J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
22 (1985) 49–79

POINTS FIXES D'UNE APPLICATION SYMPLECTIQUE HOMOLOGUE A L'IDENTITE

JEAN-CLAUDE SIKORAV

0. Introduction–énoncé du résultat et de la démonstration

Dans ce travail, toutes les variétés (de dimension finie ou non) et les applications seront de classe C^∞. On considère une variété symplectique fermée (M, σ) munie d'un automorphisme φ. Suivant V. I. Arnold [2, p. 427], on dit que φ est homologue à l'identité s'il s'obtient en intégrant un champ de vecteurs hamiltonien dépendant du temps. De façon explicite, il existe h_t: $M \to \mathbf{R}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, chemin lisse dans $C^\infty(M, \mathbf{R})$, tel que, si l'on définit $\varphi_t \in \operatorname{Diff} M$ par:

$$\varphi_0 = \mathrm{id}, \qquad \dot{\varphi}_t = X_{h_t} \circ \varphi_t,$$

où X_h est le gradient symplectique de $h \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, on ait $\varphi_1 = \varphi$. Arnold (ibid.) remarque que si φ est C^1-proche de id, alors il admet une "fonction génératrice" S: $M \to \mathbf{R}$ telle qu'en particulier les points fixes de φ soient les points critiques de S. Donc, φ a au moins autant de points fixes qu'une fonction sur M a de points critiques. On peut se demander si c'est encore vrai sans l'hypothèse de C^1-proximité: c'est ce que conjecture Arnold dans [1] et [3].

Une percée décisive sur cette question est intervenue en 1982–83: C. C. Conley et E. Zehnder [9] prouvent que tout automorphisme de $(T^{2n}$, standard), homologue à l'identité, a au moins $2n + 1$ points fixes, ce qui prouve dans ce cas la conjecture d'Arnold. Leur méthode a été ensuite utilisée par A. Weinstein [23] pour le cas où φ est C^0-proche de id, par B. Fortune et A. Weinstein [12] pour $(M, \sigma) = (\mathbf{CP}^n$, standard), et par M. Chaperon [8] pour minorer le nombre de points d'intersection avec la section nulle de certains plongements lagrangiens $V \to T^*V$, V étant une variété riemannienne plate.

Received January 8, 1985.

Tous ces résultats donnent des minorations utilisant la notion de "cup-length" que nous allons maintenant définir: X étant un espace topologique, on désigne par $\mathrm{CL}(X)$ le plus grand entier l tel qu'il existe un anneau A et des classes de cohomologie $\omega_1, \cdots, \omega_l \in \tilde{H}^*(X; A)$; vérifiant $\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_l \neq 0$. La théorie de Lusternik-Schnirelmann dit que si X est une variété fermée, alors toute fonction sur X a au moins $\mathrm{CL}(X) + 1$ points critiques. D'autre part, il est aisé de voir que ce minorant est optimal si $X = T^{2n}$ ($\to 2n+1$), $X =$ surface de genre g ($\to 2$ si $g = 0$, 3 si $g \geqslant 1$), ou $X = \mathbf{CP}^n$ ($\to n+1$).

Nous allons faire sur (M, σ) les hypothèses suivantes:

(H1) Il exists sur M une métrique riemannienne, notée $\langle\ ,\ \rangle$, de courbure sectionnelle $\leqslant 0$ et "adaptée à σ" au sens suivant: on a $\sigma(X, Y) = \langle \mathscr{J}X, Y\rangle$, où $\mathscr{J}$: $TM \to TM$ est une structure presque complexe ($\mathscr{J}^2 = -\mathrm{id}$) et une isométrie. (D'après [21], il y a toujours une métrique adaptée à σ, mais évidemment pas toujours une à courbure $\leqslant 0$.)

Le gradient symplectique est alors relié au gradient métrique par $X_h = \mathscr{J}\nabla h$.

(H2) Si $p \in M$ et $X, Y \in T_pM$, et si l'on note $(d \exp_p)_X$: $T_pM \to T_{\exp_p X}M$ la différentielle de $\exp_p$ au point X, on a l'inégalité:

$$\left\langle \mathscr{J}(d \exp_p)_X(Y), (d \exp_p)_X(\mathscr{J}Y)\right\rangle \geqslant \alpha|Y|^2, \qquad \alpha \text{ constante} > 0.$$

De façon équivalente, en notant $(\exp_p^* \sigma)_X$ la valeur en X de la 2-forme $\exp_p^* \sigma$ sur T_pM:

$$\left(\exp_p^* \sigma\right)_X(Y, \mathscr{J}Y) \geqslant \alpha|Y|^2 = \alpha\sigma(Y, \mathscr{J}Y).$$

La classe des variétés vérifiant (H1) et (H2) est stable par produits et quotients et contient par exemple:

–les surfaces de genre $\geqslant 1$: en effet d'après Moser [16], il n'y a, à isotopie près, qu'une seule forme symplectique (= forme-volume) à volume total donné, donc il y a toujours une métrique adaptée de courbure constante $\leqslant 0$. L'application $\exp_p$: $T_pM \to M$ augmente alors le volume, donc (H2) est satisfaite avec $\alpha = 1$ (et égalité bien sûr dans le cas plat);

–les variétés kählériennes compactes de courbure holomorphe constante < 0, c'est-à-dire les quotients compacts de l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}^n_{\mathbf{C}}$: on sait qu'il en existe pour tout n (cf. [15, p. 121]), ce qui donne un exemple qu'on ne peut obtenir à partir des surfaces;

–plus généralement, les quotients compacts des espaces symétriques hermitiens de type non compact.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat.

Théorème. *Soit* (M, σ) *une variété symplectique fermée vérifiant* (H1) *et* (H2). *Alors, tout automorphisme homologue à l'identité a au moins* $\mathrm{CL}(M) + 1$ *points fixes.*

Corollaire. *La conjecture d'Arnold est vraie si* M *est une surface de genre* $g \geqslant 1$.

Remarque. Le cas $g = 0$ est prouvé dans [20], [17], et $g = 1$ est un cas particulier de [9]. D'autre part, Ya M. Eliashberg [10] donne une preuve de ce corollaire mais par une méthode géométrique très délicate.

Notre démonstration utilise elle aussi la méthode de [9]. Donnons-en maintenant un résumé.

1. Problème variationnel. Par le principe de moindre action de Hamilton-Jacobi on montre qu'il suffit de minorer le nombre des points critiques d'une fonction $S\colon \Lambda \to \mathbf{R}$, où Λ est la variété hilbertienne des H^1-lacets $c\colon S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to M$ homotopes à zéro. On a:

$$S(c) = A(c) - \int_0^1 h_t(c(t))\, dt,$$

où A est l'action "non perturbée"

$$\left(A(c) = \int_c p\, dq \quad \text{si } M = T^*\mathbf{R}^n \right).$$

2. Centre de gravité d'un lacet et description de Λ comme fibré sur M. Le fait que la courbure est $\leqslant 0$ implique que tout lacet $c \in \Lambda$ s'écrit de façon unique $c(t) = \exp_p a(t)$, avec $a \in H^1(T_pM)$ et $\int_0^1 a(t)\, dt = 0$. Ceci définit un difféomorphisme de Λ sur un fibré L en espaces de Hilbert sur M. On obtient donc deux fonctions $\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$: $L \to \mathbf{R}$, $\mathscr{S}$ étant une "perturbation" de $\mathscr{A}$, et l'on veut minorer le numbre de points critiques de $\mathscr{S}$.

3. Champ de quasi-gradient. On définit un champ de vecteurs Z sur L vérifiant

(QG1) $d\mathscr{S}(Z) > 0$ hors des points critiques de $\mathscr{S}$.

(QG2) Z a pour zéros ces points critiques

(autrement dit, $\mathscr{S}$ est une fonction de Liapounoff pour Z).

La propriété (QG1) est une conséquence de la condition (H2).

On compare ensuite Z et le champ "non perturbé"-$\mathscr{J}\dot{a}$ (inégalité (3.2) et proposition 4), ce qui servira en 4. Enfin, on donne des inégalités supplémentaires (3.4) à (3.7) qui serviront en 5.

4. Réduction à la dimension finie (début). Utilisant la décomposition en série de Fourier dans $H^r(T_pM)$ $(r = 0, 1)$, on écrit l'équation "annulant les harmoniques d'ordre $> N$" de $Z(a)$: comme dans [9], on peut la mettre sous la forme $a_N^\perp = \varphi_N(a_N + a_N^\perp)$, où $a = a_N + a_N^\perp$ est la décomposition de $a \in L$ en harmoniques $\leqslant$ et $> N$. Par un théorème de point fixe pour une contraction, on paramètre les solutions par a_N, élément du sous-fibré de dimension finie $L_N \subset L$ (Proposition 5); mais à la différence de [9], on n'a pas de contraction globale, ce qui fait que le résultat n'est prouvé que pour les solutions qui vérifient de plus une inégalité du type $\|a_N\|_\infty < \operatorname{Log} N/R$, R constante dépendant de la métrique. On note $U_N \subset L_N$ le fibré en boules ainsi défini.

5. Réduction à la dimension finie (fin). On définit sur U_N une fonction $\mathscr{S}_N$ et un champ Z_N, et on prouve une minoration de $d\mathscr{S}_N(Z_N)$ (inégalité 5.2) qui implique en particulier que les points critiques de $\mathscr{S}_N$ sont en bijection avec ceux de $\mathscr{S}$ et que Z_N est de quasi-gradient pour $\mathscr{S}_N$. Ensuite, on prouve des inégalités ((5.4) à (5.8)) comparent $\mathscr{S}_N$ et $\mathscr{A}_N$, la restriction à L_N de la fonctionnelle "non perturbée" $\mathscr{A}$. Cette dernière fonction a pour points critiques l'image de la section nulle $M \to L_N$, qui est une variété non dégénérée au sens de Bott.

6. Minoration du nombre de points critiques en dimension finie. Dans cette dernière partie, on utilise les propriétés de $\mathscr{S}_N$, Z_N démontrées en 5. pour construire une paire (v, v^-) analogue au "bloc isolant" de [9]. Par la méthode de Lusternik-Schnirelmann, on en déduit la minoration cherchée du nombre de points critiques de $\mathscr{S}_N$, ce qui prouve le théorème.

Une version abrégée de ce travail est parue aux C. R. A. S. [19].

Alors que je mettais la dernière main à la présente version, j'ai pris connaissance d'une prépublication de A. Floer [11] sur le même sujet. Précisément, celui-ci démontre le même théorème avec deux différences dans les hypothèses:

- La variété M est kählérienne, c'est-à-dire que $\mathscr{J}$ est intégrable;
- La condition (H2) est remplacée par:

(H′2) Les groupes d'holonomie de la connexion de Levi-Civita sur $\tilde{M}$ sont abéliens.

A l'aide d'un théorème de De Rham [15, Vol. I, p. 192 et Vol. II, p. 172], on peut montrer que les seules variétés satisfaisant à ces hypothèses sont obtenues par produits et quotients à partir des surfaces.

Je remercie F. Laudenbach pour avoir attiré mon attention vers ce sujet et pour l'aide et les conseils qu'il n'a cessé de m'apporter tout au long de ce

travail. Parmi les nombreuses personnes dont les remarques m'ont été profitables, je remercie particulièrement D. Bennequin, M. Chaperon et A. Fathi.

1. Problème variationnel

Dans cette partie, on utilise les résultats de ([14, Chapitre 1]) sur la variété $H^1(S, M)$ des H^1-lacets; la variété Λ définie dans l'introduction est la composante connexe des lacets constants. L'espace tangent $T_c\Lambda$ s'identifie à $H^1(c^*TM) = \{$champs de vecteurs de classe H^1 le long de $c\}$, espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par:

$$(X, Y)_1 = \int_0^1 \langle X(t), Y(t) \rangle \, dt + \int_0^1 \langle \nabla_c X(t), \nabla_c Y(t) \rangle \, dt,$$

où $\nabla_c X$ désigne la dérivée covariante le long de c (définie presque partout).

On notera $\hat{T}_c\Lambda = H^0(c^*TM) =$ complété de $T_c\Lambda$ pour le produit scalaire

$$(X, Y)_0 = \int_0^1 \langle X(t), Y(t) \rangle \, dt.$$

La réunion des $\hat{T}_c\Lambda$ donne un fibré hilbertien $\hat{T}\Lambda$ (noté α^0 dans [14]). Par abus de langage, les sections de $\hat{T}\Lambda$ seront appelées champs de vecteurs sur Λ.

Action. (cf. [22, p. 236–237]). Soit $c \in \Lambda$, on choisit un relèvement $\tilde{c}$: $S^1 \to \tilde{M}$ (revêtement universel). Comme $\tilde{M} \approx \mathbf{R}^{2n}$ à cause de la courbure $\leqslant 0$, la forme symplectique relevée $\tilde{\sigma}$ admet une primitive λ, et l'on pose: $A(c) = \int_{\tilde{c}} \lambda$. Pour voir que ceci est bien défini, choisissons une extension $\bar{\tilde{c}}$: $D^2 \to \tilde{M}$ de $\tilde{c}$; alors par Stokes, on a: $\int_{\tilde{c}} \lambda = \int_{\bar{\tilde{c}}} \tilde{\sigma}$ ce qui prouve l'indépendance par rapport au choix de λ. De plus, soit $\tau \circ \tilde{c}$, $\tau \in \pi_1(M) = \mathrm{Aut}(\tilde{M}/M)$ un autre relèvement de c; alors:

$$\int_{\tau \circ \tilde{c}} \lambda = \int_{\tau \circ \bar{\tilde{c}}} \tilde{\sigma} = \int_{\tilde{c}} \tau^* \tilde{\sigma} = \int_{\bar{\tilde{c}}} \tilde{\sigma} \quad \text{car } \tau^* \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma};$$

d'où l'indépendance par rapport au choix du relèvement.

Posant ensuite $S(c) = A(c) - \int_0^1 h_t(c(t)) \, dt$, on définit ainsi une fonction C^∞ de Λ dans $\mathbf{R}$, et l'on a:

$$dS(X) = (\nabla S(c), X)_0, \qquad X \in T_c\Lambda, \tag{0.1}$$

$$\nabla S(c) = -\mathscr{J}\dot{c} - (\nabla h_t \circ c(t)) \in \hat{T}_c\Lambda. \tag{0.2}$$

L'application ∇S ("gradient de S") est un champ de vecteurs C^∞ sur Λ.

Un point critique de S est donc un lacet c tel que $\nabla S(c) = 0$, soit $\dot{c} = (\mathcal{J} \nabla h_t \circ c(t)) = (X_{h_t} \circ c(t))$: cela équivaut à la donnée de $p = c(0)$, point fixe de φ_1 tel que $(t \mapsto \varphi_t(p))$ est homotope à zéro. Donc, pour prouver le théorème, il suffit de minorer le nombre de points critiques de S.

Remarque importante. L'égalité (0.1) permet de définir $dS(X)$ pour $X \in \hat{T}_c\Lambda$.

2. Centre de gravité d'un lacet et description de Λ comme fibré sur M.

Dans cette section, nous travaillerons pour simplifier avec $\tilde{M}$ plutôt que M; en particulier, Λ désignera l'espace des lacets c: $S^1 \to \tilde{M}$ de classe H^1. Comme tout ce que nous dirons sera invariant par $\pi_1(M)$, les résultats obtenus passeront immédiatement au quotient.

Préliminaires. Inégalités sur l'application exponentielle (voir Appendice).

La courbure étant $\leqslant 0$, l'application $\exp_p$ est un difféomorphisme de $T_p\tilde{M}$ sur $\tilde{M}$. On notera E: $\tilde{M} \times \tilde{M} \to T\tilde{M}$ l'appliction définie par $E(p,q) = \exp_p^{-1} q$. La dérivée covariante en p du champ de vecteurs $E(\cdot, q)$ est un endomorphisme de $T_p\tilde{M}$ noté $D_1E(p,q)$. De même, la différentielle en q de l'application partielle $E(p, \cdot) = \exp_p^{-1}$: $\tilde{M} \to T_p\tilde{M}$ est un élément de $\mathrm{Hom}(T_q\tilde{M}, T_p\tilde{M})$ noté $d_2e(p,q)$. On note $\lambda = \max_M\sqrt{|K|}$, K courbure sectionnelle, et $r = d(p,q)$.

On a alors les propriétés:

(E1) $D_1E(p,q)$ est symétrique et $1 \leqslant -D_1E(p,q) \leqslant 1 + \lambda r$ (c'est-à-dire: $|X|^2 \leqslant -\langle D_1E \cdot X, X\rangle \leqslant (1+\lambda r)|X|^2$);

(E2) $\|d_2E(p,q)\| \leqslant 1$ ("$\exp_p^{-1}$ diminue les distances");

(E3) $\|[d_2E(p,q)]^{-1}\| \leqslant \operatorname{sh}\lambda r/\lambda r$.

Ensuite, soit c: $S^1 \to \tilde{M}$ un élément de Λ. D'après un résultat de H. Karcher [13] qui remonte à E. Cartan [7, p, 267], cf. aussi [15, p. 109], comme la courbure est $\leqslant 0$, que c est continu et S^1 compact, il existe un unique $p \in \tilde{M}$, appelé centre de gravité de c, tel que

$$\int_0^1 E(p, c(t))\, dt = 0.$$

Nous le noterons $\gamma(c)$. (Esquissons la preuve de ce résultat: pour q fixé, la fonction $p \mapsto \varphi_q(p) = \frac{1}{2}d(p,q)^2$ est propre et strictement convexe, donc il en est de même pour

$$\varphi_c\colon p \mapsto \int_0^1 \frac{1}{2}d(p, c(t))^2\, dt.$$

La fonction φ_c a donc pour seul point critique son minimum absolu: c'est le point cherché car on a

$$\nabla\varphi_q(p) = -E(p,q), \text{ d'où } \nabla\varphi_c(p) = -\int_0^1 E(p,c(t))\,dt.)$$

Proposition 1. *L'application* $\gamma\colon \Lambda \to \tilde{M}$ *est* C^∞.

Démonstration. Par définition, γ est donnée par l'équation implicité $E_0(\gamma(c), c) = 0$, où $E_0\colon \tilde{M} \times \Lambda \to T\tilde{M}$ est définie par

$$E_0(p,c) = [E(p,c)] \overset{\text{déf}}{=} \int_0^1 E(p,c(t))\,dt.$$

La différentielle en c de l'application partielle $E_0(p,\cdot)\colon \Lambda \to \tilde{M}$ est alors égale à la moyenne $[d_2E(p,c)]_0$ définie par:

$$[d_2E(p,c)]_0 \cdot X = \int_0^1 d_2E(p,c(t)) \cdot X(t)\,dt, \qquad X \in T_c\Lambda = H^1(c^*T\Lambda).$$

De même, la dérivée covariante en p du champ de vecteurs $E_0(\cdot,c)$ est égale à

$$[D_1E(p,c)]_0 \overset{\text{déf}}{=} \int_0^1 D_1E(p,c(t))\,dt \in \operatorname{End} T_p\tilde{M}.$$

D'après (E1), $D_1E(p,q)$ est un endomorphimse symétrique $\leqslant -1$ de $T_p\tilde{M}$: il en est donc de même de $[D_1E(p,c)]_0$. En particulier, cet opérateur est inversible et le théorème des fonctions implicites entraîne la proposition. L'application tangente $T_c\gamma \in \operatorname{Hom}(T_c\Lambda, T_{\gamma(c)}\tilde{M})$ est donnée par:

$$T_c\gamma = -[D_1E(\gamma(c),c)_0]^{-1} \circ [d_2E(\gamma(c),c)]_0.$$

En utilisant (E1) et (E2), on voit que $T_c\gamma$ s'étend en une application linéaire continue $\hat{T}_c\gamma\colon \hat{T}_c\Lambda \to T_{\gamma(c)}\tilde{M}$, vérifiant:

$$\|\hat{T}_c\gamma\| \leqslant 1. \tag{2.1}$$

Nous avons besoin maintenant d'introduire quelques définitions.

Définitions. Soit H^r ($r = 0,1$) le fibré sur $\tilde{M}$ en espaces de Hilbert, associé à $T\tilde{M}$, tel que $H_p^r = H^r(T_pM) = \{a\colon S^1 \to T_pM \text{ de classe } H^r\}$. Les produits scalaires sont donnés par:

$$(a,b)_0 = \int_0^1 \langle a(t), b(t)\rangle\,dt, \qquad (a,b)_1 = (a,b)_0 + (\dot{a},\dot{b})_0.$$

Comme H^0 est associé à $T\tilde{M}$, il est muni d'une connexion canonique pour laquelle H^1 est totalement géodésique. On en déduit des métriques hilbertiennes $(\ ,\ )_0$ et $(\ ,\ )_1$ sur TH^0 et TH^1. Notons L^0 le sous-fibré totalement géodésique de H^0 défini par la condition $\int_0^1 a(t)\,dt = 0$, et $L = H^1 \cap L^0$ le sous-fibré de H^1 correspondant. Définissons $e\colon L \to \Lambda$, $a \in L_p \mapsto \exp_p a$. Alors, l'existence et l'unicité du centre de gravité, jointes à la proposition 1, traduisent le fait que e est un C^∞-difféomorphisme de L sur Λ, son inverse étant donné par $e^{-1}(c) = E(\gamma(c), c)$. Dans la suite, un élément c de Λ sera toujours donné sous la forme $c = e(a)$, $a \in L_{\gamma(c)}$.

Soit $c = e(a) \in \Lambda$, notons Δ_c l'application linéaire de $H^0_{\gamma(c)}$ dans $\hat{T}_c\Lambda$ donné par $\Delta_c(X)(t) = [d\exp_{\gamma(c)}]_{a(t)} \cdot X(t)$, soit en abrégé $\Delta_c = [d\exp_{\gamma(c)}]_a = [d_2E(\gamma(c), c)]^{-1}$. On a évidemment $\Delta_c(\dot{a}) = \dot{c}$, et d'autre part les inégalités (E2) et (E3) entraînent:

(2.2) $$\|\Delta_c\| \leqslant \frac{\operatorname{sh}(\lambda\|a\|_\infty)}{\lambda\|a\|_\infty}, \qquad \|a\|_\infty = \max_t |a(t)|;$$

(2.3) Δ_c est un isomorphisme et $\|\Delta_c^{-1}\| \leqslant 1$.

Proposition 2. *Soit $c = e(a) \in \Lambda$. L'isomorphisme T_ae: $T_aL \to T_c\Lambda$ s'étend en un isomorphisme $\hat{T}_ae$: $T_aL^0 \to \hat{T}_c\Lambda$, d'inverse $\hat{T}_ce^{-1}$, vérifiant*:

(2.4) $$\|\hat{T}_ce^{-1}(X)\|_0 \leqslant (1 + \lambda\|a\|_0)\|\Delta_c^{-1}(X)\|_0;$$

(2.5) $$\|\hat{T}_ae\| \leqslant e^{\lambda\|a\|_\infty}.$$

Démonstration. Soit $X \in T_x\Lambda$: d'après l'égalité $e^{-1}(c) = E(\gamma(c), c)$, le vecteur $Z = T_ce^{-1}(X) \in T_aL$ a pour composantes horizontale et verticale:

$h(Z) = h(T_ce^{-1}(X)) = T_c\gamma(X) = -[D_1E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \circ [d_2E(\gamma(c), c)]_0 \cdot X$;

$v(Z) = v(T_ce^{-1}(X)) = D_1E(\gamma(c), c) \circ T_c\gamma(X) + d_2E(\gamma(c), c) \cdot X$.

Comme $d_2E(\gamma(c), c) = \Delta_c^{-1}$, on en déduit:

$$X = T_ae(Z) = \Delta_c(v(Z) - D_1E(\gamma(c), c) \cdot h(Z)).$$

Ces formules permettent de prolonger T_ae, T_ce^{-1} en $\hat{T}_ae$, $\hat{T}_ce^{-1}$. De plus, posant $\Delta_c^{-1}(X) = \xi = \xi_0 + \xi'$, il vient

(2.6) $$h(Z) = h(\hat{T}_ce^{-1}(X)) = -[D_1E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \cdot \xi_0.$$

$$v(Z) = v(\hat{T}_ce^{-1} \circ \Delta_c(\xi)) = \xi - D_1E(\gamma(c), c) \circ [D_1E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \cdot \xi_0.$$

D'après (E1), on a: $|h(Z)| \leqslant |\xi_0|$. D'autre part:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{id} &- D_1E(\gamma(c), c(t)) \circ [D_1E(\gamma(c), c)]_0^{-1}\| \\ &\leqslant \|D_1E(\gamma(c), c(t)) - [D_1E(\gamma(c), c)]_0\| \cdot \|[D_1E(\gamma(c), c)]_0^{-1}\| \\ &\leqslant \lambda|a(t)| \cdot 1 \quad \text{d'après (E1)}.\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité (2.4):

$$\begin{aligned}\|Z\|_0 &= \left[|h(Z)|^2 + \|v(Z)\|_0^2\right]^{1/2} \leqslant \left[|\xi_0|^2 + \left(\|\xi'\|_0 + \lambda\|a\|_0|\xi_0|\right)^2\right]^{1/2} \\ &\leqslant (1 + \lambda\|a\|_0)\|\xi\|_0.\end{aligned}$$

De même, les inégalités (E1) et (2.2) entraînent (2.5):

$$\|\hat{T}_a e(Z)\|_0 \leqslant \frac{\operatorname{sh}(\lambda\|a\|_\infty)}{\lambda\|a\|_\infty} \cdot \big(\|v(Z)\|_0 + \lambda\|a\|_0 |h(Z)|\big) \leqslant e^{\lambda\|a\|_\infty}\|Z\|_0.$$

Notons que si $X \in \hat{T}_c\Lambda$ et si $\Delta_c^{-1}(X) = \xi$ a une moyenne nulle, alors $\hat{T}_c e^{-1}(X)$ est vertical et s'identifie à $\xi \in L^0_{\gamma(c)} \hookrightarrow T_{\gamma(c)}L^0$. En particulier,

$$\hat{T}_c e^{-1} \circ \Delta_c(\mathcal{J}\dot{a}) = \mathcal{J}\dot{a}. \tag{2.7}$$

Définissons maintenant: $\Delta = \bigcup_c \Delta_c$: $\gamma^* H^0 \to \hat{T}\Lambda$, $H^0_{\gamma(c)} \to T_c\Lambda$,

$$\hat{T}L' = TL^0|L,$$

$$\hat{T}e = \bigcup_a \hat{T}_a e\colon \hat{T}L \to \hat{T}\Lambda, \qquad T_a L^0 \to \hat{T}_c\Lambda.$$

Nous savons déjà que Δ et $\hat{T}e$ sont des isomorphismes fibre à fibre. En fait, on peut être plus précis.

Proposition 3. *Les applications Δ et $\hat{T}e$ sont des C^∞-isomorphismes de fibrés.*

Démonstration. Nous ne traiterons que Δ, le cas de $\hat{T}e$ étant analogue. Choisissant $p \in \tilde{M}$, il vient des trivialisations globales de $\gamma^* L^0$ et de $\hat{T}\Lambda$:

$$\Lambda \times H^0_p \xrightarrow{\cong} \gamma^* H^0;$$

$$(c, \xi) \mapsto \operatorname{tr}_p^{\gamma(c)}(\xi) \in H^0_{\gamma(c)} = (\gamma^* H^0)_c$$

(tr_p^q = transport parallèle le long de la géodésique de p à q);

$$\Lambda \times L^0_p \xrightarrow{\cong} \hat{T}\Lambda;$$

$$(c, \xi) \mapsto [d\exp_p]_X \cdot \xi \in \hat{T}_c\Lambda,\ X = \exp_p^{-1} c \in H^1_p.$$

L'application Δ s'écrit dans ces trivialisations

$$(c, \xi) \to \big(c, [d\exp_p^{-1}]_c \circ [d\exp_{\gamma(c)}]_a \circ \operatorname{tr}_p^{\gamma(c)}(\xi)\big) = (c, \varphi(c)\cdot\xi),$$

avec une factorisation

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \operatorname{End}(L^0_p) = \operatorname{End}(H^0(T_p\tilde{M})) \\ & H^1(\operatorname{End}(T_p\tilde{M})), \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}$ étant C^∞.

Or, d'après [14, p. 10], l'inclusion i est une application linéaire continue: donc, φ est C^∞ et il en est de même pour Δ.

Remarque. Cette preuve est analogue à celle de la différentiabilité des changements de cartes de Λ ou de trivialisations de $\hat{T}\Lambda$ (cf. [14, p. 16]) (voir aussi la preuve de la Proposition 4 dans la section suivante).

Posons $\mathscr{S} = S \circ e\colon L \to \mathbf{R}$. C'est une fonction C^∞ dont on veut minorer le nombre de points critiques. Notons qu'à cause de la proposition 3, on a, pour $X \in T_a L$,

$$d\mathscr{S}(X) = (\nabla S(c), T_a e(X)) = {}^t(\hat{T}_a e)(\nabla S(c), X)_0 = (\nabla S(a), X)_0,$$

où $\nabla\mathscr{S}$ est une section C^∞ de $\hat{T}L$ (par le même abus de langage que plus haut, une section de $\hat{T}L$ sera appelée champ de vecteurs). Comme pour S, on peut donc définir $d\mathscr{S}(X)$ pour $X \in \hat{T}_a L$. De plus, l'inégalité (2.5) entraîne

$$\|\nabla\mathscr{S}(a)\|_0 \leqslant e^{\lambda\|a\|_\infty}\|\nabla S(c)\|_0. \tag{2.8}$$

On notera $\mathscr{A} = A \circ e$ l'action "non perturbée" sur L.

3. Champ de quasi-gradient

Pour appliquer la méthode de [9], il nous faudrait un champ sur L dont le terme principal soit le champ vertical $-\mathscr{J}\dot{a}$. Pour le champ $\nabla\mathscr{S}$, ce terme est ${}^t(\hat{T}_a e)(-\mathscr{J}\dot{c})$ ce qui est trop compliqué pour en tirer quoi que ce soit. On essaie ensuite le champ correspondant à ∇S, c'est-à-dire $\hat{T}e^{-1} \circ \nabla S \circ e$. Son terme principal est $\hat{T}e^{-1}(-\mathscr{J}\dot{c}) = -\hat{T}e^{-1} \circ \mathscr{J} \circ \Delta(\dot{a})$ (d'après (2.1)). Or, d'après (2.6), $-\mathscr{J}\dot{a} = -\hat{T}e^{-1} \circ \Delta \circ \mathscr{J}(\dot{a})$. On est donc naturellement amené à définir $\nabla' S = -\Delta \circ \mathscr{J} \circ \Delta^{-1} \circ \mathscr{J} \circ \nabla S$ et $Z = \hat{T}e^{-1} \circ \nabla' S \circ e$.

Montrons d'abord que Z vérifie les propriétés (QG1) et (QG2) de l'introduction. La seconde condition est clairement vérifiée, quant à la première:

$$\begin{aligned} d\mathscr{S}[Z(a)] &= dS[\nabla' S(c)] \\ &= (\nabla S(c), -\Delta \circ \mathscr{J} \circ \Delta^{-1} \circ \mathscr{J} \circ \nabla S(c))_0 \\ &= (\mathscr{J} \circ \Delta(\Delta^{-1} \circ \mathscr{J} \circ \nabla S(c)), \Delta \circ \mathscr{J}(\Delta^{-1} \circ \mathscr{J} \circ \nabla S(c)))_0. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H2), cela implique:

$$d\mathscr{S}[Z(a)] \geqslant \alpha\|\Delta^{-1} \circ \mathscr{J} \circ \nabla S(c)\|_0^2, \tag{3.1}$$

d'où le résultat.

Estimons maintenant la valeur de la "perturbation" $G(a) = Z(a) - (-\mathscr{J}\dot{a})$, soit $G = -\hat{T}e^{-1} \circ \Delta \circ \mathscr{J} \circ \Delta^{-1} \circ \mathscr{J} \circ (\nabla h_t) \circ e$, champ de vecteurs sur L.

On a d'abord:

$$\begin{aligned} \|G(a)\|_0 &\leqslant (1 + \lambda\|a\|_0)\|\Delta^{-1} \circ \mathscr{J} \circ \nabla h_t(c)\| \quad \text{d'après (2.4)} \\ &\leqslant (1 + \lambda\|a\|_0)\|\nabla h_t(c)\|_0 \quad \text{d'après (2.3)}. \end{aligned}$$

D'où, en posant $C_1 = \max_{M \times I}|\nabla h_t(p)|$:

$$\|G(a)\|_0 \leqslant C_1(1 + \lambda\|a\|_0). \tag{3.2}$$

Remarques. (a) Dans la suite, on désignera par $C_2, \cdots$ des constantes, dépendant de la métrique, de $\mathscr{J}$ et de h.

(b) Il est essentiel d'avoir une majoration linéaire en a ($C(1 + \|a\|_\infty)$ suffirait, mais pas $C(1 + \|a\|_0)^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$); pour cela, l'ingrédient crucial est l'inégalité (2.4), elle-même conséquence de la seconde inégalité de (E1).

Estimons ensuite la différentielle de G, ou plutôt de sa composante verticale $g = v \circ G$: $L \to L^0$.

Proposition 4. *L'application tangente Tg: $TL \to TL^0$ s'étend par continuité pour la métrique H^0 en une application $\hat{T}g$: $\hat{T}L \to TL^0$, qui est de classe C^∞ et vérifie*:

$$\|\hat{T}_a g\| \leqslant C_2 e^{4\lambda\|a\|_\infty}. \tag{3.3}$$

Démonstration. Nous nous contenterons d'indiquer les grandes lignes de celle-ci, les détails omis n'offrant aucune vraie difficulté. L'application g est la composée:

$$L \xrightarrow{e} \Lambda \xrightarrow{j} \hat{T}\Lambda \xrightarrow{\Delta^{-1}} \gamma^* H^0 \xrightarrow{\mathscr{J}} \gamma^* H^0 \xrightarrow{\nu} L^{0\prime},$$

où l'on a noté $j = \mathscr{J} \circ (\nabla h_t)$, champ de vecteurs sur Λ, et $\nu = v \circ \hat{T}e \circ \Delta^{-1}$, application fibrée au-dessus de γ. Donc Tg est la composée:

$$TL \xrightarrow{Te} T\Lambda \xrightarrow{Tj} T(\hat{T}\Lambda) \xrightarrow{T\Delta^{-1}} T(\gamma^* H^0) \xrightarrow{T\mathscr{J}} T(\gamma^* H^0) \xrightarrow{T\nu} TL^{0\prime}.$$

Chacun des fibrés tangents TL, $T\Lambda$, $T(\hat{T}\Lambda)$ et $T(\gamma^* H^0)$ est muni, outre sa métrique de type H^1 naturelle, d'une métrique de type H^0 invariante par transport parallèle: Pour TL et $T\Lambda$, il s'agit des métriques induites par $\hat{T}L$ et $\hat{T}\Lambda$; pour $T(\hat{T}\Lambda)$ par exemple, on a, si $Y \in T_X(\hat{T}\Lambda)$, $X \in \hat{T}_c\Lambda$:

$$\|Y\|_1^2 = \|h(Y)\|_1^2 + \|v(Y)\|_0^2,$$

$$h(Y) = \text{composante horizontale} \in T_c\Lambda \text{ et}$$

$$v(Y) = \text{composante verticale} \in \hat{T}_c\Lambda,$$

$$\|Y\|_0^2 = \|h(Y)\|_0^2 + \|v(Y)\|_0^2.$$

On peut donc définir le fibré complété $\hat{T}(\hat{T}\Lambda)$ pour $\|\ \|_0$, et l'on voudrait le munir d'une structure différentiable. Or, les trivialisations naturelles de $\hat{T}\Lambda$ (voir [14]):

$$\varphi_c\colon \Lambda \times \hat{T}_c\Lambda \to \hat{T}\Lambda, \qquad c \in C^\infty(S^1, M),$$

donnent des trivialisations de $T(\hat{T}\Lambda)$:

$$\psi_c\colon \hat{T}\Lambda \times (T_c\Lambda \times \hat{T}_c\Lambda) \to T(\hat{T}\Lambda),$$

et des applications de changement de cartes:

$$\psi_d^{-1} \circ \psi_c \colon \hat{T}\Lambda \times (T_c\Lambda \times \hat{T}_c\Lambda) \to \hat{T}\Lambda \times (T_d\Lambda \times \hat{T}_d\Lambda),$$

$$(X, Y, Z) \mapsto \big(X, \psi_{cd}(X) \cdot \gamma,\, \psi'_{cd}(X) \cdot Z\big),$$

où $\psi_{cd}\colon \hat{T}\Lambda \to \mathrm{Hom}(T_c\Lambda,\, T_c\Lambda) = \mathrm{Hom}(H^1(c^*TM),\, H^1(d^*TM))$ se factorise:

$$\begin{tikzcd} \hat{T}\Lambda \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\bar{\psi}_{cd}"'] & \mathrm{Hom}\big(H^1(c^*TM),\, H^1(d^*TM)\big) \\ & H^1\big(\mathrm{Hom}(c^*TM,\, d^*TM)\big), \arrow[u, hook, "i_1"'] \end{tikzcd}$$

$\bar{\psi}_{cd}$ étant C^∞ (vérification fastidieuse mais aisée).

D'après ([14, p. 10]), l'injection

$$i_0 \colon H^1\big(\mathrm{Hom}(c^*TM,\, d^*TM)\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}\big(H^0(c^*TM),\, H^0(d^*TM)\big)$$

est une application linéaire continue, donc $i_0 \circ \bar{\psi}_{cd}$ est C^∞ ce qui permet de munir $\hat{T}(\hat{T}\Lambda)$ d'une structure de variété hilbertienne C^∞. On peut faire de même pour $\hat{T}(\gamma^* H^0)$, et aussi prouver que Tj, $T\Delta^{-1}$, $T\mathscr{J}$, et $T\nu$ s'étendent en des applications $\hat{T}j$, $\hat{T}\Delta^{-1}$, $\hat{T}\mathscr{J}$, et $\hat{T}\nu$ de classe C^∞ (le cas de Te est déjà connu), d'où la première partie de la proposition.

Ensuite, on écrit:

$$\|\hat{T}_a g\| \leqslant \|\hat{T}_a e\| \cdot \|\hat{T}_c j\| \cdot \big\|\hat{T}_Y \Delta^{-1}\big\| \cdot \|\hat{T}_\eta \mathscr{J}\| \cdot \|\hat{T}_\xi \nu\|,$$

où $Y = j(c)$, $\eta = \Delta^{-1}(Y)$, et $\xi = \mathscr{J}\eta$, et l'on va majorer chaque terme à droite.

On sait déjà que $\|\hat{T}_a e\| \leqslant e^{\lambda \|a\|_\infty}$, et il est clair que

$$\|\hat{T}_c j\| \leqslant \max_{M \times I} \|T_p(\mathscr{J} \nabla h_t)\|$$

et que

$$\|\hat{T}_\eta \mathscr{J}\| \leqslant 1 + \max_M \|D\mathscr{J}\| \cdot \|\eta\|_0 \leqslant 1 + C_1 \max_M \|D\mathscr{J}\|.$$

Ensuite, du fait que Δ^{-1} est fibrée au-dessus de id, avec $\Delta_c^{-1} = d_2 E(\gamma(c), c)$, on déduit:

$$\big\|\hat{T}_Y \Delta^{-1}\big\| \leqslant 1 + \big\|\Delta_c^{-1}\big\| + \big\|D\big(d_2 E(\gamma(c), c)\big)\big\|_\infty \cdot \big(1 + \|\hat{T}_c \gamma\|\big) \|Y\|_0,$$

où $D(d_2 E)$ est la dérivée covariante de $d_2 E$, considérée comme une section du fibré $\mathscr{H}$ au-dessus de $\tilde{M} \times \tilde{M}$ de fibre $\mathscr{H}_{p,q} = \mathrm{Hom}(T_q \tilde{M}, T_p \tilde{M})$.

On a les propriétés (voir Appendice):

$$\text{(E4)} \qquad \|D(d_2E)(p,q)\| \leqslant Ce^{\lambda r};$$

$$\text{(E5)} \qquad \|D(D_1E)(p,q)\| \leqslant C'e^{\lambda r}(1+\lambda r)$$

(où de même D_1E est considérée comme une section du fibré $\mathscr{E}$ de fibre $\mathscr{E}_{p,q} = \mathrm{End}(T_p\tilde{M})$).

Pour $Y = j(c) = j \circ e(a)$, il vient, en utilisant (2.1), (2.2), et (E4):

$$\|\hat{T}_Y\Delta^{-1}\| \leqslant 1 + 1 + Ce^{\lambda\|a\|_\infty}(1+1)\|Y\|_0 \leqslant 2 + CC_1e^{\lambda\|a\|_\infty}.$$

De façon analogue, comme ν est fibrée au-dessus de γ, avec $\nu_c(\xi) = \xi - D_1E(\gamma(c),c)\circ[D_1E(\gamma(c),c)]_0^{-1}\cdot\xi_0$ (cf. (2.67)), on a:

$$\|\hat{T}_\xi\nu\| \leqslant \|\hat{T}_c\gamma\| + \|\nu_c\| + \Big[2\|D(D_1E)(\gamma(c),c)\|_\infty \cdot \|D_1E(\gamma(c),c)\|_\infty \cdot \big\|[D_1E(\gamma(c),c)]_0^{-1}\big\|^2 \cdot \big(1 + \|\hat{T}_c\gamma\|\big)\cdot\|\xi\|_0\Big].$$

Pour $\xi = \Delta^{-1}\circ j(c)$, on en déduit d'après (E1), (2.1), (2.4), (E5) et le fait que $\|\xi\|_0 \leqslant C_1$:

$$\|\hat{T}_\xi\nu\| \leqslant 1 + 1 + \lambda\|a\|_0 + 2C'e^{\lambda\|a\|_\infty}(1+\lambda\|a\|_\infty)^2\cdot 2C_1.$$

L'inégalité (3.3) est alors une conséquence immédiate des inégalités déjà écrites.

Autres inégalités.

$$\text{(3.4)} \qquad \|\nabla\mathscr{S}(a)\|_0 \leqslant e^{3\lambda\|a\|_\infty}\|Z(a)\|_0.$$

$$\text{(3.5)} \qquad \|\dot{a}\|_0 > 2C_1 \Rightarrow d\mathscr{S}[Z(a)] > \frac{\alpha}{4}\|\dot{a}\|_0^2.$$

$$\text{(3.6)} \qquad \|Z(a)\|_0 \leqslant C_3(1+\|\dot{a}\|_0).$$

$$\text{(3.7)} \qquad d\mathscr{S}[Z(a)] \geqslant C_4\|Z(a)\|_0^2, \qquad C_4 > 0.$$

Démonstration. (3.4) Cela s'obtient aisément à l'aide de (2.2), (2.5), et (2.8).

(3.5) On utilise (3.1) et le fait que $\Delta^{-1}\circ\mathscr{J}\circ\nabla S(c) = \dot{a} - \Delta^{-1}\circ\mathscr{J}(\nabla h_t(c(t)))$, donc $\|\Delta^{-1}\circ\mathscr{J}\circ\nabla S(c)\|_0 \geqslant \|\dot{a}\|_0 - C_1$.

(3.6) D'après (3.2), on a $\|Z(a)\|_0 \leqslant \|\dot{a}\|_0 + C_1(1+\lambda\|a\|_0)$, ce qui implique (3.6) puisque $\|a\|_0 \leqslant \|\dot{a}\|_0/2\pi$. (Cela se prouve par exemple en décomposant a en série de Fourier comme au Chapitre 4, et en se rappelant que a est à moyenne nulle.)

(3.7) D'après (3.1) et (2.7), on a:

$$[d\mathscr{S}(Z)](a) \geqslant \alpha\|\mathscr{J}\circ\Delta^{-1}\circ\hat{T}e\circ Z(a)\|_0^2 \geqslant \frac{\alpha}{(1+\lambda\|a\|_0)^2}\|Z(a)\|_0^2.$$

Donc, si $\|a\|_0 < 2c_1$, on a

$$d\mathscr{S}[Z(a)] \geqslant \frac{\alpha}{(1+2\lambda C_1)^2} \cdot \|Z(a)\|_0^2,$$

et si $\|a\|_0 \geqslant 2C_1$, alors a fortiori $\|\dot{a}\|_0 \geqslant 2C_1$, donc (3.7) résulte de la comparaison entre (3.5) et (3.6).

4. Réduction à la dimension finie (début)

Soit N un entier > 0. Le fibré H^s se décompose en une somme orthogonale invariante par la connexion:

$$H^s = H_N^s \oplus H_N^{s\perp};$$

$$H_N^s = \left\{ a \in H^s \middle| \int_0^1 \cos 2\pi nt \cdot a(t)\,dt = \int_0^1 \sin 2\pi nt \cdot a(t)\,dt = 0,\ n > N \right\};$$

on note P_N: $H^s \to H_N^s$ la projection

$$H_N^{s\perp} = \left\{ a \in H^s \middle| \int_0^1 (\cos 2\pi nt) a(t)\,dt = \int_0^1 (\sin 2\pi nt) a(t)\,dt = 0,\ n \leqslant N \right\};$$

on note $P_N^\perp : H^s \to H_N^{s\perp}$ la projection.

Rappelons que tout élément de a de H_p^s a une décomposition

$$a(t) = x_0 + \sum_1^\infty (\cos 2\pi nt \cdot x_n + \sin 2\pi nt \cdot y_n),$$

avec $\|a\|_0^2 = |x_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (|x_n|^2 + |y_n|^2)$,

$$\|a\|_1^2 = |x_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty (1+4\pi^2 n^2)\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right) \cdot H_N^s$$

(resp. $H_N^{s\perp}$) est défini par $x_n = y_n = 0$ pour $n > N$ (resp. $\leqslant N$).

Autres notations. ● $H_N^0 = H_N^1 =$ fibré de dimension finie $(2N+1) \cdot \dim M$: on le notera H_N, et on pose $L_N = H_N \cap L$.

● On notera $L_N^\perp = H_N^{1\perp}$, d'où $L = L_N \oplus L_N^\perp$.

Soit $V = v \circ Z$: $L \to L^0$ la composante verticale de Z. On considère l'équation:

(E) (1ère forme) $\qquad P_N^\perp(V(a)) = 0,$

soit $-\mathscr{J} P_N^\perp(a) + P_N^\perp \circ g(a) = 0$; en notant δ l'isomorphisme $a \mapsto \dot{a}$ de L sur L^0, cette équation s'écrit:

(E) (2e forme) $\qquad P_N^\perp(a) = -\delta^{-1} \circ \mathscr{J} \circ P_N^\perp \circ g(a).$

Notons $\varphi_N(a)$ le second membre: φ_N est une application C^∞ de L dans $L_N^\perp$, fibrée au-dessus de M. De plus:

(a) $\|\delta \circ \varphi_N(a)\|_0 \leqslant C_1(1 + \lambda\|a\|_0)$;

(b) $\|\varphi_N(a)\|_\infty \leqslant C_1(1 + \lambda\|a\|_0)/\pi\sqrt{2N}$;

(c) $\|\varphi_N(a)\|_0 \leqslant C_1(1 + \lambda\|a\|_0)/2\pi N$;

(d) $D\varphi_N \overset{\text{déf}}{=} v \circ T\varphi_N$: $TL \to L_N^\perp$ s'étend par continuité en $\overline{D}\varphi_N$: $\hat{T}L \to L_N^\perp$; qui est de classe C^∞ et vérifie:

$$\left\|\overline{D}_a\varphi_N\right\| \leqslant C_5 e^{5\lambda\|a\|_\infty}.$$

(e) Notant $\hat{D}\varphi_N$ la composée $\hat{T}L \to \overline{D}\varphi_N L_N^\perp \hookrightarrow H_N^{0\perp}$, on a:

$$\|\hat{D}_a\varphi_N\| \leqslant \frac{C_5}{2\pi N} e^{5\lambda\|a\|_\infty}.$$

Démonstration. (a) C'est une conséquence immédiate de (3.2).

(b) Cela résulte du a) et du fait que, si $a \in H_N^{0\perp}$,

$$a(t) = \sum_{N+1}^{\infty} (\cos 2\pi nt \cdot x_n + \sin 2\pi nt \cdot y_n),$$

on a

$$(\delta^{-1}(a))(t) = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n}(\sin 2\pi nt \cdot x_n - \cos 2\pi nt \cdot y_n);$$

donc:

$$\begin{aligned}\|\delta^{-1}(a)\|_\infty &\leqslant \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n}\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{N+1}^{\infty} |x_n|^2 + |y_n|^2\right]^{1/2} \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{N}} \cdot \sqrt{2}\,\|a\|_0.\end{aligned}$$

(c) De même, ceci résulte de a) et du fait que, si $a \in H_N^{0\perp}$, alors

$$\|\delta^{-1}(a)\|_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^2}\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right)\right]^{1/2} \leqslant \frac{1}{2\pi N}\|a\|_0.$$

(d) $D\varphi_N$ est la composée:

$$TL \xrightarrow{Tg} TL^0 \xrightarrow{T\mathcal{J}} TL^0 \xrightarrow{TP_N^\perp} TH_N^{0\perp} \xrightarrow{D\delta^{-1}} L_N^\perp;$$

donc l'existence de $\hat{T}g$ (Proposition 4) prouve celle de $\overline{D}\varphi_N$.

On sait déjà $\|\hat{T}_a g\| \leqslant C_2 e^{4\lambda\|a\|_\infty}$ ((3.3)). De plus, posant $X = g(a)$, on a $\|T_X \mathscr{J}\| \leqslant 1 + \max_M \|D\mathscr{J}\| \cdot \|X\|_0 \leqslant 1 + C_1 \max_M \|D\mathscr{J}\| \cdot (1 + \lambda\|a\|_0)$ d'après (3.2). Enfin l'invariance de $P_N^\perp$ et de δ par transport parallèle entraîne

$$\|T_{X^\perp} P_N^\perp\| = 1\left(X^\perp = P_N^\perp X\right), \qquad \|D_Y \delta^{-1}\| = \|\delta_p^{-1}\| = \frac{\sqrt{1+(2\pi)^2}}{2\pi}$$
$$\left(Y = \mathscr{J}X^\perp,\ p = \gamma(c)\right).$$

On en déduit aisément le (d).

(e) Cela résulte du (d) et du fait que la norme de l'inclusion $(L_N^\perp)_p \hookrightarrow (H_N^{0\,\perp})_p$ est $1/\sqrt{1+(2\pi N)^2}$ (cf. aussi le (c)).

Posons maintenant $R = 8\lambda + 1$ ($R > 5\lambda$ suffirait pour la proposition suivante, mais plus tard il nous faudra $R > 8\lambda$) et définissons:

$$U_N = \left\{ a_N \in L_N \middle| \, \|a_N\|_\infty < \frac{\operatorname{Log} N}{R} \right\}.$$

Proposition 5. *Choisissons N assez grand. Alors, pour chaque a_N dans U_N, il existe une unique solution a de* (E) *telle que $P_N(a) = a_N$. Notant $P_N^\perp(a) = v_N(a_N)$, on définit ainsi une application v_N: $U_N \to L_N^\perp$ fibrée au-dessus de M. Cette application est C^∞ et vérifie*:

$$\|v_N(a_N)\|_\infty < 1; \tag{4.1}$$

$$\|D_{a_N} v_N\|_{0,0} \leqslant C_6 N^{5\lambda/R-1}; \tag{4.2}$$

où $Dv_N = v \circ Tv_N$: $TL_N \to L_N^\perp$ et $\| \ \|_{0,0}$ désigne la norme de l'application linéaire quand les deux espaces sont munis des normes H^0.

$$\|v_N(a_N)\|_0 \leqslant C_7 \frac{\operatorname{Log} N}{N}; \tag{4.3}$$

$$\|\overline{v_N(a_N)}\|_0 \leqslant C_8\left(1 + \|a_N\|_0\right) \leqslant C_8\left(1 + \|\dot{a}_N\|_0\right). \tag{4.4}$$

Démonstration. Dans chacun des lemmes suivants, on sous-entend "Pour N assez grand".

Lemma 1. *Si a est une solution de* (E) *telle que $P_N(a) \in U_N$, alors $\|P_N^\perp(a)\|_\infty < 1$, et a fortiori $\|a\|_\infty < \operatorname{Log} N/R + 1$.*

Démonstration. D'après (b), on a, en posant $P_N(a) = a_N$, $P_N^\perp(a) = a_N^\perp$:

$$\|a_N^\perp\|_\infty = \|\varphi_N(a)\|_\infty \leqslant \frac{C_1}{\pi\sqrt{2N}}\left(1 + \lambda\|a_N\|_\infty + \lambda\|a_N^\perp\|_\infty\right);$$

d'où, en supposant N assez grand pour que $\lambda C_1/\pi\sqrt{2N} < \frac{1}{2}$:

$$\|a_N^\perp\|_\infty \leqslant \frac{2C_1}{\pi\sqrt{2N}}\left(1 + \lambda\|a_N\|_\infty\right) \leqslant \frac{2C_1}{\pi\sqrt{2N}}\left(1 + \frac{\lambda \operatorname{Log} N}{R}\right) = o(1), \quad N \to \infty,$$

d'où le résultat.

Lemme 2. *Soit* $a \in L$, $a = a_N + a_N^{\perp}$, *tel que* $a_N \in U_N$ *et* $\|a_N^{\perp}\|_{\infty} < 1$. *Alors*, $\|\varphi_N(a)\|_{\infty} < 1$.

Corollaire. $\|\hat{D}_a\varphi_N\| < C_5 e^{5\lambda/R-1}/2\pi < \frac{1}{2}$.

Démonstration. Comme pour le Lemme 1, on a:

$$\begin{aligned}\|\varphi_N(a)\|_{\infty} &\leqslant \frac{C_1}{\pi\sqrt{2N}}\left(1 + \lambda\|a_N\|_{\infty} + \lambda\|a_N^{\perp}\|_{\infty}\right)\\ &< \frac{C_1}{\pi\sqrt{2N}}\left(1 + \frac{\lambda \operatorname{Log} N}{N} + \lambda\right) = o(1),\end{aligned}$$

d'où le résultat. La première inégalité du corollaire est alors une conséquence de e), la seconde est vraie pour N assez grand puisque $R > 5\lambda$.

Lemme 3. *Soit* a_N *un élément de* U_N: *il existe alors au plus une solution* a *de* (E) *telle que* $P_N(a) = a_N$.

Démonstration. Si a et a' sont deux telles solutions, on a $\|P_N a\|_{\infty} < 1$ et $\|P_N(a')\|_{\infty} < 1$ (Lemme 1), donc le corollaire du Lemme 2 entraîne:

$$\|a - a'\|_0 = \|P_N(a) - P_N(a')\|_0 = \|\varphi_N(a) - \varphi_N(a')\|_0 \leqslant \frac{1}{2}\|a - a'\|_0,$$

d'où le résultat.

Définissons maintenant une suite d'applications fibrées ψ_n: $U_N \to L_N^{\perp}$:

$$\psi_0 = 0, \qquad \psi_{+1}(a_N) = \varphi_N(a_N + \psi_n(a_N)).$$

Lemme 4. *La suite* (ψ_n) *converge uniformément vers une application continue* v_N.

Corollaire. *Pour* $a_N \in U_N$, *il existe une unique solution* a *de* (E) *telle que* $P_N(a) = a_N$, *à savoir* $a = a_N + v_N(a_N)$.

Démonstration. D'après les Lemmes 1 et 2, on a:

$$\|\psi_{n+1}(a_N) - \psi_n(a_N)\|_0 \leqslant \frac{1}{2}\|\psi_n(a_N) - \psi_n(a_N)\|_0;$$

$$\|\psi_n(a_N) - \psi_{n-1}(a_N)\|_0 \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\|\varphi_N(a_N)\|_0 < \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\operatorname{Log} N}{R}.$$

Puis, à l'aide de l'inégalité (d)

$$\|\psi_{n+1}(a_N) - \psi_n(a_N)\|_1 \leqslant C_5 N^{5\lambda/R}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\operatorname{Log} N}{R}$$

d'où le résultat. Par passage à la limite, on a $v_N(a_N) = \varphi_N(a_N + v_N(a_N))$, et l'unicité a été démontrée au lemme 3.

Lemme 4. *L'application* v_N *est* C^{∞} *et vérifie* (4.2).

Démonstration. Soit $a = a_N + v_N(a_N)$, $a_N \in U_N$. On a une décomposition orthogonale naturelle $T_a L = T_{a_N} L_N \oplus (L_N^{\perp})_p$. Notons $D_1\varphi_N = D_a\varphi_N|_{T_{a_N}L_N}$ et

$D_2\varphi_N = D_a\varphi_N|_{(L_N^\perp)_p}$. Pour appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation $a_N^\perp = \varphi_N(a_N + a_N^\perp)$, il faut montrer que l'application $\mathrm{id} - D_2\varphi_N$ est inversible. D'après la propriété (d) et les Lemmes 1 et 2, on a le diagramme commutatif d'applications linéaires continues:

$$\begin{tikzcd} (L_N^\perp)_p \arrow[r, "D_2\varphi_N"] \arrow[d, hook, "i"'] & (L_N^\perp)_p \arrow[d, hook, "i"] \\ (H_N^{0\perp})_p \arrow[r, "\hat{D}_2\varphi_N"'] \arrow[ur, "\overline{D}_2\varphi_N"] & (H_N^{0\perp})_p \end{tikzcd}$$

avec $\|\hat{D}_2\varphi_N\| < C_5 e^{5\lambda} N^{5\lambda/R - 1}/2\pi < \frac{1}{2}$. On en déduit d'abord que $\mathrm{id} - \hat{D}_2\varphi_N$ est inversible, puis qu'il en est de même pour $\mathrm{id} - D_2\varphi_N$, avec $(\mathrm{id} - D_2\varphi_N)^{-1} = \mathrm{id} - \overline{D}_2\varphi_N \circ (\mathrm{id} - \hat{D}_2\varphi_N)^{-1} \circ i$ (vérification immédiate). Donc, v_N est bien de classe C^∞ et la composante verticale de $T_{a_N} v_N$ est donnée par

$$D_{a_N} v_N = D_1\varphi_N \circ (\mathrm{id} - D_2\varphi_N)^{-1}.$$

L'inégalité (4.2) est une conséquence immédiate de cette égalité et du corollaire du Lemme 2.

Pour achever la preuve de la Proposition 4, il reste:

- L'inégalité (4.3): elle résulte de (c) et de (4.1).
- L'inégalité (4.4): on a

$$\begin{aligned} \|a_N^\perp\|_0 = \|\delta \circ \varphi_N(a)\|_0 &\leqslant C_1(1 + \lambda\|a\|_0) \quad \text{(d'après a))} \\ &\leqslant C_1(1 + \lambda\|a_N\|_0 + \lambda) \quad \text{(d'après le lemme 1)}. \end{aligned}$$

5. Réduction à la dimension finie (fin)

Soit N assez grand pour pouvoir appliquer la Proposition 5. Posons:

$$u_N\colon U_N \to L, \qquad a_N \to a_N + v_N(a_N);$$
$$\mathcal{S}_N = \mathcal{S} \circ u_N\colon U_N \to \mathbf{R};$$
$$Z_N = \hat{T}P_N \circ Z \circ u_N, \quad \text{champ de vecteurs sur } U_N.$$

L'équation (E) implique $Z(u_N(a_N)) \in TL$, donc $Z_N = TP_N \circ Z \circ u_N$, et aussi:

$$\|Z_N(a_N)\|_0 = \|Z(a)\|_0, \qquad a = u_N(a_N). \tag{5.1}$$

Proposition 6. *Pour N assez grand, on a*:

$$d\mathcal{S}_N[Z_N(a_N)] \geqslant \frac{1}{2}[d\mathcal{S}(Z)](a), \qquad a = u_N(a_N). \tag{5.2}$$

Démonstration. Puisque $\mathscr{S}_N = \mathscr{S} \circ u_N$, il vient:

$$d\mathscr{S}_N[Z_N(a_N)] = d\mathscr{S}[(Tu_N(Z_N))(a)];$$

$$|d\mathscr{S}_N[Z_N(a_N)] - d\mathscr{S}[Z(a)]| \leqslant \|\nabla\mathscr{S}(a)\|_0 \cdot \|Tu_N(Z_N(a_N)) - Z(a)\|_0.$$

D'autre part, $Tu_N(Z_N(a_N)) = T(u_N \circ P_N)(Z(a))$ a la même composante horizontale que $Z(a)$ et sa composante verticale est:

$$\begin{aligned} Du_N(Z_N(a_N)) &= v \circ TP_N(Z(a)) + Dv_N(Z_N(a_N)) \\ &= P_N(V(a)) + Dv_N(Z_N(a_N)) \\ &= V(a) + Dv_N(Z_N(a_N)) \quad (\text{équation E})). \end{aligned}$$

D'où, à l'aide de (4.2):

$$\|T_{u_N}(Z_N(a_N)) - Z(a)\|_0 = \|Dv_N(Z_N(a_N))\|_0 \leqslant C_6 N^{5\lambda/R-1}\|Z_N(a_N)\|_0.$$

Comme par ailleurs, (3.4) et (4.1) entraînent:

$$(5.3) \qquad \|\nabla\mathscr{S}(a)\|_0 \leqslant e^{3\lambda}N^{3\lambda/R}\|Z(a)\|_0,$$

il vient, en tenant compte de (5.1):

$$|d\mathscr{S}_N[Z_N(a_N)] - d\mathscr{S}[Z(a)]| \leqslant C_6 e^{3\lambda}N^{3\lambda/R-1}\|Z(a)\|_0^2.$$

En comparant avec (3.7), on voit que pour obtenir (5.2), il suffit que N soit assez grand pour que $C_6 e^{3\lambda}N^{8\lambda/R-1} < C_4/2$, ce qui est possible puisque $R > 8\lambda$.

Corollaires de la Proposition 6.

(a) *Z_N est de quasi-gradient pour $\mathscr{S}_N$.*

(b) *Si $Z_N(a_N) = 0$, alors $Z(a) = 0$.*

Remarque. La réciproque de (b) est également vraie pour N assez grand, au sens suivant: si $Z(a) = 0$, alors $P_N(a) = a_N \in U_N$, d'où $Z_N(a_N) = 0$. En effet:

$$\begin{aligned} -\mathscr{J}\dot{c} - (\nabla h_t)(c) = 0 &\Rightarrow \|\dot{c}\|_0 \leqslant C_1 \Rightarrow \|\dot{a}\|_0 \leqslant C_1 \Rightarrow \|\dot{a}_N\|_0 \leqslant C_1 \\ &\Rightarrow \|a_N\|_\infty \leqslant \frac{C_1}{2\sqrt{3}} \quad (\text{cf. la preuve de (b) au Chapitre 4}). \end{aligned}$$

Définissons l'application F_N: $L_N \to \mathbf{R}$: $F_N(a_N) = \sum_1^N n(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ (c'est à peu de chose près le carré de la norme $H^{1/2}$). Il est clair que F_N est invariante par transport parallèle et son gradient pour la métrique H^0 est le vecteur vertical donné par:

$$\nabla F_N(a_N)(t) = 2\sum_1^N n(\cos 2\pi nt \cdot x_n + \sin 2\pi nt \cdot y_n),$$

donc:

$$\| \nabla F_N(a_N) \|_0 = \frac{1}{\pi} \| \dot{a}_N \|_0.$$

L'inégalité suivante est capitale:

$$F_N(a_N) \geqslant C_9 \Rightarrow |dF_N[Z_N(a_N)]| < C_{10}\, d\mathscr{S}_N[Z_N(a_N)]. \tag{5.4}$$

Remarque. Cette inégalité joue le rôle de la condition (C) de Palais-Smale: plus précisément, elle servira à majorer la croissance de F_N le long des orbites de Z_N, ce qui permettra de les maintenir dans des compacts convenables. De plus, elle entraîne que chaque point critique de $\mathscr{S}_N$ vérifie $F_N(a_N) < C_9$.

Démonstration de (5.4). D'une part:

$$\begin{aligned} |dF_N[Z_N(a_N)]| &\leqslant \| \nabla F_N(a_N) \|_0 \| Z_N(a_N) \|_0 \\ &\leqslant \frac{1}{\pi} \| \dot{a}_N \|_0 \cdot C_3\big(1 + \| \dot{a} \|_0\big) \quad \text{(d'après (5.1) et (3.6))} \\ &\leqslant \frac{1}{\pi} \| \dot{a}_N \|_0 \cdot C_3\Big(2 + C_8\big(1 + \| \dot{a}_N \|_0\big)\Big) \quad \text{(d'après (4.4))}, \end{aligned}$$

donc:

$$\| \dot{a}_N \|_0 > 1 \Rightarrow |dF_N[Z_N(a_N)]| \leqslant \frac{1}{\pi} C_3(2 + 2C_8) \| \dot{a}_N \|_0^2.$$

D'autre part, d'après (3.5) et (5.2):

$$\| \dot{a}_N \|_0 > 2C_1 \Rightarrow d\mathscr{S}_N[Z_N(a_N)] > \frac{\alpha}{8} \| \dot{a}_N \|_0^2.$$

Enfin:

$$\| \dot{a}_N \|_0^2 = 2\pi^2 \sum_1^N n^2\Big(|x_n|^2 + |y_n|^2\Big) \geqslant 2\pi^2 F_N(a_N),$$

donc:

$$F_N(a_N) > \frac{1}{2\pi^2} \sup\Big(1, (2C_1)^2\Big) \Rightarrow \| \dot{a}_N \|_0 > \sup(1, 2C_1),$$

d'où l'on déduit (5.4).

Proposition 7. *Soit* $W_N = \{ a_N \in L_N | F_N(a_N) < \operatorname{Log} N / 2R^2 \}$.

(a) *Pour* $N \geqslant 3$, $W_N \subset U_N$.

(b) *Pour N assez grand*,

$$a_N \in W_N \Rightarrow |\mathscr{A}(a) - \mathscr{A}(a_N)| < 1, \qquad a = u_N(a_N).$$

Démonstration.

(a)

$$\|a_N\|_\infty \leqslant \sum_1^N \left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \left[\left(\sum_1^N \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\sum_1^N n\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right)\right)\right]^{1/2}$$

$$\leqslant [2 \log N \cdot F_N(a_N)]^{1/2} < \left[2 \operatorname{Log} N \cdot \frac{\operatorname{Log} N}{2R^2}\right]^{1/2} = \frac{\operatorname{Log} N}{R} \quad (a_N \in W_N).$$

(b) Par le théorème des accroissements finis et en se rappelant que $\nabla A(c) = -\mathscr{J}\dot{c} = -\mathscr{J}\Delta\dot{a}$, on obtient:

$$|\mathscr{A}(a) - \mathscr{A}(a_N)| \leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \|\nabla\mathscr{A}(a_s)\|_0 \cdot \|v_N(a_N)\|_0, \qquad a_s = a_N + sv_N(a_N)$$

$$\leqslant \max_s \|\hat{T}_{a_s} e\| \cdot \|\nabla A(c_s)\|_0 \cdot C_7 \frac{\operatorname{Log} N}{N} \quad \text{(d'après (4.3))}$$

$$\leqslant e^{\lambda} N^{\lambda/R} \cdot e^{\lambda} N^{\lambda/R}\left(\|\dot{a}_N\|_0 + \left\|\widehat{v_N(a_N)}\right\|_0\right) \cdot C_7 \frac{\operatorname{Log} N}{N}$$

$$\text{(d'après (2.2), (2.5) et (4.1))}$$

$$\leqslant e^{2\lambda} N^{2\lambda/R}\left(\|a_N\|_0 + C_8\left(1 + \|\dot{a}_N\|_0\right)\right) \cdot C_7 \frac{\operatorname{Log} N}{N}$$

$$\text{(d'après (4.4)).}$$

D'autre part,

$$\|\dot{a}_N\|_0^2 \leqslant 2\pi^2 N F_N(a_N) < \frac{\pi^2 N \operatorname{Log} N}{R^2};$$

on en déduit:

$$|\mathscr{A}(a) - \mathscr{A}(a_N)| < \frac{C_8'}{R} N^{-1/2 + 2\lambda/R} (\operatorname{Log} N)^{3/2},$$

d'où le (b) puisque $-\frac{1}{2} + 2\lambda/R < 0$.

Enfin, notons $\mathscr{A}_N = \mathscr{A}|L_N$ et Z_N^0 le champ vertical $-\mathscr{J}\dot{a}_N$ sur L_N'. Il est aisé de voir que si $\|a\|_\infty \to 0$, on a $\mathscr{A}(a) = -\frac{1}{2}(a, \mathscr{J}\dot{a})_0 + O(\|a\|_\infty^2 \|\dot{a}\|_0)$ (comparaison avec "l'aire euclidienne"). En particulier on a:

$$\mathscr{A}_N(a_N) = \sum_1^N \pi n(x_n \cdot y_n) + O\left(\|a_N\|_0^3\right), \qquad \|a_N\|_0 \to 0.$$

Donc, l'image de la section nulle $M \subset L_N$ forme une variété critique non dégénérée au sens de Bott [4] pour $\mathscr{A}_N$, d'indice $\frac{1}{2}\dim(L_N)_p = N \cdot \dim M$.

D'autre part, (H2) entraîne:

$$d\mathscr{A}_N\left[Z_N^0(a_N)\right] \geqslant \alpha\|\dot{a}_N\|_0^2 = \alpha\|Z_N^0(a_N)\|_0^2.$$

Conséquences. • $\mathscr{A}_N$ n'a pas de points critiques hors de M;
• Z_N^0 est de quasi-gradient pour $\mathscr{A}_N$.

$$|dF_N(Z_N^0)| \leqslant \frac{1}{\pi\alpha}\, d\mathscr{A}_N(Z_N^0). \tag{5.5}$$

Dernières propriétés.

$$|\mathscr{S}_N - \mathscr{A}_N| < C_{11} \quad \text{sur } W_N \left(C_{11} = \max_{M\times I}|h_t| + 1\right) \tag{5.6}$$

Cela résulte de la Proposition 7.

$$Z_N(a_N) = 0 \Rightarrow |\mathscr{A}_N(a_N)| < C_{12}. \tag{5.7}$$

En effet $\|\dot a_N\|_0 \leqslant C_1$ et $\|a_N\|_\infty \leqslant C_1/2\sqrt{3}$ (cf. remarque après la Proposition 6), et d'autre part $|\mathscr{A}(a)| \leqslant e^{\lambda\|a\|_\infty}\|\dot a\|_0\|a\|_0$ (par accroissements finis comme pour la preuve de la Proposition 7).

A fortiori, on a:

$$Z_N(a_N) = 0 \Rightarrow |\mathscr{S}_N(a_N)| < C_{13} \qquad (C_{13} = C_{11} + C_{12}). \tag{5.8}$$

6. Minoration du nombre de points critiques en dimension finie

On va construire (v, v^-), $v^- \subset v \subset W_N$ avec les propriétés:

(B1) v est compact.

(B2) Fr v ne contient aucun point critique de $\mathscr{S}_N$ ($=$ zéro de Z_N).

(B3) Soit (φ_t) le flot de Z_N:

(i) si $x \in v^-$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que ($\varphi_t(x) \notin v$ si $-\varepsilon < t < 0$) et ($\varphi_t(x) \in v$ si $0 < t < \varepsilon$);

(ii) si $x \in v \setminus v^-$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que ($\varphi_t(x) \in v$ si $-\varepsilon < t < 0$).

(B4) (v, v^-) a une "cup-length relative" $\mathrm{CL}_{\mathrm{rel}}(v, v^-) \geqslant \mathrm{CL}(M) + 1$, au sens suivant: il existe $\omega_1, \cdots, \omega_l$ ($l = \mathrm{CL}(M)$) dans $\tilde H^*(v; A)$ et ω dans $H^*(v, v'; A)$ tels que $\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_l \cup \omega \neq 0$ dans $H^*(v, v^-; A)$.

Montrons d'abord comment en déduire le théorème. Supposons que $\mathscr{S}_N$ n'ait qu'un nombre fini de points critiques $c_1, \cdots, c_k$ dans v; les c_i sont dans $\mathring{v}$ d'après (B2). Alors, d'après [5, p. 342], chaque c_i admet un voisinage $\mathfrak{u}_i$ contractile dans v et contenant les orbites de z_N dans v ayant c_i pour point limite. D'autre part, la réunion des orbites de Z_N dans v issues de v^- forme un ouvert $\mathfrak{u}$ qui se rétracte par déformation sur v^-. Les conditions (B1) et (B3) entraînent $v = \mathrm{u} \cup (\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{u}_i)$, d'où un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^*(v, \mathrm{u}_1) \otimes \cdots \otimes H^*(v, \mathrm{u}_k) \otimes H^*(v, \mathrm{u}) & \xrightarrow{\ \cup\ } & H^*(v, v) = 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ \underbrace{\tilde{H}^*(v) \otimes \cdots \otimes \tilde{H}^*(v)}_{k \text{ termes}} \otimes H^*(v, v^-) & \xrightarrow{\ \cup\ } & H^*(v, v^-) \end{array}$$

donc la condition (B4) entraîne $k > l$.

Donc, $\mathscr{S}_N$ a au moins $\mathrm{CL}(M) + 1$ points critiques, ce qu'il fallait démontrer.

Construction de (v, v^-). Donnons d'abord une définition: Soient W une variété de dimension finie, Z un champ de vecteurs sur W de flot (φ_t), et A, B deux parties fermées de W, $A \subset B$. Le *saturé total* de A dans B pour Z est la plus petite partie fermée F de B contenant A telle que:

- Si $x \in F$ et $\varphi_s(x) \in B$ pour s entre 0 et t, alors $\varphi_t(x) \in F$;
- Si $\varphi_t(x) \in B$ pour $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty < t \leqslant 0$) et si $\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) \in F$ (resp. $\lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) \in F$), alors $x \in F$.

Ensuite, on pose, pour $a < b$ et $K > 0$:

$$B(\mathscr{S}_N, a, K) = \mathscr{S}_N^{-1}(a) \cap F_N^{-1}([0, K]);$$

$V(\mathscr{S}_N, a, K, b) =$ saturé total de $B(\mathscr{S}_N, a, K)$ dans $\mathscr{S}_K^{-1}([a, b])$ pour Z_N.

Nous allons voir que pour un choix judicieux de a, b et K, la paire $(v, v^-) = (V(\mathscr{S}_N, a, K, b),\ B(\mathscr{S}_N, a, K))$ satisfait (B1) à (B4). Pour cela, nous devons auparavant voir ce qui se passe avec la fonction non perturbée $\mathscr{A}_N$.

(A) *Voisinages de Morse généralisés* (VMG).

On définit $B(\mathscr{A}_N, a, K)$ et $V(\mathscr{A}_N, a, K, b)$ avec $\mathscr{A}_N$, Z_N^0 au lieu de $\mathscr{S}_N$, Z_N. La propriété (5.5) implique $F_N | V(\mathscr{A}_N, a, K, b) \leqslant K + (b - a)/\pi\alpha$, donc $V(\mathscr{A}_N, a, K, b)$ est compact. On dira que $V(\mathscr{A}_N, a, K, b)$ est un VMG (pour $(\mathscr{A}_N, M)$) s'il contient M dans son intérieur. Pour cela, il suffit que:

- $a < 0 < b$;
- $K > 1/\pi\alpha \cdot |a|$.

En effet, d'après (5.5), la deuxième condition implique que toute orbite de Z_N^0 qui aboutit à un point de M intersecte $\mathscr{A}_N^{-1}(a)$ sur $B(\mathscr{A}_N, a, K)$, donc est contenue dans $V(\mathscr{A}_N, a, K, b)$ d'après la première condition.

Soit $V = V(\mathscr{A}_N, a, K, b)$ un VMG, et posons $V^- = V \cap \mathscr{A}_N^{-1}(a)$ ($= B(\mathscr{A}_N, a, K)$ comme on le voit facilement). Soient $V(\nu^-)$ l'espace total de la "composante négative" du fibré normal à M, et $E^0(\nu^-) = E(\nu^-) \setminus M$. D'après la généralisation par Bott de la théorie de Morse au cas des variétés critiques non dégénérées [4], il exists i: $(E(\nu^-),\ E^0(\nu^-)) \to (V, V^-)$ commutant avec les projections π: $E(\nu^-) \to M$ et τ: $V \subset L_N \to M$, et telle que i^*: $H^*(V, V^-) \to H^*(E(\nu^-),\ E^0(\nu^-))$ soit un isomorphisme (coefficients quelconques).

Notons $e(\nu^-)$ la classe d'Euler de ν^- et ω l'élément correspondant de $H^*(V, V^-)$. On a alors un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{H}^*(V) \arrow[rr, "\cup\omega"] \arrow[d, "i^*"] & & H^*(V,V^-) \arrow[d, "i^*", "\cong"'] \\ \tilde{H}^*(M) \arrow[ur, "\tau^*"] \arrow[r, "\cong", "\pi^*"'] & \tilde{H}^*(E(\nu^-)) \arrow[rr, "\cup e(\nu)", "\cong"'] & & H^*(E(\nu), E^0(\nu^-)) \end{tikzcd}$$

ce qui implique $\mathrm{CL}_{\mathrm{rel}}(V, V^-) \geqslant \mathrm{CL}(M) + 1$.

Notons aussi que si $a < a' < 0$, alors en suivant les orbites de Z_N^0 paramétrées par $\mathscr{A}_N$, on obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} V(\mathscr{A}_N, a, K, a') \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathscr{A}_N"'] & & B(\mathscr{A}_N, a, K) \times [a, a'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ & [a, a'] & \end{tikzcd}$$

donc $V(\mathscr{A}_N, a, K, a')$ est un "voisinage collier" de $B(\mathscr{A}_N, a, K)$.

Enfin, supposons que nous ayons deux VMG, V_1, et V_2, et un voisinage collier $C(V_2^-) \subset V_2$ tels que $(V_1, V_1^-) \subset (V_2, C(V_2^-))$, alors cette inclusion induit un isomorphisme de $H^*(V_2, V_2^-)$ sur $H^*(V_1, V_1^-)$ (coefficients quelconques).

(B) *Réalisation des propriétés* (B1) *à* (B4).

(1) La propriété (B1) sera satisfaite sous l'hypothèse:

$$\sup(K, C_9) + C_{10}(b - a) < \frac{\operatorname{Log} N}{2R^2}. \tag{6.1}$$

En effet, soit $x \in v$: alors quant on considère l'orbite de Z_N passant par x, la définition du saturé total implique qu'une au moins des deux propriétés suivantes est satisfaite:

- l'orbite passe par un point de v^-;
- elle a pour point limite un point critique de $\mathscr{S}_N$ dans $\mathscr{S}_N^{-1}([a, b])$.

D'après (5.4), on en déduit:

$$v \subset F_N^{-1}([0, \sup(K, C_9) + C_{10}(b - a)]),$$

qui est compact d'après (6.1) et la proposition 7(a).

(2) La propriété (B2) sera satisfaite si on a de plus:

$$a \leqslant -C_{13}, \qquad b \geqslant C_{13}; \tag{6.2}$$

$$C_9 + C_{10}(b - a) < K. \tag{6.3}$$

En effet, soit x un point critique de $\mathscr{S}_N$: alors, d'après (5.8) et (6.2), on a $a < \mathscr{S}_N(x) < b$, et d'après (5.4), on a $F_N(x) < C_9$: ces inégalités persistent pour y voisin de x. Considérons ensuite la demi-orbite de $-Z_N$ issue de y: d'après (5.5) et (6.3), tant qu'elle reste dans $\mathscr{S}_N^{-1}([a, b])$ elle reste dans $F_N^{-1}([0, K])$ donc (6.1) l'empêche de "partir à l'infini"; elle aboutit donc ou bien à un point critique de $\mathscr{S}_N$ ou bien à un point de $\mathscr{S}_N^{-1}(a) \cap F_N^{-1}([0, K]) = v^-$. D'après la définition du saturé total, on en déduit que $y \in v$, donc $x \in \mathring{v}$: ainsi $\mathring{v}$ contient tous les points critiques de $\mathscr{S}_N$, et a fortiori (B2) est satisfaite.

(3) (B3)(i) est évidemment toujours satisfaite. Quant à (B3)(ii) lle sera satisfaite sous l'hypothèse (6.3). En effet, soit $x \in v \setminus v^-$:

- si $\mathscr{S}_N(x) > a$, alors $\varphi_t(x) \in v$ pour $t < 0$, $|t|$ assez petit d'après la définition du saturé total;
- si $\mathscr{S}_N(x) = a$, alors $x \in \mathscr{S}_N^{-1}(a) \setminus v^-$; soit $y \in \mathscr{S}_N^{-1}(a) \setminus v^-$, alors $F_N(y) > K$, donc (6.3) empêche l'orbite de y pour Z_N d'aboutir à un point critique de $\mathscr{S}_N$ dans $\mathscr{S}_N^{-1}([a, b])$: mais alors la considération de $W = v \setminus \{Z_N\text{-orbites issues de } \mathscr{S}_N^{-1}(a) \setminus v^-\} \cap \mathscr{S}_N^{-1}([a, b])$ contredit la minimalité de v dans la définition du saturé total.

(4) Pour obtenir (B4), nous allons montrer qu'outre a, b, K, on peut choisir a', a_i, b_i, K_i $(i = 1, 2)$, a_2' de sorte que, si l'on pose:

$$V_i = V(\mathscr{A}_N, a_i, K_i, b_i), \qquad V_i^- = B(\mathscr{A}_N, a_i, K_i),$$

$$C(v^-) = V(\mathscr{S}_N, a, K, a'), \qquad C(V_2^-) = V(\mathscr{A}_N, a_2, K_2, a_2'),$$

on ait:

$$(V_1, V_1^-) \subset (v, C(v^-)) \subset (V_2, C(V_2^-)); \tag{6.4}$$

$$a' \leqslant -C_{13}; \tag{6.5}$$

$$a_i < 0 < b_i; \tag{6.6}$$

$$K_i > \frac{1}{\pi\alpha}|a_i|; \tag{6.7}$$

$$a_2' < 0. \tag{6.8}$$

Supposant (6.1) à (6.8) satisfaites, montrons comment en déduire (B4) (6.6) et (6.7) entraînent que les (V_i, V_i^-) sont des (VMG). D'autre part, (6.5) implique que $C(v^-)$ ne contient aucun point critique de $\mathscr{S}_N$. Comme il est compact car contenu dans v, on a:

$$\begin{tikzcd} C(v^-) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathcal{S}_N"'] & & v^- \times [a, a'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ & {[a, a']} & \end{tikzcd}$$

Ceci, joint à (6.8) et aux propriétés des (VMG), permet de déduire de (6.4):

$$H^*(V_2, V_2^-) \xrightarrow{i^*} H^*(v, v^-) \xrightarrow{j^*} H^*(V_1, V_1^-),$$

la composée $j^* \circ i^*$ étant un isomorphisme.

Donc i^* est injective, ce qui implique $\mathrm{CL}_{\mathrm{rel}}(v, v^-) \geqslant \mathrm{CL}_{\mathrm{rel}}(V_2, V_2^-) \geqslant \mathrm{CL}(M) + 1$.

Choix de a, b, K, $a' \cdots$. Posons d'abord:

$$\begin{aligned} a_1 &= -C_{11} - C_{13} = -2C_{11} - C_{12}; \\ b_1 &= C_{11}; \\ K_1 &= \frac{1}{\pi\alpha}|a_1| + 1. \end{aligned}$$

Alors, (6.6) et (6.7) seront satisfaites.

Ensuite, soient:

$$\begin{aligned} a &= a_1 - C_{11} = -2C_{11} - C_{13}; \\ b &= b_1 + C_{11} = 2C_{11}; \\ K &= \sup\left(K_1 + \frac{1}{\pi\alpha}(b_1 - a_1), C_9\right) + C_{10}(b - a); \end{aligned}$$

alors (6.2) et (6.3) seront satisfaites.

Enfin, soient:

$$\begin{aligned} a' &= a_1 + C_{11} = -C_{13}; \\ a_2 &= a - C_{11} = -3C_{11} - C_{13}; \\ b_2 &= b + C_{11} = 3C_{11}; \\ K_2 &= \sup(K, C_9) + C_{10}(b - a) + \frac{1}{\pi\alpha}(b_2 - a_2) + 1; \\ a_2' &= a' + C_{11} = -C_{12}; \end{aligned}$$

alors (6.5) et (6.8) seront satisfaites.

Reste à prouver (6.1) et (6.4); la première s'écrit:

$$L(\alpha, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}) < \frac{\operatorname{Log} N}{2R^2},$$

et sera donc satisfaite pour N assez grand. Enfin, nous allons montrer qu'on a $V_1 \subset v$, les autres inclusions de (6.4) ayant une preuve tout à fait analogue.

Soit $x \in V_1$; alors $a_1 \leqslant \mathscr{A}_N(x) \leqslant b_1$ entraîne $a \leqslant \mathscr{S}_N(x) \leqslant b$, de plus on a $F_N(x) \leqslant K_1 + (b_1 - a_1)/\pi\alpha$. Suivons l'orbite de $-Z_N$ issue de x jusqu'à sortir (éventuellement) de $\mathscr{S}_N^{-1}([a, b])$:

● ou bien elle aboutit à un point critique de $\mathscr{S}_N$: on sait que ce point est dans v, donc x lui-même est dans v d'après la définition du saturé total;

● ou bien elle aboutit à un point y de $\mathscr{S}_N^{-1}(a)$, et l'on a:

$$F_N(y) \leqslant \sup\left(K_1 + \frac{1}{\pi\alpha}(b_1 - a_1), C_9\right) + C_{10}(b - a) < K,$$

donc $y \in v^-$ et $x \in v$, ce qui achève la démonstration.

7. Complement. Cas où les points fixes sont non dégénérés

Notons $\mathrm{SB}(M) = \max_{K \text{ corps}} \Sigma_i \dim H^i(M; K)$. La théorie de Morse (cf. [5, p. 338]) dit que toute fonction de Morse sur M a au moins $\mathrm{SB}(M)$ points critiques. Ce minorant est optimal si $M = T^{2n}$ ($\to 2^{2n}$), $M =$ surface de genre g ($\to 2g + 2$), $M = C\mathbf{P}^n$ ($\to n + 1$, pas mieux que pour une fonction quelconque).

Théorème complémentaire. *Soit (M, φ) vérifiant les hypothèses du théorème principal, plus le fait que les points fixes de φ sont non dégénérés. Alors, φ a au moins* $\mathrm{SB}(M)$ *points critiques.*

Démonstration. Rappelons qu'un point fixe p est dit non dégénéré si $T_p\varphi$ ($\in \operatorname{End} T_pM$) n'a pas 1 pour valeur propre. De façon équivalente, l'équation linéarisée de $\dot\varphi_t = X_{h_t} \circ \varphi_t$, à savoir:

$$\dot\xi_t = DX_{h_t} \circ \xi_t, \qquad \xi_t \in T_{\varphi_t}(p),$$

n'a pas de solution non nulle telle que $\xi(1) = \xi(0)$.

On en déduit (exercice) que si $\xi \in \hat{T}_c\Lambda$, ($c(t) = \varphi_t(p)$), alors

$$\int \left|\dot\xi_t - DX_{h_t} \circ \xi_t\right|^2 dt \geqslant C \cdot \|\xi\|_1^2, \qquad C > 0$$

(C dépend du choix du point fixe). Donc si $c' \in \Lambda$ est proche de c, c'est-à-dire $c' = \exp_c \xi$, avec $\|\xi\|_1$ petit, on a, en tenant compte de $(\dot{c} - X_{h_t} \circ c = 0)$:

$$\|\nabla S(\exp_c \xi)\|_0 = \left\|\left(\overline{\exp_c \xi}\right) - X_{h_t} \circ (\exp_c \xi)\right\|_0 \sim \left\|\dot{\xi} - DX_{h_t} \circ \xi\right\|_0;$$

$$\|\nabla S(\exp_c \xi)\|_0 \geqslant C\|\xi\|_1, \qquad C > 0,\ \|\xi\|_1 \to 0.$$

Cette inégalité traduit le fait que le point critique c est faiblement non dégénéré au sens de [22, p. 241]. Comme par hypothèse il en est ainsi pour tous les points critiques de S, on peut dire que S est "faiblement de Morse". La même propriété est vraie pour $\mathscr{S}$, c'est-à-dire que si χ_a: $T_a L \to L$ est une carte locale près d'un point critique, on a:

$$\|\nabla \mathscr{S}(\chi_a(\xi))\|_0 \geqslant C\|\xi\|_1, \qquad \|\xi\|_1 \to 0.$$

D'après l'inégalité (3.4), on a de même:

$$\|Z(\chi_a(\xi))\|_0 \geqslant C\|\xi\|_1, \qquad \|\xi\|_1 \to 0.$$

Nous allons en déduire que $\mathscr{S}_N$ est une " vraie" fonction de Morse (en fait une minoration par $C\|\xi\|_0$ suffira). En effet, soit a_N un point critique de $\mathscr{S}_N$. Notons $a = u_N(a_N)$ et:

$$\chi_{a_N}\colon U(\subset T_{a_N} L_N) \to L_N, \qquad T_{a_N}\chi_{a_N} = \mathrm{id};$$

$$\chi_a\colon U'(\subset T_a L) \to L, \qquad T_a \chi_a = \mathrm{id}$$

des cartes locales. Soit $\xi_N \in U$, alors, d'après (5.2), on a:

$$\left\|Z_N\left(\chi_{a_N}(\xi_N)\right)\right\|_0 = \left\|Z\left(u_N \circ \chi_{a_N}(\xi_N)\right)\right\|_0.$$

De plus, si $\xi_N \to 0$ (pour n'importe quelle norme), alors $u_N \circ \chi_{a_N}(\xi_N) \to a$, donc:

$$\begin{aligned}\left\|Z\left(u_N \circ \chi_{a_N}(\xi_N)\right)\right\|_0 &\geqslant C\left\|\chi_a^{-1} \circ u_N \circ \chi_{a_N}(\xi_N)\right\|_0\\ &\geqslant C'\|Tu_N(\xi_N)\|_0\\ &\geqslant C'\|\xi_N\|_0.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après (5.2), (3.7) et (5.1), on a:

$$\left\|\nabla \mathscr{S}_N(a'_N)\right\|_0 \geqslant \frac{C_4}{2}\left\|Z_N(a'_N)\right\|_0, \qquad a'_N \in U_N;$$

d'où finalement:

$$\left\|\nabla \mathscr{S}_N\left(\chi_{a_N}(\xi_N)\right)\right\|_0 \geqslant C''\|\xi_N\|_0, \qquad \|\xi_N\|_0 \to 0,$$

c'est-à-dire que a_N est un point critique non dégénéré pour $\mathscr{S}_N$, ce qu'on voulait démontrer.

Pour achever la démonstration, on reprend le v trouvé au §6, et on applique la théorie de Morse relative (cf. [5, p.341]); le fait que v n'est pas une variété n'est pas gênant, on peut d'ailleurs y remédier en remplaçant $B(\mathscr{S}_N, a, K)$ par une sous-variété de $\mathscr{S}_N^{-1}(a)$ (niveau régulier de $\mathscr{S}_N$) comprise entre $B(\mathscr{S}_N, a, K)$ et $B(\mathscr{S}_N, a, K+1)$: le résultat est que $\mathscr{S}_N$ a au moins $SB(v, v^-)$ points critiques dans v. Comme d'autre part, on a:

$$\tilde{H}^*(M) \simeq H^*(V_2, V_2^-) \hookrightarrow H^*(v, v^-)$$

(coefficients quelconques), on en déduit que $SB(v, v^-) \geqslant SB(M)$, ce qui achève la preuve du théorème complémentaire.

Appendice. Inégalités sur l'application exponentielle

La méthode de preuve est celle de [6, pp. 94–101] et [13] appendices: cette dernière référence est moins facile à lire que la première, mais est la seule à donner l'inégalité cruciale $-D_1E \leqslant \lambda r/\mathrm{th}\,\lambda r$, alors que [6] (6.4.6(i)) donne $1 + \frac{1}{2}\lambda^2 r^2$ (cf. la remarque (b) qui suit (3.2)). Nous indiquerons seulement le principe de la méthode et comment l'étendre aux dérivées secondes.

On note $\gamma = \gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ la géodésique de p à q parcourue à vitesse constante $|\gamma'(s)| = r$. L'équation des champs de Jacobi le long de γ s'écrit:

$$J''(s) + \rho(s) \cdot J(s) = 0,$$

où $\rho(s) = R(\gamma'(s), \cdot).\ \gamma'(s) \in \mathrm{End}(T_{\gamma(s)}\tilde{M})$.

Propriété. $\rho(s)$ est symétrique avec $-(\lambda r)^2 \leqslant \rho(s) \leqslant 0$.

Soit $J(s)$ une solution de cette équation telle que $J(0) = 0$: elle s'écrit: $J(s) = T(s)J'(0)$, où $T(s) \in \mathrm{Hom}(T_p\tilde{M}, T_{\gamma(s)}\tilde{M})$, avec:

$$T''(s) + \rho(s) \circ T(s) = 0;$$

$$T(0) = 0, \qquad T'(0) = \mathrm{id}.$$

En appliquant Gronwall à cette équation linéaire du second ordre et à l'équation de Ricatti qui s'en déduit, on montre:

- $\|T(s)\| \leqslant \mathrm{sh}(\lambda rs)/\lambda r$ (cf. [6, 6.3.8(ii)] et [13, inégalité (A.4.2)]);
- Pour $s > 0$, $T(s)$ est inversible et $\|T(s)^{-1}\| \leqslant 1/s$ (cf. [6, 6.3.5(i)] et [13, inégalitié (A.2.1)]);
- Pour $s > 0$, $T'(s)T(s)^{-1}$ est symétrique et $1/s \leqslant T'(s)T(s)^{-1} \leqslant \lambda r/\mathrm{th}(\lambda rs)$ (cf. [13, Lemme p. 532 et inégalités (A.4.1) et (A.5.1)]).

D'autre part, on montre:

- $D_1E(q, p) = -T'(1)T(1)^{-1}$ (cf. [6, 6.4.6(i)]);
- $d_2E(p, q) = (d\exp_p^{-1})_q = T(1)^{-1}$ (cf. [6, 6.3.2] et [13, corollaire (B.2.1)]).

Les propriétés (E1) à (E3) en sont une conséquence immédiate, la seconde inégalité de (E1) résultant de $(x/\mathrm{th}\,x \leqslant 1 + x)$.

Pour majorer les dérivées secondes de E, on écrit l'équation "aux variations"

$$W''(s) + \rho(s) \circ W(s) = -D(\rho(s)) \circ T(s),$$
$$W(0) = W'(0) = 0,$$

où

$$W(s) \in \operatorname{Hom}\big(T_p\tilde{M} \oplus T_q\tilde{M}, \operatorname{Hom}\big(T_p\tilde{M}, T_{\gamma(s)}\tilde{M}\big)\big),$$

et

$$D(\rho(s)) \in \operatorname{Hom}\big(T_p\tilde{M} \oplus T_q\tilde{M}, \operatorname{End}\big(T_{\gamma(s)}\tilde{M}\big)\big)$$

est la dérivée covariante de l'application $(p, q) \mapsto \rho(s)$, considérée comme section d'un fibré $\mathscr{E}_s$ sur $\tilde{M} \times \tilde{M}$ de fibre $(\mathscr{E}_s)_{p,q} = \operatorname{End}(T_{\gamma(s)}\tilde{M})$. On a alors:

$$D(d_2E)(p,q) = -T(1)^{-1}W(1)T(1)^{-1};$$
$$D(D_1E)(q,p) = -W'(1)T(1)^{-1} + T'(1)T(1)^{-1}W(1)T(1)^{-1}.$$

Se rappelant que $\rho(s) = R(\gamma'(s), \cdot)\gamma'(s)$, on majore:

$$\|D(\rho(s))\| \leqslant \max_M \|DR\| \cdot r^2 + 2\lambda^2 r \cdot \|D(\gamma'(s))\|;$$
$$\|D(\gamma'(s))\| \leqslant 1 + \lambda r \quad \big(\text{mjaoration analogue ą celles de } \|D_1E\| \text{ et } \|d_2E\|\big);$$
$$\|D(\rho(s)) \circ T(s)\| \leqslant \text{cste} \cdot (1 + \lambda r)^2 \cdot \frac{\operatorname{sh}(\lambda rs)}{\lambda r} \leqslant \text{cste} \cdot e^{\lambda rs}(1 + \lambda r).$$

Par Gronwall, on en déduit:

$$\|W'(s)\| \leqslant \text{cste} \cdot e^{\lambda rs}(1 + \lambda r);$$
$$\|W(s)\| \leqslant \text{cste} \cdot e^{\lambda rs};$$

d'où (E4) et (E5) résultent en combinant avec les inégalités sur $T(1)$ et $T'(1)$.

Bibliographie

[1] V. I. Arnold, *Commentaires sur l'article de Poincaré "Sur un théorème de geométrie"*, Oeuvres choisies de Poincaré, Vol. 2, Moscou, 1972 (en russe), 987–989.

[2] ______, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1976.

[3] ______, *Fixed points of symplectic diffeomorphisms*, Mathematical developements arising from Hilbert problems, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 28, Amer. Math. Soc., 1976, 66.

[4] R. Bott, *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math. (2) **60** (1954) 248–261.

[5] ______, *Lectures on Morse theory, old and new*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982) 331–358.

[6] P. Buser & H. Karcher, *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque, Soc. Math. France **81** (1981).

[7] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[8] M. Chaperon, *Quelques questions de géométrie symplectique*, Séminaire Bourbaki 1982-83, n° 610, Astérisque, Soc. Math. France **105, 106** (1983).

[9] C. C. Conley & E. Zehnder, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold*, Invent. Math. **73** (1983) 33–49.

[10] Ya. M. Eliashberg, *Estimation du nombre de points fixes des applications préservant l'aire (en russe)*, Université de Syktyvkar, 1978.

[11] A. Floer, *Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations for certain Kähler manifolds*, Ruhr-Universität Bochum, 1984.

[12] B. Fortune & A. Weinstein, *A symplectic fixed point theorem for complex projective spaces*, Berkeley, 1984.

[13] H. Karcher, *Riemannian center of mass and mollifier smoothing*, Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977) 509–541.

[14] W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren Math. Wiss., Springer, Berlin **230** (1978).

[15] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vols. I, II, Wiley, New York, 1963, 1969.

[16] J. Moser, *On the volume elements of a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965) 286–294.

[17] N. Nikishin, *Fixed points of diffeomorphisms on the two-sphere that preserve area*, Functional Anal. Appl. (1974) 77–79.

[18] C. L. Siegel, *Topics in complex function theory*. III, Wiley, New York, 1973.

[19] J.-C. Sikorav, *Points fixes d'un symplectomorphisme homologue à l'identité*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **299** (1984) 343–346.

[20] C. P. Simon, *A bound for the fixed point index of an area preserving map* $\cdots$, Invent. Math. **26** (1974) 187–200.

[21] A. Weinstein, *Lectures on symplectic geometry*, Conf. Board Math. Sci., Reg. Conf. Series, Amer. Math. Soc. Vol. 29, 1977.

[22] ______, *Bifurcations and Hamilton's principle*, Math. Z. **159** (1978) 235–248.

[23] ______, *C^0-perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections*, Univ. of California, Berkeley, 1983.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD, ORSAY