J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
20 (1984) 121–135

AUTOUR DU THÉORÈME DE HOLMGREN SUR L'UNICITÉ DE CAUCHY

XAVIER SAINT RAYMOND

Dans le présent travail, nous nous proposons d'améliorer certains résultats sur l'unicité de Cauchy pour des problèmes analytiques ainsi que pour quelques problèmes analogues. Les principaux travaux établissant des théorèmes d'unicité se succèdent historiquement de la façon suivante: Cauchy [7], Kowalevsky [14], Holmgren [10], John [13], Hörmander [11, Theorems 5.3.1 and 5.3.2], Bony [6], et enfin Sjöstrand [17, Théorème 8.9] dont le théorème contient tous les précédents. Pour les réciproques, la littérature est moins riche; à part le cas des coefficients constants (Hörmander [11, Theorem 5.2.2]) et celui des équations du premier ordre (Zachmanoglou [20]), nous ne connaissons, aux variantes près, qu'un seul théorème de non-unicité dont les premières versions semblent remonter à Goursat [9], et qu'on peut trouver dans Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [4, Corollary 1.1]; c'est ce théorème qui est utilisé dans Zachmanoglou [19] pour obtenir des conditions nécessaires à l'unicité dans le cas d'un symbole réel.

Le premier résultat que nous présentons ici, le Corollaire 2.2, est un résultat d'unicité qui prolonge celui de Bony [6]. Ne sachant pas s'il est contenu dans les théorèmes de Sjöstrand, nous l'avons mis ici surtout à cause de l'originalité de la démonstration qui repose sur le calcul de la dimension de Hausdorff du fibré des normales à un fermé (Théorème 2.1).

Puis nous donnons avec le Théorème 2.4 l'équivalent pour un symbole principal complexe du théorème de non-unicité de Zachmanoglou [19]. Ce résultat, ainsi que les Théorèmes 2.9 et 2.10 qui lui sont parallèles, apparaît comme une réciproque aux théorèmes d'unicité précédents; toutefois, dans le cas analytique, il nous a fallu ajouter des hypothèses en vue d'obtenir une solution dont le support soit un demi-espace: c'est le sens des Théorèmes 2.5 et 2.6.

Received November 5, 1983.

1. Notations-theorie de Bony-Sjöstrand

Nous nous donnons, au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$, une fonction $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ à valeurs réelles telle que $\xi_0 = d\varphi(x_0) \neq 0$. La question de l'unicité de Cauchy peut être posée dans les termes suivants: existe-t-il au voisinage de x_0 une distribution $u \in \mathscr{H}$ telle que:

$$\begin{aligned} &Pu = 0 \quad \text{et} \\ &x_0 \in \operatorname{supp} u \subset \{x \in \mathbf{R}^n / \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}? \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si la réponse est négative, on dira qu'il y a unicité de Cauchy.

Nous envisagerons les trois situations suivantes:

Cas n°1. P est un opérateur différentiel linéaire à coefficients analytiques au voisinage de x_0 et $\mathscr{H} = \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Cas n°2. P est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre à coefficients (complexes) C^∞ et vérifiant la condition de résolubilité locale (P) (cf. Strauss et Trèves [18]) dans un voisinage de x_0; $\mathscr{H} = H^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. (Pour les cas où la condition (P) n'est pas vérifiée, on pourra consulter Alinhac [1, Théorème 1] et Robbiano [15].)

Cas n°3. $P = \sum_{j=1}^r X_j^2 + X_0 + c$, où $X_1, \ldots, X_r$ sont des champs réels C^∞ linéairement indépendants en x_0 et vérifiant la condition de Frobenius au voisinage de x_0, X_0 et c sont des termes d'ordres inférieurs complexes et C^∞, et X_0 est combinaison linéaire de $X_1, \ldots, X_r$; $\mathscr{H} = H^{(n-r+4)/2}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. (Pour les cas où la condition de Frobenius n'est pas vérifiée, on pourra consulter Bahouri [3].)

Dans ces trois situations, nous disposons d'un "théorème de Holmgren" qui s'énonce: si $p(x_0, \xi_0) \neq 0$, le problème (1.1) n'admet pas de solution (ici, p désigne le symbole principal de l'opérateur P); dans le Cas 1, c'est le théorème de Holmgren classique, dans le Cas 2, c'est le Théorème 1 de Strauss et Trèves [18], et dans le Cas 3, on le démontre facilement à partir du théorème de Aronszajn et Cordes, cf. Aronszajn [2]. Nous pouvons donc leur appliquer la théorie de Bony et Sjöstrand que nous rappelons brièvement ici pour fixer les notations. Pour les démonstrations, nous renvoyons le lecteur à Sjöstrand [17, Chapitre 8] ou Hörmander [12, Chapters 8.5 and 8.6].

Définition 1.1. *Soit F une partie fermée d'une variété C^2 notée X; le fibré des normales à F, N^*F, est l'ensemble des $(x, \xi) \in T^*X$ tels qu'il existe $f \in C^2(X)$ avec:*

(i) $x \in F$;

(ii) $\xi = \pm df(x) \neq 0$;

(iii) $y \in F \Rightarrow f(y) \leqslant f(x)$.

Théorème 1.2 (*d'après Sjöstrand*). *Soient F un fermé de $\mathbf{R}^n$, Ω un voisinage conique d'un point $(x_0, \xi_0) \in N^*F$ et Σ une variéte contenant $N^*F \cap \Omega$. Alors il existe une variété $\Sigma^* \subset N^*F$ passant par (x_0, ξ_0) et telle qu'en tout point $\sigma \in \Sigma^*$, $T_\sigma\Sigma^* = (T_\sigma\Sigma)^\perp$.*

Corollaire 1.3. *Si F est un fermé de $\mathbf{R}^n$ et Ω un ouvert conique de $T^*\mathbf{R}^n$, $\mathscr{N}_F(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega)/f_{|N^*F\cap\Omega} = 0\}$ est un idéal de $C^\infty(\Omega)$ (fonctions à valeurs* ***réelles****) stable par crochets de Poisson.*

Ce Corollaire 1.3 peut être combiné avec le "théorème de Holmgren" pour obtenir le Théorème 1.5 ci-dessous; pour l'énoncer, nous aurons besoin des:

Définitions 1.4. *Soit Ω un ouvert conique de $T^*\mathbf{R}^n$; si I est un idéal de $C^\infty(\Omega)$, nous noterons $V_\Omega(I)$ la plus grande partie conique de Ω sur laquelle tous les éléments de I s'annulent; puis nous noterons $I(p, \Omega)$ le plus petit idéal I de $C^\infty(\Omega)$ contenant $\mathscr{R}e\, p_{|\Omega}$ et $\mathscr{I}m\, p_{|\Omega}$ et tel que:*

(i) $f_{|V_\Omega(I)} = 0 \Rightarrow f \in I$,

(ii) $f \in I$ *et* $g \in I \Rightarrow \{f, g\} \in I$;

enfin nous poserons $\Sigma(p, \Omega) = V_\Omega[I(p, \Omega)]$.

Remarque. $\Sigma(p, \Omega)$ est une partie formée conique contenue dans $p^{-1}(0)$; si c'est une variété, elle est involutive à cause de (i) et (ii).

Théorème 1.5. *Pour tout ouvert conique Ω de $T^*\mathbf{R}^n$ et toute distribution $u \in \mathscr{H}$ telle que $Pu = 0$, $N^* \operatorname{supp} u \cap \Omega \subset \Sigma(p, \Omega)$.*

Corollaire 1.6 (*d'après Bony*). *S'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que $(x_0, \xi_0) \notin \Sigma(p, \Omega)$, alors le problème* (1.1) *n'admet pas de solution.*

Corollaire 1.7 (*d'après Sjöstrand*). *S'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) et une variété involutive $\Sigma \supset \Sigma(p, \Omega)$ telle que tout voisinage de (x_0, ξ_0) sur la feuille bicaractéristique $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$ passant par (x_0, ξ_0) rencontre le demi-espace d'équation $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, alors le problème* (1.1) *n'admet pas de solution.*

Exemple 1.8. Notons (t, x_1, x_2) les points de $\mathbf{R}^3$, et considérons au voisinage de l'origine le symbole $p = \tau\xi_1 + x_2^2\tau^2 + \xi_2^2 + it\tau^2$ et la fonction $\varphi = t$ (exemple relevant du Cas $n°1$); ξ_0 sera donc défini par $\tau = 1$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$, et nous pourrons prendre $\Omega = \{\tau > 0\}$; $\mathscr{R}e\, p_{|\Omega}$ et $\mathscr{I}m\, p_{|\Omega} \in I(p, \Omega)$, puis (i) $\Rightarrow t \in I(p, \Omega)$; (ii) $\Rightarrow \xi_1$, x_2^2, $x_2\xi_2$ et $\xi_2^2 \in I(p, \Omega)$; (i) $\Rightarrow x_2$ et $\xi_2 \in I(p, \Omega)$; enfin, (ii) $\Rightarrow 1 \in I(p, \Omega)$ d'où $I(p, \Omega) = C^\infty(\Omega)$ et $\Sigma(p, \Omega) = \varnothing$. Il y a donc unicité de Cauchy par application du Corollaire 1.6.

2. Enoncés des résultats et commentaires

Le Théorème 1.2 a pour conséquence que si N^*F est contenu dans une sous-variété de dimension k, alors il contient une sous-variété de dimension $2n - k$ (et donc $k \geqslant n$); on peut préciser ces questions de dimension en utilisant le concept de dimension de Hausdorff en un point q(ce que nous noterons $\dim_q$, cf. §3); nous obtenons:

Théorème 2.1. *Soient F un fermé de $\mathbf{R}^n$ et $(x_0, \xi_0) \in N^*F$. Alors* $\dim_{(x_0,\xi_0)} N^*F = n$.

Commentaire. Avec le Théorème 1.2, cette propriété permet de considérer N^*F un peu comme une lagrangienne.

Corollaire 2.2. *S'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que* $\dim_{(x_0,\xi_0)} \Sigma(p,\Omega) < n$, *le problème* (1.1) *n'admet pas de solution.*

Commentaire. Si $\Sigma(p, \Omega)$ était une variété, elle serait involutive (cf. la remarque suivant les Définitions 1.4); deux cas pourraient alors se produire: soit $(x_0, \xi_0) \notin \Sigma(p, \Omega)$ et le Corollaire 1.6 suffisait pour conclure, soit $\dim_{(x_0,\xi_0)} \Sigma(p, \Omega) \geqslant n$ et on ne peut pas appliquer ce Corollaire 2.2. Ce dernier ne peut donc apporter quelque chose de nouveau que lorsque $\Sigma(p, \Omega)$ n'est pas une variété.

Exemple 2.3. On peut facilement construire une fonction $f(x)$ positive C^∞ paire et telle que $f_{|\mathbf{R}_+}$ s'annule exactement sur l'ensemble "de Cantor" (i.e., l'ensemble de tous les réels de $[0, 1]$ admettant au moins une écriture en base 3 n'utilisant pas le chiffre 1). Avec cette fonction f, nous considérons près de l'origine de $\mathbf{R}^2$, dont les points seront notés (t, x), la fonction $\varphi = t + x^2$ et le symbole $p = \xi + i(t^2 + f(x))\tau$ (exemple relevant du cas $n°2$); si $\Omega \subset \{\tau > 0\}$, $I(p, \Omega)$ est l'idéal engendré par ξ, $g(x)$ et t où g décrit l'ensemble des fonctions plates sur l'ensemble de Cantor: on ne peut donc pas appliquer les corollaires 1.6 et 1.7; enfin, $\Sigma(p, \Omega) = \{\xi = t = f(x) = 0\}$, d'où $\dim_{(x_0,\xi_0)} \Sigma(p, \Omega) = 1 + \dfrac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} 3} < 2$: on obtient l'unicité par le corollaire 2.2.

Pour les réciproques, nous distinguerons les cas.

Théorème 2.4. *Supposons que nous sommes dans le Cas $n°1$, que $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$ et qu'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que*:

(Rg) $\Sigma(p, \Omega)$ *est une variété* (*involutive*) *analytique passant par* (x_0, ξ_0);

(Tr) *la feuille bicaractéristique passant par* (x_0, ξ_0), $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$, *est transverse aux fibres* (*i.e.*, $\dim T_{(x_0,\xi_0)} \Sigma^*(x_0, \xi_0) = \dim \pi_{T_{x_0}\mathbf{R}^n} T_{(x_0,\xi_0)} \Sigma^*(x_0, \xi_0)$);

(Sj) $\Sigma^*(x_0, \xi_0) \subset \{(x, \xi) \in \Omega / \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$;

(Za) *il existe $C > 0$ telle que* $|d\varphi \wedge \xi \cdot dx| \leqslant C|\varphi - \varphi(x_0)|^{1/2}$ *sur* $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$.

Sous les hypothèses précédentes, il existe au voisinage de x_0 une fonction $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ solution du problème (1.1). *De plus, u est analytique à l'intérieur de* $\operatorname{supp} u = \{x \in \mathbf{R}^n / \psi(x) \geqslant \psi(x_0)\}$ *avec ψ analytique et $d\psi(x_0) \neq 0$.*

Commentaire. Les hypothèses sont géométriques et indépendantes de l'équation φ choisie pour le demi-espace $\{x \in \mathbf{R}^n / \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$. L'hypothèse $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$ remplit la fonction technique de nous ramener à la construction du Corollaire 1.1 de Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [4]; elle n'est pas nécessaire (cf. Hörmander [11, Theorem 5.2.2]). L'hypothèse (Rg) empêche l'application des Corollaires 1.6 et 2.2; l'hypothèse (Sj) est nécessaire à cause du Corollaire 1.7; les hypothèses (Tr) (qui s'énonce encore: $\forall f \in I(p, \Omega)$, $d_\xi f(x_0, \xi_0) = 0 \Rightarrow df(x_0, \xi_0) = 0$) et (Za) ont été ajoutées afin que le support de la solution soit un demi-espace (notre technique ne nous permet d'obtenir que de telles solutions !); en effet on peut démontrer les deux résultats suivants:

Théorème 2.5. *Supposons qu'il existe un voisinage conique* Ω *de* (x_0, ξ_0) *et* $f \in I(p, \Omega)$ *telle que* $d_\xi f(x_0, \xi_0) = 0$ *mais* $(df \wedge \xi \cdot dx)(x_0, \xi_0) \neq 0$. *Alors le problème* (1.1) *n'admet aucune solution dont le support soit* $\{x \in \mathbf{R}^n | \psi(x) \geqslant \psi(x_0)\}$ *avec* $\psi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ *et* $d\psi(x_0) \neq 0$.

Théorème 2.6. *Supposons qu'il existe un voisinage conique* Ω *de* (x_0, ξ_0) *tel que* (Rg), (Tr) *et* (Sj) *soient vérifiées, mais* (Za) *n'est vérifiée dans aucun voisinage de* (x_0, ξ_0) *sur* $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$. *Alors, même conclusion qu'au théorème* 2.5.

Exemple 2.7. Lorsque $d_\xi(\mathscr{R}e\, p)$ et $d_\xi(\mathscr{I}m\, p)$ sont linéairement indépendants et que $\{\mathscr{R}e\, p, \mathscr{I}m\, p\} = 0$ sur $p^{-1}(0)$, l'idéal $I(p, \Omega)$ est l'idéal engendré par $\mathscr{R}e\, p$ et $\mathscr{I}m\, p$, et les propriétés (Rg) et (Tr) sont vérifiées; si l'on ajoute que la matrice

$$\begin{pmatrix} H^2_{\mathscr{R}e\, p}\varphi & H_{\mathscr{I}m\, p}H_{\mathscr{R}e\, p}\varphi \\ H_{\mathscr{R}e\, p}H_{\mathscr{I}m\, p}\varphi & H^2_{\mathscr{I}m\, p}\varphi \end{pmatrix}(x_0, \xi_0)$$

est définie positive, la propriété (Sj) est vérifiée pourvu que Ω soit suffisamment petit, et la propriété (Za) aussi; c'était le cas étudié dans Saint Raymond [16, Théorème 2].

Les théorèmes de Zachmanoglou [19] sont également contenus dans celui-ci: en effet, si p est réel et $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$, alors (Rg) et (Tr) sont vérifiées; puis on peut montrer facilement que les hypothèses sur la bicaractéristique de p entraînent (Sj) et (Za).

Exemple 2.8. Qui ne rentre dans aucun des deux cadres ci-dessus. Notons (t, x_1, x_2, x_3) les points de $\mathbf{R}^4$, et considérons au voisinage de l'origine le symbole $p = \tau\xi_1 + i\xi_2^2$; si $\Omega \subset \{\tau > 0\}$, $d_\xi p \neq 0$, et (Rg) et (Tr) sont vérifiées; si $\varphi = t + x_1^4 + x_2^4 + x_1x_2x_3$, toutes les hypothèses du Théorème 2.4 sont vérifiées, mais si $\varphi = t + x_1^4 + x_1x_2x_3$ le Théorème 2.6 est applicable.

Théorème 2.9. *Supposons que nous sommes dans le Cas n°2, que* $d_\xi p(x_0) \neq 0$, *et qu'il existe un voisinage conique* Ω *de* (x_0, ξ_0) *tel que*:

(Rg) $\Sigma(p, \Omega)$ *est une variété* (*involutive*) C^∞ *passant par* (x_0, ξ_0);

(Tr) $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$ *est transverse aux fibres*;

(Sj) $\Sigma^*(x_0, \xi_0) \subset \{(x, \xi) \in \Omega / \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$.

Sous les hypothèses précédentes, et pour tout $s \geqslant 1$, *il existe au voisinage de* x_0 *une fonction* $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ *solution du problème* (1.1).

Commentaire. Signalons que, bien que le problème soit C^∞, nous traitons l'opérateur P lui-même sans le perturber. Pour les hypothèses (Rg) et (Sj), nous renvoyons au commentaire suivant le Théorème 2.4; l'exemple $p = \xi_1 + ix_2\tau$, $\varphi = t$ montre qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse (Tr): en effet, on peut prouver à l'aide du Théorème 1.5 que $\operatorname{supp} u \subset \{x_2 = 0\}$, et 0 est la seule fonction H^1_{loc} possédant un tel support ! C'est parce que l'opérateur P est du premier ordre que nous avons pu supprimer l'hypothèse (Za): dans le Cas $n°1$, si P est du premier ordre, on pourrait aussi se passer de cette hypothèse (Za) (on perdrait seulement $d\psi(x_0) \neq 0$ dans la conclusion).

Théorème 2.10. *Supposons que nous sommes dans le Cas $n°3$ et qu'il existe un voisinage conique Ω de (x_0, ξ_0) tel que*:

(Rg) $(x_0, \xi_0) \in \Sigma(p, \Omega)$ (*qui est alors une variété involutive C^∞ pourvu que Ω soit suffisamment petit*);

(Sj) $\Sigma^*(x_0, \xi_0) \subset \{(x, \xi) \in \Omega/\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$. *Alors il existe au voisinage de x_0 une fonction $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ solution du problème* (1.1).

Commentaire. Par les hypothèses du Cas $n°3$, (Rg) et (Tr) sont vérifiées et donc il s'agit essentiellement du même théorème que le Théorème 2.9.

3. Calcul de la dimension de Hausdorff de N^*F

Avant d'entreprendre la démonstration du Théorème 2.1, rappelons quelques propriétés élémentaires de la dimension de Hausdorff; pour plus de détails, consulter Federer [8, pp. 169 & seq.].

Pour toute partie A de $\mathbf{R}^k$, la limite suivante est bien définie

$$v_d(A) = \lim_{\rho \to 0^+} \inf_{\substack{\text{rec. de } A \text{ tq} \\ r_i \leqslant \rho}} \left(\sum_i r_i^d \right),$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des recouvrements de A par des boules de rayons $r_i \leqslant \rho$; on peut facilement montrer qu'il existe alors un unique réel $d_0 \in [0, k]$ tel que

$$d > d_0 \Rightarrow v_d(A) = 0 \quad \text{et} \quad d < d_0 \Rightarrow v_d(A) = \infty$$

appelé dimension de Hausdorff de A, et que nous noterons $\dim_H A$. On peut vérifier que la dimension de Hausdorff d'une sous-variété de $\mathbf{R}^k$ n'est autre que sa dimension ordinaire. Comme $A \subset B$ entraîne $\dim_H A \leqslant \dim_H B$, on peut définir pour un point $q \in A$ le nombre suivant

$$\dim_q A = \lim_{r \to 0^+} \dim_H [A \cap B(q; r)]$$

qui est appelé dimension de Hausdorff de A au point q. C'est le concept qui intervient dans notre Théorème 2.1.

Démonstration de $\dim_{(x_0,\xi_0)} N^*F \geqslant n$. Soit f telle que l'on ait les trois propriétés de la Définition 1.1 avec $df(x_0) = \xi_0$. Prenons $x_n = \frac{2}{3}[f(x) - f(x_0)]$ et $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ pour compléter le système de coordonnées.

Pour $|x'| \leqslant \frac{1}{2}$, on pose $\delta(x') = \inf\{\delta \in \mathbf{R}/F \cap B((x', \delta); 1) = \varnothing\}$; on a $0 < \delta(x') \leqslant 1$. On note alors $y(x')$ l'un des points $y \in F \cap \partial B((x', \delta(x')); 1)$ et $\eta(x') = (x', \delta(x')) - y(x')$; enfin, on définit une application ψ: $B(x_0; \frac{1}{2}) \subset \mathbf{R}^n \to N^*F$ par

$$\psi: (x', x_n) \mapsto \big(y(x'), \big(\tfrac{3}{2} + x_n\big)\eta(x')\big).$$

Cette application est continue en x_0 car $\psi(x_0) = (x_0, \xi_0)$ et

$$|x'| < \varepsilon \Rightarrow |y(x')| < 2\varepsilon \quad \text{et} \quad |\delta(x') - 1| < \varepsilon^2.$$

Si donc Ω est un voisinage de (x_0, ξ_0) dans N^*F, il existe un voisinage ω de x_0 dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\psi(\omega) \subset \Omega$.

Nous montrerons plus loin que ψ vérifie en outre

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} |x_1 - x_2|, \tag{3.1}$$

où les valeurs absolues désignent la norme euclidienne dans les coordonnées locales choisies. Pour deux points $\psi(x_1)$ et $\psi(x_2)$ situés dans une même boule B_i de rayon r_i, on a donc $|x_1 - x_2| \leqslant 2\sqrt{2}\, r_i$, et on peut écrire

$$\{x \in \mathbf{R}^n/\psi(x) \in B_i\} \subset \tilde{B}_i = B\big(*\,; 2\sqrt{2}\, r_i\big) \subset \mathbf{R}^n.$$

Pour tout recouvrement de Ω par des boules B_i de rayons $r_i \leqslant \rho$, les $\tilde{B}_i$ recouvrent ω, et on a pour tout $d \in [0, 2n]$

$$\sum_i \big(2\sqrt{2}\, r_i\big)^d \geqslant \inf_{\substack{\text{rec. de } \omega\ tq \\ \tilde{r}_i \leqslant 2\sqrt{2}\rho}} \Big(\sum_i \tilde{r}_i^{\,d}\Big),$$

d'où

$$\inf_{\substack{\text{rec. de } \Omega\ tq \\ r_i \leqslant \rho}} \Big(\sum_i r_i^d\Big) \geqslant (2\sqrt{2})^{-d} \inf_{\substack{\text{rec. de } \omega\ tq \\ \tilde{r}_i \leqslant 2\sqrt{2}\rho}} \Big(\sum_i \tilde{r}_i^{\,d}\Big).$$

Lorsque $d < n$ et ρ tend vers 0, le membre de droite tend vers ∞, donc le membre de gauche aussi, d'où $\dim_H \Omega \geqslant n$. Si donc $\Omega = N^*F \cap B((x_0, \xi_0); r)$, on obtient le résultat en passant à la limite lorsque r tend vers 0.

Démonstration de l'inégalité (3.1). Si les coordonnées de $y(x')$ sont $(y'(x'), y_n(x'))$, on peut écrire

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)|^2 \geqslant |y'(x_1') - y'(x_2')|^2 + \big|\big(\tfrac{3}{2} + x_{n,1}\big)\eta(x_1') - \big(\tfrac{3}{2} + x_{n,2}\big)\eta(x_2')\big|^2.$$

Or $|\eta(x_1')|^2 = |\eta(x_2')|^2 = 1$, d'où

$$\left|\left(\tfrac{3}{2} + x_{n,1}\right)\eta(x_1') - \left(\tfrac{3}{2} + x_{n,2}\right)\eta(x_2')\right|^2$$

$$= \left(x_{n,1} - x_{n,2}\right)^2 + \left|\eta(x_1') - \eta(x_2')\right|^2$$

$$+ \left[\left(\tfrac{1}{2} + x_{n,1}\right) + \left(\tfrac{1}{2} + x_{n,2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} + x_{n,1}\right)\left(\tfrac{1}{2} + x_{n,2}\right)\right]\left|\eta(x_1') - \eta(x_2')\right|^2$$

$$\geqslant \left(x_{n,1} - x_{n,2}\right)^2 + \left|\eta(x_1') - \eta(x_2')\right|^2.$$

Comme $\eta(x') = (x' - y'(x'), \eta_n(x'))$,

$$\left|\eta(x_1') - \eta(x_2')\right|^2 \geqslant \left|x_1' - y'(x_1') - x_2' + y'(x_2')\right|^2$$

et

$$\left|\psi(x_1) - \psi(x_2)\right|^2$$

$$\geqslant \left|y'(x_1') - y'(x_2')\right|^2 + \left|x_1' - y'(x_1') - x_2' + y'(x_2')\right|^2 + \left(x_{n,1} - x_{n,2}\right)^2$$

$$= \left|\sqrt{2}\left(y'(x_1') - y'(x_2')\right) - (x_1' - x_2')/\sqrt{2}\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|x_1' - x_2'\right|^2 + \left(x_{n,1} - x_{n,2}\right)^2$$

$$\geqslant \tfrac{1}{2}\left|x_1 - x_2\right|^2,$$

d'où (3.1).

Démonstration de $\dim_H N^*F \leqslant n$. Le lecteur uniquement intéressé par les applications au problème de Cauchy pourra se passer de cette partie de la démonstration puisque le Corollaire 2.2 ne découle que de l'inégalité déjà prouvée.

Choisissons des coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ et notons avec des valeurs absolues les normes euclidiennes dans ce système de coordonnées. $B(\omega; \rho)$ désignant la boule ouverte de $\mathbf{R}^n$ de centre ω et de rayon ρ, nous posons pour $\varepsilon \neq 0$

$$N_\varepsilon = \left\{(x, \xi) \in N^*F / B\left(x + 3\varepsilon\xi; 3|\varepsilon\xi|\right) \cap F = \varnothing\right\}.$$

Par définition de N^*F, on a $N^*F = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^*} N_{1/k}$. Admettons provisoirement (cf. plus loin) que pour tout $\varepsilon \neq 0$, $\dim_H N_\varepsilon \leqslant n$; soient $d > n$ et $\alpha > 0$; pour tout k, $v_d(N_{1/k}) = 0$ et on peut donc trouver un recouvrement de $N_{1/k}$ par des boules de rayons $r_{i,k}$ tel que $\sum_i r_{i,k}^d < \alpha 2^{-|k|-1}$; si nous réunissons tous ces recouvrements, nous obtenons un recouvrement de N^*F tel que $\sum_{i,k} r_{i,k}^d < \alpha$, donc $v_d(N^*F) = 0$, d'où finalement

$$\dim_H N^*F \leqslant n.$$

Démonstration de $\dim_H N_\varepsilon \leqslant n$. Comme dans la démonstration de $\dim_{(x_0, \xi_0)} N^*F \geqslant n$, nous obtenons cette propriété en construisant une application qui ne rapproche pas trop les points: nous posons

$$\psi: \begin{array}{l} N_\varepsilon \to \mathbf{R}^n \\ (x, \xi) \mapsto x + \varepsilon\xi; \end{array}$$

nous allons montrer que

$$|\psi(x_1, \xi_1) - \psi(x_2, \xi_2)| \geqslant |\varepsilon|\, |(x_1, \xi_1) - (x_2, \xi_2)|.$$

En effet,

$$|\psi(x_1, \xi_1) - \psi(x_2, \xi_2)|^2 = |x_1 - x_2|^2 + \varepsilon^2|\xi_1 - \xi_2|^2 + 2\varepsilon(x_1 - x_2)\cdot(\xi_1 - \xi_2).$$

Mais $(x_1, \xi_1) \in N_\varepsilon$ et $x_2 \in F$ entraîne que

$$\begin{aligned} &|x_2 - (x_1 + 3\varepsilon\xi_1)| \geqslant 3|\varepsilon\xi_1| \\ &\qquad \Rightarrow |x_2 - x_1|^2 - 6\varepsilon(x_2 - x_1)\cdot\xi_1 + 9\varepsilon^2|\xi_1|^2 \geqslant 9\varepsilon^2|\xi_1|^2 \\ &\qquad \Rightarrow 2\varepsilon(x_1 - x_2)\cdot\xi_1 \geqslant -\tfrac{1}{3}|x_1 - x_2|^2. \end{aligned}$$

De même $(x_2, \xi_2) \in N_\varepsilon$ et $x_1 \in F$ entraîne que $-2\varepsilon(x_1 - x_2).\ \xi_2 \geqslant -\frac{1}{3}|x_1 - x_2|^2$, d'où finalement, si $\varepsilon^2 \leqslant \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} |\psi(x_1, \xi_1) - \psi(x_2, \xi_2)|^2 &\geqslant \tfrac{1}{3}|x_1 - x_2|^2 + \varepsilon^2|\xi_1 - \xi_2|^2 \\ &\geqslant \varepsilon^2|(x_1, \xi_1) - (x_2, \xi_2)|^2. \end{aligned}$$

4. Non-unicité dans le cas analytique

Comme nous allons utiliser, au cours de la démonstration du Théorème 2.4, l'invariance de ses hypothèses par changement de fonction φ, il convient de la vérifier dès maintenant.

Soient donc φ et ψ deux fonctions C^2 définissant le même demi-espace $\{x \in \mathbf{R}^n/\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\} = \{x \in \mathbf{R}^n/\psi(x) \geqslant \psi(x_0)\}$, et telles que $\xi_0 = d\varphi(x_0) \neq 0 \neq d\psi(x_0) = \eta_0$. Il existe alors une fonction $\lambda \in C^1(\mathbf{R}^n)$ telle que $\psi(x) = \psi(x_0) + \lambda(x)(\varphi(x) - \varphi(x_0))$ avec $\lambda(x_0) > 0$. Remarquons déjà que $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$ dépend de φ par l'intermédiaire de ξ_0; mais comme $\Sigma(p, \Omega)$ est conique, $\Sigma^*(x_0, \eta_0) = \{(x, \lambda(x_0)\xi) \in T^*\mathbf{R}^n/(x, \xi) \in \Sigma^*(x_0, \xi_0)\}$, et donc les conditions (Tr) et (Sj) sont invariantes par changement de fonction φ (pour (Rg), c'était évident).

Enfin, pour constater que (Za) est, elle aussi, invariante par changement de fonction φ, il suffit d'écrire

$$d\psi \wedge \xi \cdot dx = \lambda\, d\varphi \wedge \xi \cdot dx + (\varphi - \varphi(x_0))\, d\lambda \wedge \xi \cdot dx$$

et de remarquer que

$$(d\varphi \wedge \xi \cdot dx)(x, \lambda(x_0)\xi) = \lambda(x_0)(d\varphi \wedge \xi \cdot dx)(x, \xi).$$

Démonstration du Théorème 2.4. En utilisant les hypothèses (Rg) et (Tr), on peut trouver des coordonnées locales analytiques $x' = (x_1, \ldots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \ldots, x_{n-1})$ et x_n telles que $(x_0, \xi_0) = (0,0,0;0,0,1)$ et

$$\Sigma^*(x_0, \xi_0) = \{x'' = x_n = \xi' = \xi'' = 0;\ \xi_n = 1\}$$

($r = \dim \Sigma^*(x_0, \xi_0)$; (Tr) $\Rightarrow r < n$ et donc la seule dégénérescence possible est l'absence de variables x''; le lecteur vérifiera facilement que tout ce qui suit reste correct sans variables x'').

Avec ces coordonnées, nous posons

$$\psi(0, x'', x_n) = x_n - 2C\left(|x''|^2 + x_n^2\right), \qquad C > 0 \text{ à fixer,} \tag{4.1}$$

puis nous prolongeons ψ analytiquement à un voisinage de l'origine en requérant que $(x, d\psi(x)) \in \Sigma(p, \Omega)$, ce qui est classiquement possible sous l'hypothèse (Tr) (cf. par exemple Hörmander [11, p. 32] ou [12, p. 156]); comme $\Sigma(p, \Omega)$ est conique, on obtient par la formule d'Euler

$$\psi(x',0,0) = 0 \quad \text{et} \quad d\psi(x',0,0) = (0,0,1). \tag{4.2}$$

Comme $\Sigma(p, \Omega)$ est contenu dans $p^{-1}(0)$, $p(x, d\psi(x)) = 0$; grâce à l'hypothèse $d_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0$, on peut utiliser la construction du Corollaire 1.1 de Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [4] pour obtenir une solution de $Pu = 0$ dont le support soit localement $\operatorname{supp} u = \{x \in \mathbf{R}^n / \psi(x) \geqslant 0\}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que ce support est contenu dans $\{x \in \mathbf{R}^n / \varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)\}$.

Par le théorème des fonctions implicites, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ équivaut à $x_n + \varphi_0(x', x'') \geqslant 0$ pour une fonction $\varphi_0 \in C^2(\mathbf{R}^{n-1})$ telle que $\varphi_0(0,0) = 0$; la condition sur le support de u sera vérifiée si nous montrons l'inégalité

$$\psi(x) \leqslant x_n + \varphi_0(x', x'') \quad \text{pour } x \text{ voisin de } x_0. \tag{4.3}$$

Par la formule de Taylor,

$$\varphi_0(x', x'') = \varphi_0(x',0) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x''}(x',0) \cdot x'' + O\left(|x''|^2\right).$$

L'hypothèse (Sj) nous dit que $\varphi_0(x',0) \geqslant 0$, et l'hypothèse (Za) que $|d\varphi_0(x',0)| \leqslant C_0[\varphi_0(x',0)]^{1/2}$, d'où

$$\left|\frac{\partial \varphi_0}{\partial x''}(x',0) \cdot x''\right| \leqslant C_0\left[\varphi_0(x',0)\right]^{1/2}|x''| \leqslant \varphi_0(x',0) + C_1|x''|^2,$$

et donc

$$\varphi_0(x', x'') \geqslant -C|x''|^2$$

pour une constante $C > 0$ ne dépendant que de φ, de p et du choix des coordonnées (mais pas de ψ) et que nous reportons dans la formule (4.1) définissant ψ. Nous avons donc

$$x_n + \varphi_0(x', x'') - \psi(x) = \varphi_0(x', x'') + 2C\left(|x''|^2 + x_n^2\right) - \psi_0(x)$$

en posant $\psi_0(x) = \psi(x) + 2C(|x''|^2 + x_n^2) - x_n$, d'où

$$x_n + \varphi_0(x', x'') - \psi(x) \geqslant C\left(|x''|^2 + x_n^2\right) - |\psi_0(x)|. \tag{4.4}$$

Or, on peut écrire

$$\begin{cases} \psi_0(0, x'', x_n) = 0 & \text{à cause de (4.1), et} \\ \psi_0(x', 0, 0) = d\psi_0(x', 0, 0) = 0 & \text{à cause de (4.2).} \end{cases}$$

Il en résulte que suffisamment de dérivées de ψ_0 sont nulles à l'origine pour que

$$|\psi_0(x)| \leqslant K|x'|\left(|x''|^2 + x_n^2\right)$$

pour une constante $K > 0$. Si donc nous restreignons le voisinage de telle sorte que $|x'| < C/K$, nous obtenons (4.3) à partir de (4.4) ce qui termine notre démonstration.

5. Réciproques 2.5 et 2.6

Nous démontrerons ces résultats par l'absurde en supposant que le problème (1.1) admet une solution u dont le support soit $\{x \in \mathbf{R}^n/\psi(x) \geqslant \psi(x_0)\}$ avec $\psi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ et $d\psi(x_0) \neq 0$. Nous établirons qu'alors l'hypersurface d'équation $\psi(x) = \psi(x_0)$ possède des points arbitrairement proches de x_0 et tels que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, ce qui constituera la contradiction.

Avant de distinguer les cas, nous pouvons déjà remarquer que par le Théorème 1.5 nous savons que N^* supp $u \cap \Omega \subset \Sigma(p, \Omega)$, soit

$$\left\{(x, \lambda\, d\psi(x)) \in \Omega/\psi(x) = \psi(x_0) \text{ et } \lambda \in \mathbf{R}^*\right\} \subset \Sigma(p, \Omega). \tag{5.1}$$

Démonstration du Théorème 2.5. Puisque $f \in I(p, \Omega)$, f s'annule sur $\Sigma(p, \Omega)$, et par (5.1)

$$\psi(x) = \psi(x_0) \Rightarrow f(x, d\psi(x)) = f(x_0, d\psi(x_0)) = 0,$$

et donc, par développement de Taylor

$$\begin{aligned} d_x f(x_0, \xi_0) \cdot (x - x_0) + d_\xi f(x_0, \xi_0) \cdot (d\psi(x) - d\psi(x_0)) \\ + O\left(|x - x_0|^2 + |d\psi(x) - d\psi(x_0)|^2\right) = 0 \end{aligned}$$

et, puisque $d\psi \in C^1$ et que $d_\xi f(x_0, \xi_0) = 0$,

$$\psi(x) = \psi(x_0) \Rightarrow d_x f(x_0, \xi_0) \cdot (x - x_0) = O\left(|x - x_0|^2\right)$$

ce qui prouve que $d_x f(x_0, \xi_0)$ est normal à l'hypersurface d'équation $\psi(x) = \psi(x_0)$. Nous tirons alors notre contradiction de l'hypothèse $(df \wedge \xi \cdot dx)(x_0, \xi_0) \neq 0$.

Démonstration du Théorème 2.6. Comme dans la démonstration du Théorème 2.4, nous utilisons les hypothèses (Rg) et (Tr) pour trouver des coordonnées locales y', y'', y_n telles que $(x_0, \xi_0) = (0, 0, 0; 0, 0, 1)$ et

$$\Sigma^*(x_0, \xi_0) = \{ y'' = y_n = \eta' = \eta'' = 0; \eta_n = 1 \}.$$

Par le théorème des fonctions implicites, $\psi(x) \geqslant \psi(x_0)$ équivaut à $y_n + \psi_0(y', y'') \geqslant 0$ pour une fonction $\psi_0 \in C^2(\mathbf{R}^{n-1})$. En appliquant le Théorème 1.2 à la situation décrite en (5.1), on voit que $\psi_0(y', 0) = 0$ et $d\psi_0(y', 0) = 0$; on peut donc changer de coordonnées C^2 en posant

$$x' = y', \qquad x'' = y'', \qquad x_n = y_n + \psi_0(y', y'')$$

sans changer l'équation de $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$

$$\Sigma^*(x_0, \xi_0) = \{ x'' = x_n = \xi' = \xi'' = 0; \xi_n = 1 \}.$$

De nouveau par le théorème des fonctions implicites, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ équivaut à $x_n + \varphi_0(x', x'') \geqslant 0$ pour une fonction $\varphi_0 \in C^2(\mathbf{R}^{n-1})$; pour obtenir la contradiction cherchée, nous allons montrer

(5.2) Il existe des points $m = (x', x'')$ arbitrairement proches de l'origine tels que $\varphi_0(m) < 0$.

Supposons maintenant que (Za) n'est vérifiée dans aucun voisinage de (x_0, ξ_0) sur $\Sigma^*(x_0, \xi_0)$; compte tenu des coordonnées locales utilisées cela signifie qu'il existe une suite de points $m_j \in \Sigma^*(x_0, \xi_0)$ tendant vers 0 et tels que $|d\varphi_0(m_j)| > j[\varphi_0(m_j)]^{1/2}$; en extrayant au besoin une sous-suite, on peut trouver une direction v tangente à $x_n = 0$ telle que

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial v}(m_j) > j\left[\varphi_0(m_j)\right]^{1/2}. \tag{5.3}$$

Par la formule de Taylor, il existe alors une constante C telle que pour tous m et ε suffisamment petits

$$\left| \varphi_0(m - \varepsilon v) - \varphi_0(m) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial v}(m) \right| \leqslant C\varepsilon^2,$$

d'où nous tirons, si m_j et ε sont suffisamment petits

$$\varphi_0(m_j - \varepsilon v) \leqslant \varphi_0(m_j) - \varepsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial v}(m_j) + C\varepsilon^2.$$

En extrayant au besoin une sous-suite, nous sommes alors dans l'un des deux cas suivants: soit $\varphi_0(m_j) > 0$ pour tout j (mais $\varphi_0(m_j)$ tend vers 0 car φ_0 est continue), soit $\varphi_0(m_j) = 0$ pour tout j. Dans le premier cas, grâce à (5.3), on tire de l'expression précédente que les points $m_j - (\varphi_0(m_j))^{1/2}v$ vérifient (5.2) pour j assez grand. Dans le deuxième cas, il suffit de choisir $\varepsilon_j \to 0$ tel que $0 < \varepsilon_j < C^{-1}\partial\varphi_0(m_j)/\partial v$, ce qui est possible d'après (5.3), pour obtenir des points $m_j - \varepsilon_j v$ vérifiant (5.2).

6. Non-unicité dans les cas C^∞

Démonstration du Théorème 2.9. De par sa définition, $\Sigma(p, \Omega)$ est involutive et donc feuilletée, et grâce à l'hypothèse (Tr) on peut en déduire un feuilletage de la base $\mathbf{R}^n$ par projection (plusieurs feuilletages sont en principe possibles); on tire de l'hypothèse (Sj) que la feuille passant par x_0 est tangente à l'hypersurface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, et donc on peut trouver des coordonnées locales $C^\infty(x', x'', x_n)$ avec $(x_0, \xi_0) = (0,0,0; 0,0,1)$ et telles que les feuilles de la base aient pour équations: $x'' =$ constante et $x_n =$ constante.

Ecrivons maintenant $P = X + c$; X étant la projection sur $T\mathbf{R}^n$ de H_p, c'est un champ tangent aux feuilles, et $X\psi = 0$ si $\psi(x) = x_n^3 - |x''|^2$. Si nous prenons $v \in H^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ telle que $Xv = c$ (ce qui est possible pour tout s puisque par $d_\xi p(x_0) \neq 0$ et par la condition (P), X est localement résoluble, cf. Beals et Fefferman [5, Theorem 1]), nous pouvons choisir comme solution la fonction $u(x)$ définie par

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp(-v(x) - [1/\psi(x)]) && \text{si } \psi(x) > 0, \\ u(x) &= 0 && \text{si } \psi(x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Clairement, on a $u \in H^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ dès que $s > n/2$, $Pu = 0$ et $\operatorname{supp} u = \{x \in \mathbf{R}^n / \psi(x) \geqslant 0\}$.

Par le théorème des fonctions implicites, $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ équivaut à $x_n + \varphi_0(x', x'') \geqslant 0$ pour une fonction $\varphi_0 \in C^2(\mathbf{R}^{n-1})$, et $\varphi_0(x', 0) \geqslant 0$ grâce à l'hypothèse (Sj); par développement de Taylor on en déduit que $\varphi_0(x', x'') \geqslant -C|x''|$ pour une constante $C > 0$. Si donc $|x''| \leqslant C^{-3}$,

$$\psi(x) \geqslant 0 \Rightarrow x_n \geqslant |x''|^{2/3} \Rightarrow x_n + \varphi_0(x', x'') \geqslant 0,$$

et u est solution du problème (1.1).

Démonstration du Théorème 2.10. La démonstration est parfaitement identique à la démonstration précédente à ceci près qu'il faut remplacer la fonction $w = \exp(-v)$ par la fonction w fournie par le lemme suivant:

Lemme 6.1. *Supposons que nous sommes dans le Cas n°3. Alors il existe au voisinage de x_0 une fonction $w \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $Pw = 0$ et $w(x_0) \neq 0$.*

Bien que nous n'ayons pas trouvé dans la littérature de démonstration de ce lemme, il semble pourtant bien connu, et nous ne ferons qu'en esquisser une démonstration.

On commencera par résoudre approximativement $Pw = 0$ en trouvant deux fonctions C^∞ u et f telles que $Pu = f$, $u(x_0) = 1$ et f est plate en x_0; cela peut se prouver en choisissant une hypersurface non caractéristique pour P passant par x_0, en y calculant les dérivées normales de u exigées par l'équation $Pu = 0$, et en fabriquant u par le théorème de Whitney.

Puis, profitant simultanément de la résolubilité locale de P et de la petitesse de f (qui est plate en x_0), on trouvera, par exemple en utilisant le Théorème 7.3.1 de Hörmander [11], une fonction $C^\infty v$ petite et vérifiant $Pv = f$ près de x_0; si on a bien choisi les normes, on pourra, grâce aux injections de Sobolev, obtenir que $\|v\|_{L^\infty} \leqslant 1/2$.

Il suffit alors de prendre $w = u - v$.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, *Non unicité du problème de Cauchy*, Ann. of Math. **117** (1983) 77–108.

[2] N. Aronszajn, *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl. **36** (1957) 235–249.

[3] H. Bahouri, *Sur la propriété de prolongement unique pour les opérateurs de L. Hörmander*, Journées Edp de Saint Jean de Monts 1983, exposé n°15, Ecole Polytechnique, Paris, à paraître.

[4] M. S. Baouendi, F. Trèves & E. C. Zachmanoglou, *Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients*, Duke Math. J. **46** (1979) 409–440.

[5] R. Beals & C. Fefferman, *On local solvability of linear partial differential equations*, Ann. of Math. **97** (1973) 482–498.

[6] J.-M. Bony, *Une extension du théorème de Holmgren sur l'unicité du problème de Cauchy*, C. R.. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **268** (1969) 1103–1106.

[7] A. Cauchy, *Mémoire sur un théorème fondamental dans le calcul intégral*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **XIV** (1842) 1020; **XV** (1842) 44, 85 & 131.

[8] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, Berlin, 1969.

[9] E. Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, Vol. II, Hermann, Paris, 1896, 303–308.

[10] E.. Holmgren, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen*, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps—Akad. Förh. **58** (1901) 91–105.

[11] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer, Berlin, 1963.

[12] ______, *The analysis of linear partial differential operators*, Vol. I, Springer, Berlin, 1983.

[13] F. John, *On linear partial differential equations with analytic coefficients. Unique continuation of data*, Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949) 209–253.

[14] S. von Kowalevsky, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, J. Reine Angew. Math., **80** (1875) 1–32.

[15] L. Robbiano, *Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non elliptiques à symboles complexes*, Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1983, à paraître.

[16] X. Saint Raymond, *Non-unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux*, à paraître.

[17] J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque n°95, 1982.

[18] M. Strauss & F. Trèves, *First order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem*, J. Differential Equations **15** (1974) 195–209.

[19] E. C. Zachmanoglou, *Non-uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients*, Arch. Rational Mech. Anal. **27** (1968) 373–384.

[20] ______, *Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **38** (1970) 178–188.

UNIVERSITY OF PARIS