paris, 1952.
- [36] J. M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1969.
- [37] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [38] N. Steenrod, *The topology of fiber bundles*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1951.
- [39] P. Stefan, *Accessibility and foliations with singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974) 1142–1145.
- [40] H. J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973) 171–188.
- [41] I. Vaisman, *Cohomology and differential forms*, Monographs & Textbooks in Pure Appl. Math., Marcel Dekker, New York.
- [42] A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Advances in Math. **6** (1971) 329–346.
- [43] ———, *Lectures on symplectic manifolds*, Conferences Series CBMS Regional Conf. Ser. Math., No. 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979.
- [44] ———, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Differential Geometry **18** (1983) 523–557.
- [45] N. Woodhouse, *Geometric quantization*, Clarendon Press, Oxford, 1980.
- [46] M. V. Karasev & V. P. Maslov, *Asymptotic and geometric quantization*, Russian Math. Surveys **39** (1984) No. 6, 133–205.

