J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
20 (1984) 137–142

LE RAYON D'INJECTIVITÉ DES SURFACES À COURBURE MAJOREE

C. BAVARD

1. Introduction

1-1. Le résultat de cet article est le théorème: *si V est une surface riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle $K = K(V) \leqslant 1$, complète (resp.: à bord avec* $\operatorname{Max}_{\xi \in V} \operatorname{dist}(\xi, \partial V) \geqslant \pi$*), il existe un point p de V où le rayon d'injectivité* $\operatorname{Ray\,Inj}_p(V)$ *est supérieur ou égal à π.* Le cas de la sphère euclidienne montre que la borne π est optimale.

1-2. En dimension plus grande la situation est radicalement différente: pour tout $\varepsilon > 0$ on a une sphère de Berger (voir [3, p. 70]) vérifiant $K \leqslant 1$ et en tout point x $\operatorname{Ray\,Inj}_x(V) \leqslant \varepsilon$.

1-3. Notre résultat est à rapprocher du théorème suivant [6]: tout domaine V du plan euclidien bordé par une courbe de Jordan lisse à courbure géodésique $k_g(\partial V) \leqslant 1$ contient un disque de rayon 1. Nous en donnons une généralisation en 3-3.

De même, pour $V \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, si ∂V est une hypersurface fermée dont tous les rayons de courbure principaux sont $\geqslant 1$, alors V contient une boule de rayon $2/\sqrt{3} - 1$, [9].

Citons d'autres conditions assurant l'existence de points où le rayon d'injectivité est grand:

$-V$ est simplement connexe, $K \leqslant 0$; alors $\operatorname{Ray\,Inj}_x(V) = \infty$ pour tout $x \in V$.

$-V$ est compacte simplement connexe, de dimension paire (resp.: de dimension impaire $\geqslant 3$) et $0 < K \leqslant 1$ (resp.: $1/4 \leqslant K \leqslant 1$); alors $\operatorname{Ray\,Inj}_x(V) \geqslant \pi$ pour tout $x \in V$ ([3, pp. 98–100] et [8]).

$-V$ est simplement connexe de dimension 3 et $0 < k < K \leqslant 1$; alors $\operatorname{Ray\,Inj}_x(V) > 6\exp(-3/k)$ pour tout $x \in V$ ([1] et [11]).

Received December 5, 1983.

$-V$ est compacte de dimension n et $-1 \leqslant K < 0$; alors il existe un point p de V tel que $\operatorname{Ray}\operatorname{Inj}_p(V) \geqslant (1/4)^{n+3}$ ([2, p. 28] et généralisations dans [5, pp. 75 et 135]).

1-4. La preuve de notre théorème s'appuie sur [10], où il est montré que dans une surface V homéomorphe à S^2 le cut-locus de tout point x contient un point x' conjugué à x (dans [10] V est analytique; voir [12, p. 38] pour une version C^∞). Si de plus $K(V) \leqslant 1$, alors $\operatorname{dist}(x, x') \geqslant \pi$ (en particulier Diamètre$(V) \geqslant \pi$). Nous utilisons ce fait pour des points convenablement choisis. Enfin on avait déjà dans [4, App. 1] une propriété intermédiaire: il existe deux points p, q de V vérifiant $\operatorname{dist}(p, q) = \pi$ et $\operatorname{Ray}\operatorname{Inj}_p(V) + \operatorname{Ray}\operatorname{Inj}_q(V) \geqslant \pi$.

L'auteur remercie le Professeur M. Gromov pour ses suggestions durant la préparation de cet article.

2. Enoncé et démonstration des résultats

2-1. Quand $\partial V \neq \varnothing$, $\operatorname{Ray}\operatorname{Inj}_p(V) \geqslant \alpha$ signifie que l'exponentielle en p est définie dans la boule ouverte de rayon α et induit un difféomorphisme de $B(0, \alpha)$ sur $\operatorname{Exp}_p(B(0, \alpha)) \subset V$. dist ($=\operatorname{dist}^V$) est la distance de longueur de V (voir [5]) et on appelle rayon intérieur de V la quantité: $\operatorname{RInt}(V) = \operatorname{Sup}_{\xi \in V} \operatorname{dist}(\xi, \partial V)$.

2-2. Sur un espace métrique compact X on définit la "fonction périphérique"

$$\operatorname{Per}_p(X) = \text{Diamètre}(X) - \operatorname*{Max}_{\xi \in X} \operatorname{dist}(p, \xi), \qquad p \in X,$$

p est périphérique quand $\operatorname{Per}_p(X) = 0$. "Per" est 1-lipschitzienne, vérifie $0 \leqslant \operatorname{Per}_p(X) \leqslant \frac{1}{2}$ Diamètre(X), et pour les points d'une variété riemannienne V $\operatorname{Ray}\operatorname{Inj}_p(V) \leqslant \text{Diamètre}(V) - \operatorname{Per}_p(V)$.

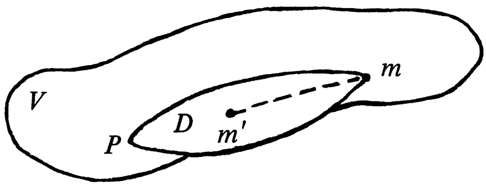
2-3. **Théorème.** *Soit V une surface riemannienne C^∞ simplement connexe à courbure $K_x(V) \leqslant 1$ en tout point x de V, complète si $\partial V = \varnothing$, avec* $\operatorname{RInt}(V) \geqslant \pi$ *si $\partial V \neq \varnothing$. Alors il existe un point p de V tel que*: $\operatorname{Ray}\operatorname{Inj}_p(V) \geqslant \pi$. *Plus précisément on a pour tout $x \in V$:*

(1) $\operatorname{Ray}\operatorname{Inj}_x(V) \geqslant \pi - \operatorname{Per}_x(V)$ *si V est homéomorphe à* $\mathbf{S}^2$.

(2) $\operatorname{Ray}\operatorname{Inj}_x(V) \geqslant \operatorname{dist}(x, \partial V) + \operatorname{Min}(0, \pi - \operatorname{RInt}(V))$ *si V est homéomorphe à* $\mathbf{D}^2$, *et sans hypothèse sur* $\operatorname{RInt}(V)$.

Remarque. (1) est stricte dès que $\operatorname{Per}_x(V) > 0$. (2) est une égalité si $\operatorname{RInt}(V) \leqslant \pi$ et est stricte si $\operatorname{RInt}(V) > \pi$ et $\operatorname{dist}(x, \partial V) < \operatorname{RInt}(V)$.

2-4. **Lemme.** *Considérons dans une surface C^∞ simplement connexe V, complète si $\partial V = \varnothing$, un disque D dont le bord est formé de deux géodésiques minimales reliant deux points p et m. Alors il existe un point m' et D conjugué à m le long d'une géodésique de D minimale.*

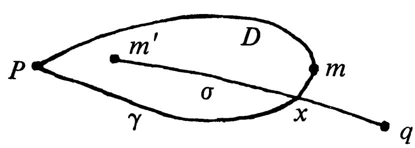


Preuve. Quitte à prolonger la métrique de V en une métrique complète sur $\mathbf{R}^2$, et qui induit sur V une distance plus petite que dist^V, on peut supposer $\partial V = \varnothing$.

On note A l'ensemble des points de coupure des géodésiques issues de m et qui rentrent dans D. D'après [10, p. 387] $A \subset \mathring{D} \cup \{p\}$. A contient le point m' cherché: autrement A serait l'image d'une immersion topologique φ: $[0,1] \to D$ avec $\varphi(0) = \varphi(1)$ et on montrerait en imitant [12, p. 38] que A contient une courbe de Jordan C; C borde un disque dans D, donc $V - \mathrm{CutLoc}(m)$ ne serait pas connexe.

Démonstration du théorème. Nous distinguerons trois cas, selon le type topologique de $V\,(\mathbf{S}^2, \mathbf{D}^2$ ou $\mathbf{R}^2)$.

2-5. *V homéomorphe à* $\mathbf{S}^2$. Considérons p un point de V avec $\mathrm{Ray\,Inj}_p(V) < \pi$ (quand $\mathrm{Ray\,Inj}_p(V) \geqslant \pi$ il n'y a rien à montrer). Il existe un lacet géodésique γ en p de longueur $2 \cdot \mathrm{Ray\,Inj}_p(V)$. D'après le Lemme 2-4 $\mathrm{Max}_{\xi \in V} \mathrm{dist}(p, \xi) \geqslant \pi$. Soit q un point où ce maximum est atteint. Nécessairement $q \notin \gamma$; soit D le disque bordé par γ qui ne contient pas q. Le Lemme 2-4 et l'hypothèse $K \leqslant 1$ nous donnent un point $m' \in \mathring{D}$ avec $\mathrm{dist}(m\,m') \geqslant \pi$, m étant le milieu de γ. Notons enfin σ une géodésique minimale de m' à q et x un point de $\sigma \cap \gamma$.



Alors $\mathrm{dist}(m', q) \geqslant \pi - \mathrm{dist}(m, x) + \mathrm{dist}(p,q) - \mathrm{dist}(p, x)$, i.e., $\mathrm{dist}(m', q) \geqslant \pi - \mathrm{Ray\,Inj}_p(V) + \mathrm{dist}(p, q)$, d'où $\mathrm{Ray\,Inj}_p(V) \geqslant \pi - \mathrm{Per}_p(V)$.

2-6. *V homéomorphe à* $\mathbf{D}^2$. V est un espace de longueur connexe (voir [5]). En particulier pour tout couple de points (a, b) de V il existe une courbe c reliant a et b de longueur $\mathrm{dist}(a, b)$; de plus c est une géodésique (au sens riemannien) au voisinage de ses points qui ne sont pas dans ∂V.Considérons p un point quelconque de V et γ: $[0, 2L] \to V$ un lacet géodésique (de vitesse 1) en p tel que $\gamma|[0, L]$ et $\gamma|[L, 2L]$ soient minimales. En raisonnant comme en 2-5 on trouve un point m' de V avec $\mathrm{dist}(m', \partial V) \geqslant \pi - L + \mathrm{dist}(p, \partial V)$, d'où

$$(*) \qquad L \geqslant \mathrm{dist}(p,\partial V) + \pi - \mathrm{RInt}(V).$$

Supposons maintenant que $\mathrm{Ray\,Inj}_p(V) < \mathrm{Min}(\mathrm{dist}(p, \partial V), \pi)$. Comme $B(p, \mathrm{dist}(p, \partial V)) \cap \partial V = \varnothing$ il existe un lacet géodésique en p dont la longueur $2 \cdot \mathrm{Ray\,Inj}_p(V) = 2L$ doit satisfaire l'inégalité $(*)$. Cela montre l'assertion (2) du Théorème 2-3.

2-7. **Remarque.** Un disque Δ dans une surface complète V porte deux distances: dist^Δ et $\mathrm{dist}^V|\Delta$. Or $\mathrm{dist}^V(x, \partial\Delta) = \mathrm{dist}^\Delta(x, \partial\Delta)$ pour tout $x \in \Delta$. Donc dès que $\mathrm{Max}_{\xi \in \Delta} K_\xi(V) \leqslant 1$ et $\mathrm{Max}_{\xi \in \Delta} \mathrm{dist}^V(\xi, \partial\Delta) \geqslant \pi$ le résultat 2-6 fournit un point de Δ où le rayon d'injectivité (dans V) est plus grand que π.

2-8. *V homéomorphe à $\mathbf{R}^2$.* Pour tout compact $C \subset V$ il existe un disque D à bord lisse contenant C: en effet, V est difféomorphe au plan euclidien pour lequel cette propriété est claire. Prenant pour C n'importe quelle boule fermée de rayon π on a $\mathrm{Max}_{\xi \in D} \mathrm{dist}^V(\xi, \partial D) \geqslant \pi$ et la Remarque 2-7 permet de conclure. Ce qui achève le démonstration du Théorème.

2-9. Remarque sur la géométrie de V quand $\partial V = \varnothing$. Il existe un 2π-réseau (voir [5]) de V dont les points p vérifient:

–ou bien $\mathrm{Ray\,Inj}_p(V) \geqslant \pi$,

–ou bien $\mathrm{Ray\,Inj}_p(V) < \pi$ et il existe un lacet γ en p tel que pour tout disque D bordé par γ $\mathrm{Max}_{\xi \in D} \mathrm{dist}(p, \xi) \geqslant 2\pi$; un tel disque contient un point p' avec $\mathrm{Ray\,Inj}_{p'}(V) \geqslant \pi$.

Preuve. Soit $x \in V$, $C = \overline{B}(x, 2\pi)$. Tout point $p \in C$ à distance maximale de ∂C convient; sinon on aurait γ lacet en p bordant un disque $D \subset B(p, 2\pi) \subset C$, et la construction de 2-5 donnerait un $m' \in D$ avec $\mathrm{dist}(m', \partial C) > \mathrm{dist}(p, \partial C)$ absurde. Dans le second cas, l'existence de p' s'établit par un argument analogue.

3. Conséquences

3-1. **Corollaire 1.** *Soit V une surface homéomorphe à $\mathbf{S}^2$ et $K(V) \leqslant 1$. Alors*:

(i) $\mathrm{Ray\,Inj}_x(V) \geqslant 2\pi - \mathrm{Diam}(V)$ *pour tout* $x \in V$.

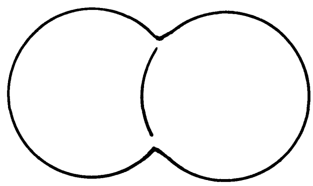
(ii) *Si* $\pi \leqslant \mathrm{Diam}(V) \leqslant 2\pi$ *alors* $\mathrm{Aire}(V) \geqslant 4\pi(1 - \cos(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{Diam}(V)))$; *si* $2\pi \leqslant \mathrm{Diam}(V)$ *alors* $\mathrm{Aire}(V) \geqslant 8\pi$.

Preuve. (i) D'après le Lemme 2-4 $\mathrm{Max}_{\xi \in V} \mathrm{dist}(p, \xi) \leqslant \pi$ pour tout $p \in V$, donc

$$\mathrm{Per}_p(V) \leqslant \mathrm{Diam}(V) - \pi.$$

(ii) Posons $r = \mathrm{Min}(\pi, \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Diam}(V))$. Pour p et q avec $\mathrm{dist}(p, q) = \mathrm{Diam}(V)$ les boules ouvertes $B(p, r)$ et $B(q, r)$ sont plongées et disjointes.

L'Inégalité (i) est stricte dès que $\mathrm{Diam}(V) > \pi$. L'inégalité (ii) est optimale: on peut recoller en une surface lisse à $K \leqslant 1$ deux disques de rayon $\geqslant \pi/2$ de $(\mathbf{S}^2, \mathrm{can})$.



3-2. **Corollaire 2.** *Pour toute métrique à courbure* $K \leqslant 1$ *sur le plan projectif réel* $\mathbf{RP}^2$ *il existe un point p tel que* $\operatorname{Ray\,Inj}_p \geqslant \pi/2$.

En effet si φ: $\tilde{M} \to M$ est un revêtement double riemannien alors $\operatorname{Ray\,Inj}_{\varphi(\tilde{x})}(M) \geqslant \frac{1}{2}$. $\operatorname{Ray\,Inj}_{\tilde{x}}(\tilde{M})$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}$.

3-3. Considérons V un disque riemannien orienté. Si n est la normale rentrante, on oriente ∂V par un vecteur unitaire u tel que (u, n) soit directe et on pose $K_g(\partial V) = \langle \nabla_u u, n \rangle$.

Corollaire 3. *Soit V un disque riemannien avec* $K(V) \leqslant \Lambda^2$ $(\Lambda \geqslant 0)$ *et pour un certain réel k,* $K_g(\partial V) \leqslant k$. *Alors si* $\Lambda = 0$ *on a nécessairement* $k > 0$; *dans tous les cas il existe un point p de V tel que*:

(3-3) $\quad \operatorname{Ray\,Inj}_p(V) \geqslant 1/\Lambda \cdot \operatorname{Arc\,cotg}(k/\Lambda) \qquad$ (*lire* $1/k$ *si* $\Lambda = 0$).

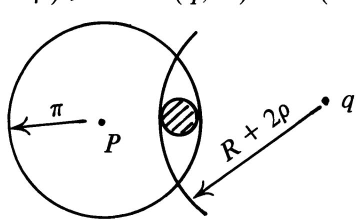
Il suffit de voir que $\operatorname{RInt}(V) \geqslant 1/\Lambda \cdot \operatorname{Arc\,cotg}(k/\Lambda)$. Or le cut-locus de ∂V dans le fibré normal N à ∂V contient un point v singulier pour $\operatorname{Exp}_{|N}$: sinon $\operatorname{CutLoc}(\partial V) \subset V$ serait l'image d'un cercle par une immersion topologique et $V - \operatorname{CutLoc}(\partial V)$ ne serait pas connexe (noter l'analogue avec le Lemmi 2-4). Mais d'après [5, p. 111] $\|v\| \geqslant 1/\Lambda \cdot \operatorname{Arc\,cotg}(k/\Lambda)$ si $\Lambda > 0$, $k > 0$ et $\|v\| \geqslant 1/k$ si $\Lambda = 0$. Donc $\operatorname{dist}(\operatorname{Exp}_{|N}(v), \partial V) \geqslant 1/\Lambda \cdot \operatorname{Arc\,cotg}(k/\Lambda)$.

Pour les disques $V = \bar{B}(p, r)$ $(r < \pi/\Lambda)$ dans la surface à courbure constante Λ^2, (3-3) est une égalité.

3-4. **Corollaire 4.** $\operatorname{Min\,Vol}(\mathbf{R}^2) > 4\pi + 0{,}484$.

Il s'agit de minorer l'aire d'une métrique complète sur $\mathbf{R}^2$ avec $|K| \leqslant 1$ (voir [4, App. 1]). Soit $p \in V$ un point où $\operatorname{Ray\,Inj}_p(V) \geqslant \pi$, $q \in V$ avec $R = \operatorname{dist}(q, B(p, \pi)) > 0$, et ρ un réel $0 < \rho \leqslant \pi/2$. Pour tout point x de $B(p, \pi)$ on a $\operatorname{Ray\,Inj}_x(V) \geqslant \pi - \operatorname{dist}(p, x)$: raisonner par l'absurde en appliquant le lemme d'homotopie de Klingenberg [7, p. 205] (ou bien utiliser de Théorème 2-3). Donc $B(q, R + 2\rho) \cap B(p, \pi)$ contient une boule plongée de rayon ρ disjointe de $B(q, R)$, et

(a) $\qquad \operatorname{Aire} B(q, R + 2\rho) \geqslant \operatorname{Aire} B(q, R) + 2\pi(1 - \cos\rho)$.



Par ailleurs, puisque $K \geqslant -1$, on a

$$\text{(b)} \qquad \frac{\text{Aire}\, B(q, R)}{\text{Aire}\, B(q, R + 2\rho)} \geqslant \frac{\text{ch}(R) - 1}{\text{ch}(R + 2\rho) - 1}.$$

De (a) et (b), et comme R peut être arbitrairement grand on déduit l'inégalité:

$$\text{Aire}(V) \geqslant 4\pi + 2\pi \frac{1 - \cos\rho}{\exp(2\rho) - 1}.$$

Enfin on choisit $\rho = 0,73$.

Rajouté sur épreuves. Le Professeur M. Gromov a récemment informé l'auteur qu'un résultat analogue à 1.1 se trouve dans l'article de Y. Burago, *The radius of injectivity on the surfaces whose curvature is bounded above*, Ukrain Geometr. Sb. **21** (1978), 10–14, en russe.

Bibliographie

[1] Y. Burago & V. Toponogov, *On three-dimensional riemannian spaces with curvature bounded from above*, Math. Notes **13** (1973) 526–530.
[2] P. Buser & H. Karcher, *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque 81, Soc. Math. France, 1981.
[3] J. Cheeger & D. Ebin, *Comparaison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
[4] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 56 (1982) 5–99.
[5] M. Gromov, J. Lafontaine & P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cédic/Fernand Nathan, Paris, 1981.
[6] V. Ionin & G. Pestov, *On the largest possible circle imbedded in a given closed curve*, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. **127** (1959) 1170–1172.
[7] W. Klingenberg, *Riemannian geometry*, De Gruyter Studies in Mathematics, No. 1, De Gruyter, Berlin and New York, 1982.
[8] W. Klingenberg & T. Sakai, *Injectivity radius estimate for* $1/4$*-pinched manifolds*, Arch. Math. **34** (1980) 371–376.
[9] V. Lagunov, *On the largest sphere contained in a closed surface*. I, II, Sibirsk. Mat. Z. **1** (1960) 205–232, **2** (1961) 874–883.
[10] S. Myers, *Connexion between differential geometry and topology*, Duke Math. J. **1** (1935) 376–391.
[11] T. Sakai, *On a theorem of Burago-Toponogov*, preprint.
[12] A. Weinstein, *The cut locus and conjugate locus of a riemannian manifold*, Ann. of Math. **87** (1968) 29–41.

UNIVERSITÉ DE PARIS - SUD