J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
15 (1980) 307–353

SUITES DE JORDAN-HÖLDER ET PRINCIPALES D'UN GROUPE DE LIE

A. KUMPERA

La théorie des groupes de Lie et, plus généralement, celle des pseudogroupes de Lie trouve ses origines, au siècle dernier, en des problèmes d'intégration d'équations différentielles. Dans trois mémoires célèbres [15], [16], [17] Sophus Lie a esquissé une théorie générale d'intégration d'équations différentielles aux dérivées partielles fondée sur la structure du groupe ou, plus généralement, du pseudogroupe des transformations locales laissant invariante l'équation donnée. Le principe consiste à prendre une suite de composition du groupe et à remplacer l'équation initiale par un nombre fini d'équations différentielles invariantes par les quotients successifs de la suite de telle sorte à obtenir des problèmes d'intégration équivalents. Lorsque la suite de composition est une suite de Jordan-Hölder, le problème d'intégration donné est ainsi remplacé par un nombre fini de problèmes d'intégration à groupes simples. Nous voyons par conséquent le rôle fondamental des suites de Jordan-Hölder dans la théorie de Lie. Notons par ailleurs que le même principe peut s'appliquer à l'étude de nombreux problèmes de géométrie. Dans cet article nous étudions la nature des suites de Jordan-Hölder d'un groupe de Lie de dimension finie qui, mis à part son intérêt dans la théorie de Lie, a également un intérêt propre car une partie substantielle de la structure du groupe est décrite par la nature de ses suites de Jordan-Hölder.

Le plan du travail est le suivant. Tout d'abord (§§1–4) nous transcrivons certaines propriétés classiques des algèbres de Lie à la lumière des suites de Jordan-Hölder et des suites principales. Nous indiquons, en particulier, la nature de telles suites pour certaines classes remarquables d'algèbres. Contrairement à l'usage, nous incluons dans la définition d'algèbre *simple* les algèbres abéliennes de dimension un ce qui évitera de fastidieuses répétitions. Compte tenu de son utilisation pour les groupes de Lie de dimension finie, nous limitons la discussion aux algèbres de dimension finie sur un corps K. Pourtant, il va de soi qu'une partie substantielle de la discussion peut être menée en toute généralité.

Received July 30, 1977. Ce travail a été subventionné en partie par le Conseil de Recherches du Canada (Octroi A-5604), le Ministère de l'Education du Québec (FCAC) et le Ministério da Educação e Cultura du Portugal.

La deuxième partie (§5–9) est consacrée à l'étude des suites de Jordan-Hölder et des suites principales d'un groupe de Lie de dimension finie en s'appuyant partiellement sur les résultats algébriques précédants ainsi que sur la correspondance biunivoque entre les sous-algèbres et les sous-groupes de Lie connexes. En vertu de cette correspondance, nous pourrions croire à première vue que les résultats, pour les groupes de Lie, sont aussi complets et satisfaisants que leur contrepart algébrique. Or, il n'en est pas ainsi, sauf pour les groupes simplement connexes dans quel cas l'algèbre détermine entièrement le groupe. Nous pourrions également songer à obtenir les résultats directement en raisonnant sur les sous-groupes de Lie d'un groupe de Lie donné et en suivant les étapes habituelles de la démonstration algébrique. Ici encore on se heurte vite à des difficultés dès qu'il est question de considérer des groupes quotients car ceci présuppose, pour obtenir une topologie adéquate, que le sous-groupe soit fermé. Plus important, le troisième théorème d'isomorphie n'est pas valable en toute généralité. Les théorèmes relatifs aux groupes de Lie sont en fait plus faibles que leur contrepart algébrique et ceci dû à la présence d'homotopie non triviale et en général "mal répartie". Nous montrerons tout d'abord qu'un groupe de Lie admet des suites de Jordan-Hölder et des suites principales dont les termes sont tous des sous-groupes fermés. L'équivalence au niveau des algèbres de Lie entraîne alors que deux suites fermées d'un même groupe sont désormais localement équivalentes. Nous verrons ensuite, par des exemples, que l'équivalence locale ne s'étend pas, en général, à une équivalence globale. Pourtant nous montrerons que dans certains cas, notamment celui des groupes résolubles, l'extension est toujours possible, autrement dit, deux suites de Jordan-Hölder ou principales fermées sont toujours globalement équivalentes. Il est assez remarquable que l'obstruction, due à l'homotopie, disparaisse pour les groupes résolubles. Nous chercherons enfin à établir certains critères pour qu'il en soit ainsi dans des cas plus généraux.

Dans la dernière partie (§10) nous affaiblissons la notion de suite de Jordan-Hölder et principale de telle sorte que l'équivalence est toujours réalisée pour les groupes semi-simples compacts.

Signalons enfin que les résultats présentés dans ce travail ne sont que partiels, le sujet méritant une étude bien plus approfondie. Nos résultats se limitent à décrire (que partiellement) le comportement des groupes dont la décomposition de Levi est un produit direct (au niveau de l'algèbre). Aucun renseignement n'est obtenu dans le cas général.

L'auteur tient à remercier F. J. Turiel pour de profitables discussions et pour des contre-exemples.

1. Suites de Jordan-Hölder d'une algèbre de Lie

Soit g une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps K.

Définition 1.1. Une suite *de composition* de g est une suite finie

$$g = g_0 \supset g_1 \supset \cdots \supset g_p = 0$$

de sous-algèbres de g tel que g_{i+1} soit un idéal de g_i pour tout i.

Les algèbres de Lie quotient g_i/g_{i+1} seront appelées les quotients successifs de la suite $\Phi = (g_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$. L'algèbre de Lie produit

$$\operatorname{gr}_\Phi g = \prod_{i=0}^{p-1} (g_i/g_{i+1})$$

sera appelée l'algèbre graduée associée à Φ. Rappelons que la suite Φ est dite plus fine que la suite $\Psi = (h_j)_{0 \leqslant j \leqslant q}$ lorsque Ψ est une suite extraite de Φ, c'est-à-dire, il existe une application strictement croissante d'intervalles entiers

$$\lambda : [0, q] \to [0, p]$$

tel que $h_j = g_{\lambda(j)}$. De façon intuitive, la suite Φ s'obtient à partir de Ψ en intercalant au besoin certains termes supplémentaires. Puisque λ ne préserve pas nécessairement les successeurs, une suite extraite d'une suite de composition n'est pas forcément une suite de composition car g_{i+s} n'est pas supposé être un idéal de g_i pour $s > 1$. Nous dirons enfin que les deux suites Φ et Ψ sont équivalentes lorsque $p = q$ et lorsqu'il existe une permutation σ de l'intervalle entier $[0, p-1]$ tel que g_i/g_{i+1} soit isomorphe à $h_{\sigma(i)}/h_{\sigma(i)+1}$ pour tout $i < p$.

Les théorèmes qui suivent traduisent des propriétés habituelles des suites de composition et leur démonstration, basée sur les théorèmes d'isomorphie, est analogue à celle qui se trouve dans la plupart des textes d'algèbre pour les groupes à opérateurs ou pour les modules. Dans le contexte des algèbres de Lie ces théorèmes remontent à Sophus Lie.

Théorème 1.1 (*Schreier*). *Deux suites de composition quelconques de g admettent toujours des suites de composition plus fines équivalentes.*

Définition 1.2. Une suite de *Jordan-Hölder* d'une algèbre de Lie g est une suite de composition strictement décroissante qui n'admet aucune suite decomposition strictement plus fine.

Les seules suites de composition plus fines qu'une suite de Jordan-Hölder sont donc les suites construites à l'aide des termes de la suite initiale et admettant d'éventuelles répétitions. Il est clair que toute algèbre de dimension finie admet des suites de Jordan-Hölder.

Définition 1.3. Une algèbre g est dite *simple* lorsqu'elle est différente de 0 et ne possède que les idéaux triviaux 0 et g.

Remarquons que la définition ci-dessus admet des algèbres simples abéliennes notamment les algèbres de dimension un.

Proposition 1.1. *Une suite de composition est de Jordan-Hölder si et seulement si tous les quotients de la suite sont simples. En particulier g est simple si et seulement si g admet la suite de Jordan-Hölder triviale $g \supset 0$.*

Théorème 1.2 (*Jordan-Hölder-Lie*). *Deux suites de Jordan-Hölder quelconques d'une même algèbre de Lie sont toujours équivalentes.*

Corollaire 1.1. *Toute suite de composition strictement décroissante de g admet une suite de Jordan-Hölder plus fine. En particulier, tout idéal i de g peut être inséré dans une suite de Jordan-Hölder.*

Le théorème 1.2 permet de définir, à isomorphisme près, le gradué associé à une algèbre de Lie g. C'est l'algèbre graduée associée à une suite de Jordan-Hölder quelconque de g et sera notée par gr g.

Définition 1.4. La longueur d'une algèbre de Lie g, notée $l(g)$, est le nombre de quotients successifs de n'importe quelle suite de Jordan-Hölder. On dira que $g = 0$ est de longueur nulle.

La longueur d'une algèbre de Lie est évidemment invariante par isomorphisme et les algèbres simples sont celles de longueur un. Remarquons toutefois que deux algèbres non isomorphes peuvent admettre des suites de Jordan-Hölder équivalentes. C'est le cas, par exemple, des algèbres abéliennes, nilpotentes et résolubles de même dimension. Si l'algèbre g admet la suite de Jordan-Hölder Φ, cette algèbre s'obtient par extensions successives des quotients de Φ. Ces quotients ne caractérisent donc pas, en général, l'algèbre g. La fonction longueur vérifie certaines identités relatives aux idéaux et aux quotients; nous en indiquons ci-dessous les plus importantes. Soit

$$0 \to k \xrightarrow{\varphi} g \xrightarrow{\psi} h \to 0$$

une suite exacte en algèbres de Lie. Alors $l(g) = l(h) + l(k)$. Cette formule résulte du simple fait suivant. Soient Φ et Ψ des suites de Jordan-Hölder de k et h respectivement. On obtient une suite de Jordan-Hölder de g en étendant la suite Φ par $\psi^{-1}(\Psi)$. Ce procédé permet, en particulier, de construire des suites de Jordan-Hölder de g lorsqu'on en connait pour un idéal i de g et pour le quotient g/i. En outre, si φ: $g \to h$ est un morphisme, alors

$$l(g) = l(\text{im } \varphi) + l(\text{ker } \varphi), \quad l(h) = l(\text{im } \varphi) + l(\text{coker } \varphi).$$

Soit

$$0 \to g_0 \xrightarrow{\varphi_0} g_1 \xrightarrow{\varphi_1} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} g_n \to 0$$

un complexe en algèbres de Lie (i.e., $\varphi_{i+1}\varphi_i = 0$). Supposons en plus que im φ_i soit un idéal de g_{i+1} pour tout i. Dans ces conditions

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k l(g_k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k l(\ker \varphi_k / \operatorname{im} \varphi_{k-1}),$$

où, par définition, $\varphi_{-1} = \varphi_n = 0$. Cette dernière formule montre que la fonction longueur vérifie la formule d'Euler-Poincaré. Le côté droit de la formule est la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe (g_k) relative à la fonction l. En particulier, pour tout complexe acyclique (i.e., exact),

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k l(g_k) = 0.$$

Si h et k sont deux idéaux de g, alors

$$l(g/h) + l(g/k) = l(g/(h + k)) + l(g/(h \cap k)).$$

Enfin, si h et k sont deux sous-algèbres de g avec h contenu dans le normalisateur de k, alors

$$l(h) + l(k) = l(h + k) + l(h \cap k).$$

2. Suites principales d'une algèbre de Lie

Définition 2.1. Une suite *distinguée* de g est une suite de composition $(g_i)_{0<i<p}$ dont tous les éléments g_i sont des idéaux de g.

Définition 2.2. Une suite *principale* de g est une suite distinguée strictement décroissante qui n'admet aucune suite distinguée strictement plus fine.

Il est utile de disposer d'un théorème de Jordan-Hölder pour les suites principales. A cet effet et pour mieux mettre en évidence les structures supplémentaires qui interviennent, nous esquissons les résultats pour les algèbres à opérateurs. Rappelons toutefois que ce théorème peut se démontrer pour toute catégorie de structures satisfaisant aux théorèmes d'isomorphie. Soit End g l'ensemble des morphismes linéaires de l'espace vectoriel g.

Définition 2.3. Une algèbre de Lie g munie d'une application

$$\rho : \Omega \to \operatorname{End} g$$

est appelée une algèbre à opérateurs dans Ω (nous restreignons la définition aux algèbres de Lie).

Lorsque l'ensemble Ω est muni de structures homologues à celles de l'algèbre associative *End* g (ou encore à celles de l'algèbre de Lie *End* $g = gl(g)$) nous pouvons supposer en plus que ρ est une représentation de Ω dans g c'est-à-dire, un morphisme pour les structures en question. Enfin, lorsqu'il sera utile de bien mettre en évidence les algèbres à opérateurs, celles-ci seront notées explicitement par (g, ρ).

g étant une algèbre à opérateurs, la notion de sous-structure est restreinte à celle de sous-structure stable. Ainsi, un idéal ou une sous-algèbre de l'algèbre à opérateurs g est un idéal ou une sous-algèbre h de g stable par les opérateurs de Ω c'est-à-dire, $\rho(x)h \subset h$ pour tout $x \in \Omega$. Une telle sous-structure est elle-même une algèbre à opérateurs dans Ω. Si i est un idéal stable, le quotient g/i est également une algèbre à opérateurs dans Ω car chaque $\rho(x)$ passe au quotient. Un morphisme φ: $g \to h$ de deux algèbres à opérateurs dans Ω est un morphisme d'algèbres compatible avec les opérateurs c'est-à-dire,

$$\varphi(\rho_g(x) \cdot y) = \rho_h(x) \cdot \varphi(y).$$

Rappelons enfin que la somme et l'intersection de deux sous-structures stables est encore stable et que les trois théorèmes d'isomorphie se transcrivent dans le cas stable. Toutes les définitions et les résultats du §1 peuvent se recopier dans le contexte des algèbres à opérateurs. En particulier, les quotients successifs ainsi que le gradué associé à une suite de composition stable sont munis canoniquement de structures d'algèbres à opérateurs dans Ω et l'équivalence de deux suites stables est définie par l'isomorphisme, à une permutation près et au sens des algèbres à operateurs, des quotients successifs. Remarquons enfin que toute suite de composition stable de l'algèbre à opérateurs g est une suite de composition de l'algèbre sans opérateurs (au sens du §1) et que toute suite de Jordan-Hölder stable de g admet une suite de Jordan-Hölder plus fine de l'algèbre sans opérateurs.

Revenons maintenant aux suites distinguées. Prenons une algèbre de Lie g et munissons la de la structure d'algèbre à opérateurs définie par la représentation adjointe

$$\text{ad}: g \to \text{Der}\, g \subset \text{End}\, g,$$

où $\text{ad}(x) \cdot y = [x, y]$. Les sous-algèbres et les idéaux stables de g coïncident tout simplement avec les idéaux i de g (sans opérateurs) munis de la représentation adjointe induite

$$\text{ad}_i: g \to \text{Der}\, i$$

et les quotients de g par les idéaux stables ne sont autres que les quotients g/i munis de la représentation adjointe quotient

$$\text{ad}_{g/i}: g \to \text{Der}\, g/i.$$

Plus généralement, les sous-algèbres et les idéaux stables de l'idéal i (considéré comme algèbre à opérateurs dans g) sont les idéaux j de g contenus dans i et munis de la représentation adjointe induite, les quotients

i/j étant des algèbres à opérateurs munies de la représentation quotient

$$\mathrm{ad}_{i/j} : g \to \mathrm{Der}\ i/j.$$

Les sous-algèbres et les idéaux stables de i/j sont les quotients k/j où k est un idéal de g vérifiant l'inclusion $i \supset k \supset j$ et les quotients de i/j par k/j sont égaux (isomorphes) aux algèbres à opérateurs i/k. Enfin, la somme et l'intersection des idéaux stables h/j et k/j de i/j sont égaux aux idéaux stables $(h + k)/j$ et $(h \cap k)/j$ respectivement. On voit ainsi que l'ensemble des sous-structures i et des structures quotient i/j d'une algèbre à opérateurs fixée g (munie de la représentation adjointe) est une catégorie close pour les opérations élémentaires, ce qui permet de lui appliquer les théorèmes d'isomorphie. En outre,

Proposition 2.1. *Pour que* $\mathrm{ad}_{i/j}$ *soit triviale* (*représentation nulle*) *il faut et il suffit que* $[g, i] \subset j$.

Appliquons ensuite les résultats précédents au cas particulier des algèbres à opérateurs définies par la représentation adjointe. Tout d'abord, les suites de composition stables de g sont précisément les suites distinguées de g (sans opérateurs) et les suites de Jordan-Hölder stables sont les suites principales. Les quotients successifs des suites distinguées sont des algèbres à opérateurs par rapport aux représentations adjointes quotient. Pour qu'une suite distinguée soit principale il faut et il suffit que les quotients successifs soient des algèbres ad-simples c'est-à-dire, ne continennent aucun idéal stable, par la représentation adjointe quotient, autre que les idéaux triviaux. Remarquons toutefois que, sauf pour les quotients de la forme g/j, les suites de composition des algèbres à opérateurs i et i/j (avec domaine d'opérateurs g), où i et j sont des idéaux emboités de g, ne coïncident pas forcément avec les suites distinguées des algèbres de Lie sans opérateurs i et i/j. En effet, toute suite de composition est une suite distinguée mais la réciproque est inexacte. Ceci tient au fait qu'un idéal k de l'algèbre i n'est pas forcément un idéal de g ou, de façon plus savante, il y a lieu à distinguer les structures d'algèbres à opérateurs de i (resp. i/j) avec domaines d'opérateurs g et i (resp. i/j). De même, les suites de Jordan-Hölder stables des algèbres à opérateurs i et i/j ne sont pas en général des suites principales pour les algèbres sans opérateurs car elles peuvent admettre des suites distinguées strictement plus fines. Ces distinctions disparaissent évidemment dans le cas abélien. Elles disparaissent aussi, comme nous le verrons plus tard, dans le cas réductif et en particulier dans le cas semi-simple. En outre, si g est soit nilpotent soit résoluble sur un corps algébriquement clos, toute suite de Jordan-Hölder stable des algèbres à opérateurs i et i/j est une suite principale des algèbres sans opérateurs. Plus précisément, nous montrerons que ces suites de Jordan-Hölder stables ainsi que les suites principales sont en fait des suites de Jordan-Hölder au sens habituel c'est-à-dire, au sens des algèbres sans opérateurs.

Dans les théorème qui suivent, le préfixe ad indique désormais qu'il s'agit d'algèbres à opérateurs définies par la représentation adjointe.

Théorème 2.1 (*Schreier*). *Deux suites distinguées quelconques de g admettent toujours des suites distinguées plus fines* ad-*équivalentes*.

Théorème 2.2 (*Jordan-Hölder-Lie*). *Deux suites principales quelconques d'une même algèbre de Lie g sont toujours* ad-*équivalentes*.

Corollaire 2.1. *Toute suite distinguée strictement décroissante de g admet une suite principale plus fine. En particulier, tout idéal i de g peut être inséré dans une suite principale.*

Il est clair que toute algèbre de Lie de dimension finie admet des suites principales. En outre, le théorème 2.2 montre que le gradué associé à une suite principale de g est déterminé à isomorphisme près. Ce gradué, muni de la représentation adjointe de g sera appelé le gradué principal et sera noté par $\mathrm{gr.pr}\, g$.

Définition 2.4. La longueur principale d'une algèbre de Lie g, notée $lp(g)$, est le nombre de quotients successifs de n'importe quelle suite principale. L'algèbre $g = 0$ est de longueur principale nulle.

La longueur principale est un invariant par isomorphie et les algèbres ad-simples (g considéré comme algèbre à opérateurs dans g) sont celles de longueur principale un. Il est évident, en outre, que g est ad-simple si et seulement si g est simple au sens habituel, cette propriété n'étant plus valable, en général, pour les algèbres à opéateurs i et i/j (avec domaine d'opérateurs g). Comme dans le cas des suites de Jordan-Hölder, les quotients successifs des suites principales ne caractérisent pas l'algèbre g à isomorphisme près; des exemples sont fournis par les algèbres nilpotentes et abéliennes de même dimension.

Toute suite principale admet une suite de Jordan-Hölder plus fine par conséquent $lp(g) \leqslant l(g)$ l'égalité n'étant valable que lorsque les suites principales de g sont également des suites de Jordan-Hölder ou, de façon équivalente, lorsque tout quotient ad-simple i/j est une algèbre simple. Ces longueurs sont en général distinctes comme le montrent les algèbres résolubles. Pourtant, nous verrons plus tard que lorsque g est nilpotent ou réductif ou lorsque g est résoluble sur un corps algébriquement clos elles coïncident. Dans le cas réductif, les suites principales sont en fait égales aux suites de Jordan-Hölder.

Les identités relatives à la fonction longueur introduites au §1 subsistent pour la longueur au sens des algèbres à opérateurs dans Ω. Traduites en termes de longueurs principales elles subsistent moyennant la précaution suivante: puisque les suites principales des algèbres i et i/j sont en général plus fines (donc plus longues) que les suites de Jordan-Hölder stables au sens des algèbres à opérateurs, on conviendra que la longueur principale d'un idéal i et d'un quotient i/j est sa longueur en tant qu'algèbre à opérateurs dans g. La longueur principale de l'idéal i est donc le nombre de quotients d'une suite strictement décroissante et maximale (non raffinable) d'idéaux de g contenus dans i. De même, la longueur principale du quotient i/j est le nombre de quotients d'une suite strictement décroissante et maximale d'idéaux de g contenus entre i et j c'est-à-dire, d'une suite maximale

$$i = i_0 \supset i_1 \supset \cdots \supset i_p = j.$$

De telles suites se trouvent en correspondance biunivoque avec les suites de Jordan-Hölder stables de i/j au sens des algèbres à opérateurs. Lorsque $i = g$ ces distinctions ne sont qu'apparentes. La structure d'algèbre à opérateurs de g/j avec domaine g se factorise en la structure avec domaine g/j. Les remarques précédentes montrent, en outre, que si g est nilpotent ou réductif ou même résoluble sur un corps algébriquement clos la longueur principale de i et i/j est égale à la longueur principale des algèbres i et i/j car les suites de Jordan-Hölder stables, au sens des algèbres à opérateurs, sont alors des suites principales.

D'après le théorème 2.2, les quotients successifs de deux suites principales Φ et Ψ d'une même algèbre de Lie g sont isomorphes en tant qu'algèbres à opérateurs. En particulier ces quotients sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie donc les suites Φ et Ψ sont des suites de composition équivalentes au sens du §1. Il se pose donc la question de déterminer la nature des algèbres de Lie qui résultent comme quotients successifs des suites principales ou, ce qui revient au même, la structure des algèbres de Lie quotient ad-simples i/j. Il est évident que tout quotient simple est ad-simple mais la réciproque est inexacte car les idéaux de i ne sont pas forcément des idéaux de g. Des exemples se trouvent facilement parmi les algèbres résolubles. Un premier résultat dans cette direction est le suivant.

Proposition 2.2. *Soit g une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique zéro. Les quotients de toute suite principale de g sont soit abéliens soit semi-simples.*

En effet, soient i et j deux idéaux emboités de g et supposons que le quotient i/j est ad-simple. Le radical r de i est un idéal caractéristique de i donc un idéal de g. Puisque le quotient i/j est ad-simple, l'idéal $r + j$ est forcément égal à j ou à i. Dans le premier cas, il résulte que $r \subset j$ et, puisque i/r est semi-simple, que le quotient $i/j = (i/r)/(j/r)$ est également semi-simple. Dans le deuxième cas, l'algèbre à opérateurs $i/j = (r + j)/j \simeq r/(r \cap j) = h$ est ad-simple et résoluble. L'idéal $[h, h]$ est caractéristique dans h donc stable pour la structure d'algèbre à opérateurs. Or, la résolubilité de h entraîne que $h \neq [h, h]$ et la ad-simplicité entraîne finalement que $[h, h] = 0$ c'est-à-dire, h est abélien.

On peut également démontrer un résultat un peu plus précis en recopiant essentiellement les arguments de [1, p. 91, exercises 15b, 15c et 17c] où l'on remplacera les automorphismes intérieurs du groupe par les automorphismes $\exp(\mathrm{ad}\, x)$, $x \in g$, de l'algèbre de Lie.

Proposition 2.3. *Soit g une algèbre de Lie réelle ou complexe ou bien nilpotente sur un corps K de caractéristique zéro. Les quotients de toute suite principale sont des composés directs de sous-algèbres de Lie simples isomorphes* (*donc abéliens ou semi-simples isotypiques*).

Nous n'insistons pas ici sur la démonstration car au §4 nous démontrerons à l'aide de la proposition 2.2, un résultat bien plus précis à savoir que tous ces quotients sont soit des algèbres abéliennes soit des algèbres simples non-abéliennes.

3. Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

Dans ce paragraphe nous donnerons une caractérisation de telles algèbres de Lie moyennant leurs suites de Jordan-Hölder ainsi que leurs suites principales. Ces caractérisations s'appuient sur des théorèmes bien connus que le lecteur trouvera par exemple dans [3] et [10].

Définition 3.1. Un *drapeau* de g est une suite décroissante $(V_i)_{0 \leq i \leq n}$, $n = \dim g$, de sous-espaces vectoriels de g tel que $\dim V_i = n - i$.

Les quotients successifs d'un drapeau sont tous des espaces vectoriels de dimension un et cette propriété caractérise les drapeaux.

Définition 3.2. Un drapeau (V_i) de g est dit

(i) *résoluble* lorsque $[V_{i-1}, V_i] \subset V_i$,

(ii) *principal* lorsque $[V_0, V_i] \subset V_i$,

(iii) *nilpotent* lorsque $[V_0, V_i] \subset V_{i+1}$,

Il est clair que *nilpotent* $\Rightarrow$ *principal* $\Rightarrow$ *résoluble*. D'autre part, les drapeaux résolubles sont tout simplement les suites de Jordan-Hölder à quotients de dimension un (i.e., abéliens simples) et les drapeaux principaux sont les suites principales à quotients abéliens simples. Les drapeaux nilpotents sont les suites principales à quotients abéliens simples et dont la représentation adjointe quotient est triviale (i.e., nulle). Les théorèmes de Jordan-Hölder-Lie ont pour conséquence les corollaires suivants.

Corollaire 3.1. *Si g admet un drapeau résoluble, toute suite de Jordan-Hölder de g est un drapeau résoluble.*

Corollaire 3.2. *Si g admet un drapeau principal (resp. nilpotent), toute suite principale est un drapeau principal (resp. nilpotent).*

Corollaire 3.3. *Si g admet un drapeau principal ou nilpotent, toute suite principale est de Jordan-Hölder et toute suite de Jordan-Hölder est un drapeau résoluble.*

Le dernier corollaire n'admet pas de réciproque même lorsque le corps de base est algébriquement clos. Une algèbre de Lie admettant des drapeaux principaux ou nilpotents peut admettre également des drapeaux résolubles qui ne sont ni principaux et, *a fortiori*, ni même nilpotents.

Il est intéressant de remarquer que la deuxième partie du corollaire 3.2 est une conséquence immédiate du théorème d'Engel. En effet, si g admet un drapeau nilpotent alors la représentation ad: $g \to \mathrm{Der}\, g$ est nilpotente et par conséquent les représentations quotient ad_i: $g \to \mathrm{Der}(g_i/g_{i+1})$, associées à une suite principale (g_i), sont également nilpotentes. Or, un quotient i/j est ad-simple si et seulement si la représentation $\mathrm{ad}_{i/j}$ est irréductible. Puisque cette représentation est en plus nilpotente, le théorème d'Engel entraîne aussitôt que $\dim i/j = 1$ et que $\mathrm{ad}_{i/j}$ est trivial car le sous-espace engendré par un vecteur invariant de $\mathrm{ad}_{i/j}$ est un idéal stable de l'algèbre à opèrateurs i/j. Ceci prouve bien que (g_i) est un drapeau nilpotent.

La théorème d'Engel fournit en même temps une méthode permettant de construire un drapeau nilpotent plus fin qu'une suite distinguée (g_i) dans une algèbre g admettant un drapeau nilpotent (c'est-à-dire, dans une algèbre nilpotente; cf. théorème 3.1). En effet, chaque représentation nilpotente ad_i: $g \to \mathrm{Der}(g_i/g_{i+1})$ se met sous forme strictement triangulaire et ceci revient à dire que chaque ad_i admet un drapeau nilpotent (h_{ij}) dans l'espace quotient g_i/g_{i+1} (i.e., $\mathrm{ad}_i(h_{ij}) \subset h_{i,j+1}$). Les éléments h_{ij} sont alors des idéaux stables dans les quotients et la suite, obtenue en intercalant dans (g_i) les images réciproques des h_{ij}, est un drapeau nilpotent.

Théorème 3.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *g est nilpotent.*

(2) *g admet une suite distinguée*

$$g = g_0 \supset g_1 \supset \cdots \supset g_p = 0$$

telle que $[g, g_i] \subset g_{i+1}$ autrement dit, les quotients successifs sont ad-*triviaux* (*cf. proposition* 2.1.).

(3) *g admet un drapeau nilpotent.*

(4) *Toute suite principale de g est un drapeau nilpotent.*
Ces conditions équivalentes étant vérifiées, toute suite distinguée et strictement décroissante de g admet un drapeau nilpotent plus fin.

Démonstration. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est standard (et triviale) la suite centrale descendante vérifiant les conditions de (2). L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) s'obtient tout simplement en prenant un drapeau quelconque plus fin que (g_i), (3) $\Rightarrow$ (4) n'est autre que le corollaire 3.2 et (4) $\Rightarrow$ (2) est trivial. La dernière assertion est conséquence du corollaire 2.1. Enfin, les implications (1) $\Rightarrow$ (3) et (3) $\Rightarrow$ (4) ainsi que la dernière assertion peuvent également être envisagées comme des conséquences du théorème d'Engel.

Le caractère nilpotent d'une algèbre de Lie est ainsi caractérisé par ses suites principales qui sont des drapeaux nilpotents. Toute suite de Jordan-Hölder est alors un drapeau résoluble, par conséquent

$$lp(g) = l(g) = \dim g.$$

Soit i un idéal de l'algèbre nilpotente g muni de sa structure d'algèbre à opérateurs relative à la représentation adjointe induite et $\Phi = (i_k)$ une suite de Jordan-Hölder stable de i au sens des algèbres à opérateurs. Montrons que Φ est une suite principale de l'algèbre de Lie i (sans opérateur). En effet, comme Φ est une suite distinguée de g, elle s'étend en un drapeau nilpotent $\tilde{\Phi}$ et, puisque Φ est maximale dans i, on voit aussitôt que les termes de $\tilde{\Phi}$ n'appartenant pas à Φ sont tous des idéaux de g contenant i. On en déduit que Φ est un drapeau donc, *a fortiori*, une suite principale de i. Par ailleurs, i étant nilpotent, toute suite principale de i est un drapeau nilpotent qui, pourtant, n'est pas toujours induit par une suite principale de g (i.e., par un drapeau nilpotent de g). Les drapeaux nilpotents induits sont précisément les suites de Jordan-Hölder stables de l'algèbre à opérateurs i. De même, les suites de Jordan-Hölder stables de i/j sont des drapeaux nilpotents de l'algèbre de Lie i/j et ce sont précisément les drapeaux induits, dans i/j, par les drapeaux nilpotents de g qui contiennent les deux idéaux i et j. On obtient ainsi la

Proposition 3.1. *Soit g une algèbre de Lie nilpotente et i, j deux idéaux emboités de g. Les suites de Jordan-Hölder stables de l'algèbre à opérateurs i (resp. i/j) sont les drapeaux (V_i) nilpotents par rapport à g c'est-à-dire, vérifiant le relation $[g, V_k] \subset V_{k+1}$ (resp. $\mathrm{ad}_{i/j}(g)V_k \subset V_{k+1}$). Ce sont, en particulier, des suites de Jordan-Hölder au sens ordinaire.*

Le discussion ci-dessus montre également que, dans le cas nilpotent, les longueurs principales de i (resp. i/j), considéré comme algèbre avec ou sans opérateurs, sont les mêmes et toujours égales à la dimension. On remarquera, en outre, que la proposition 3.1 est également une conséquence directe du théorème d'Engel appliqué aux représentations nilpotentes ad_i et $\mathrm{ad}_{i/j}$.

Nous avons déjà constaté que toute suite principale d'une algèbre nilpotente est aussi une suite de Jordan-Hölder et que toute suite de Jordan-Hölder est un drapeau résoluble. Pourtant, cette dernière propriété ne caractérise pas les algèbres nilpotentes. Nous verrons à présent qu'elle caractérise les algèbres résolubles.

Théorème 3.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *g est résoluble.*

(2) *g admet une suite de composition $(g_i)_{0<i<p}$ telle que $[g_i, g_i] \subset g_{i+1}$ c'est-à-dire, les quotients successifs sont abéliens.*

(3) *g admet une suite distinguée à quotients successifs abéliens.*

(4) *Les quotients de toute suite de Jordan-Hölder de g sont abéliens.*

(5) *Les quotients de toute suite principale de g sont abéliens.*

(6) *g admet un drapeau résoluble.*

(7) *Toute suite de Jordan-Hölder de g est un drapeau résoluble.*

En outre, ces conditions équivalentes étant vérifiées, toute suite de composition strictement décroissante admet un drapeau résoluble plus fin.

Démonstration. L'équivalence des trois premières propriétés est standard, la suite des idéaux dérivés étant une particuliére suite distinguée à quotients abéliens. La propriété (4) résulte de (2) en remarquant qu'une suite de composition plus fine qu'une suite à quotients abéliens est aussi à quotients abéliens. De même (5) résulte de (3). La propriété (6) est conséquence de (4) car les quotients abéliens sont simples donc de dimension un. Enfin, (7) résulte de (6) en vertu du corollaire 3.1.

Le caractère résoluble d'une algèbre de Lie est ainsi caractérisé par les suites de Jordan-Hölder ainsi que par les suites principales, ces dernières n'étant pas forcément des drapeaux. Pour de telles algèbres on a donc

$$lp(g) \leqslant l(g) = \dim g.$$

Lorsque le corps de base est algébriquement clos, les suites principales deviennent en fait des drapeaux; ce sont donc des suites de Jordan-Hölder et l'inégalité précédente devient une égalité.

Théorème 3.3. *Soit g une algèbre de Lie sur un corps algébriquement clos et de caractéristique zéro. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *g est résoluble.*

(2) *g admet un drapeau principal.*

(3) *Toute suite principale de g est un drapeau principal.*

Démonstration. Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2). En effet, le théorème de Lie appliqué à la représentation linéaire ad: $g \to \operatorname{End} g$ fournit un drapeau de g stable par ad, c'est-à-dire, un drapeau principal.

Soient i et j deux idéaux emboités de l'algèbre résoluble g et munissons i et i/j de leur structure d'algèbre à opérateurs. Les résultats, obtenus précédemment pour les algèbres nilpotentes, sont basés sur le seul fait que toute suite principale est un drapeau. Par conséquent ils se transcrivent entièrement pour les algèbres résolubles dont le corps de base est algébriquement clos. Les suites de Jordan-Hölder stables de i (resp. i/j) sont des drapeaux principaux de l'algèbre de Lie i (resp. i/j) et ce sont précisément les drapeaux induits par les drapeaux principaux de g.

Proposition 3.2. *Soit g une algèbre de Lie résoluble sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et i, j deux idéaux emboités de g. Les suites de Jordan-Hölder stables de l'algèbre à opérateurs i (resp. i/j) sont les drapeaux (V_k) principaux par rapport à g c'est-à-dire, vérifient les relations $[g, V_k] \subset V_k$ (resp. $\mathrm{ad}_{i/j}(g)V_k \subset V_k$). Ce sont en particulier des suites de Jordan-Hölder au sens ordinaire.*

Cette proposition est également une conséquence directe du théorème de Lie appliqué aux représentations linéaires ad_i et $\mathrm{ad}_{i/j}$. Les longueurs principales de i (resp. i/j), considéré comme algèbre avec ou sans opérateurs, sont dans le cas algébriquement clos toujours égales à la dimension.

Les résultats précédents s'appliquent notamment lorsque $K = \mathbf{C}$. Dans le cas réel, on peut démontrer que toute représentation linéaire de dimension finie d'une algèbre résoluble admet une famille emboitée (V_i) de sous-espaces invariants tels que $\dim(V_i/V_{i+1}) \leqslant 2$ et la représentation induite dans chaque quotient est irréductible [19, p. 252, exercice 29]. On en déduit que les quotients successifs de toute suite principale d'une algèbre de Lie réelle et résoluble sont de dimension $\leqslant 2$. Plus généralement (les notations étant celles de la proposition 3.2), les quotients de toute suite de Jordan-Hölder stable des algèbres à opérateurs i et i/j sont de dimension $\leqslant 2$.

4. Algèbres de Lie réductives et semi-simples

Pour éviter des confusions de terminologie, rappelons qu'une algèbre de Lie g est dite composée directe d'une famille $(g_i)_{i \in I}$ de sous-algèbres et notée par $g = \oplus\, g_i$ lorsque

(i) g est somme directe, au sens linéaire, des g_i et

(ii) $[\sum x_i, \sum y_i] = \sum [x_i, y_i]$ où $x_i, y_i \in g_i$.

Dans ces conditions, chaque g_i est un idéal de g et les g_i commutent entre eux c'est-à-dire, $[g_i, g_j] = 0$ pour $i \neq j$. Par ailleurs, chacune de ces conditions caractérise les composés directs parmi les sommes directes linéaires. En outre, puisque g est supposé de dimension finie, la famille (g_i) est à support fini et par conséquent $\bigoplus g_i \simeq \prod g_i$.

Contrairement à l'usage, nous dirons que g est *réductive* lorsque cette algèbre est composée directe d'une famille (g_i) de sous-algèbres simples (ces sous-algèbres étant par conséquent des idéaux). Nous dirons qu'elle est *semi-simple* lorsque les g_i sont tous non-abéliens. Deux décompositions directes quelconques de g en facteurs simples ont le même nombre d'éléments (la longueur réductive de g) et il existe une bijection entre les ensembles d'indices tel que les facteurs d'indices correspondants sont isomorphes. En plus, les facteurs non-abéliens sont déterminés de façon unique (à une permutation près des indices) et correspondent précisément à l'ensemble des idéaux simples non-abéliens de g. Ces idéaux seront appelés les composantes simples non-abéliennes de g. Indiquons par g_a la somme des facteurs abéliens et par g_s la somme des facteurs non-abéliens. Alors $g = g_a \oplus g_s$, g_a est un idéal abélien somme de toutes les idéaux abéliens de g et g_s est un idéal semi-simple somme de toutes les composantes simples non-abéliennes de g. En outre, pour que g soit réductif il faut et il suffit que $g = A \oplus S$ où A est un idéal abélien et S un idéal semi-simple. Cette décomposition est unique car A est égal au radical ainsi qu'au centre de g et $S = [g, g]$. Dans une algèbre réductive le radical nilpotent est nul et le radical est égal au centre. Réciproquement, lorsque le corps de base est de caractéristique zéro, une quelconque de ces conditions entraîne la réductivité. De même, si g est semi-simple son radical est nul et, en caractéristique zéro, cette condition entraîne la semi-simplicité.

Soit $g = \bigoplus_{i=1}^{n} g_i$ une décomposition de g en facteurs simples. La suite $\Phi = (h_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$, $h_j = \sum_{i>j} g_i$, est évidemment une suite de Jordan-Hölder de g ainsi qu'une suite principale. Les quotients successifs sont isomorphes aux facteurs g_i, le nombre de quotients abéliens est égal à la dimension donc à la longueur de la partie abélienne g_a et les quotients non-abéliens se trouvent en correspondance biunivoque et isomorphe avec les composantes simples non-abéliennes de g, leur nombre étant égal à la longueur de g_s. On déduit que

$$g \simeq \mathrm{gr}_\Phi\, g = \mathrm{gr} \cdot \mathrm{pr}_\Phi\, g$$

et que $lp(g) = l(g) = n =$ longueur réductive de g. Les quotients abéliens sont tous ad-triviaux et g est abélien si et seulement si $l(g) = \dim g$. Remarquons ensuite que tout idéal de g admet un idéal supplémentaire. Ceci entraîne que tout idéal d'un idéal i de g est aussi un idéal de g et que tout idéal d'un quotient i/j est la forme k/j où k est un idéal de g. On voit ainsi que les idéaux stables pour les structures d'algèbres à opérateurs de i et i/j (définies par la représentation adjointe) sont tout simplement les idéaux, au sens ordinaire, de ces algèbres. Cette remarque résulte encore du fait suivant. L'existence d'idéaux supplémentaires entraîne également que la structure d'algèbre à opérateurs de i (resp. i/j) avec domaine g est équivalente à la structure avec domaine i (resp. i/j). Or les idéaux stables pour cette dernière structure sont tout simplement les idéaux au sens ordinaire. On en déduit la

Proposition 4.1. *Soit g une algèbre réductive. Alors*

(1) *les suites de Jordan-Hölder et les suites principales de g coïncident,*

(2) *les suites de Jordan-Hölder stables des algèbres à opérateurs i et i/j coïncident avec les suites de Jordan-Hölder et principales des algèbres sans opérateurs.*

Théorème 4.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *g est réductif.*

(2) *g admet une suite de Jordan-Hölder Φ tel que $g \simeq \mathrm{gr}_\Phi\, g$.*

(3) *Pour toute suite de Jordan-Hölder Φ de g on a $g \simeq \mathrm{gr}_\Phi\, g$.*

(4) (*K de caractéristique zéro*) *g admet une suite principale Φ tel que $g \simeq \mathrm{gr} \cdot \mathrm{pr}_\Phi\, g$.*

(5) (*K de caractéristique zéro*) *Pour toute suite principale Φ de g on a $g \simeq \mathrm{gr} \cdot \mathrm{pr}_\Phi\, g$.*

En outre, ces conditions équivalentes étant vérifiées, toute suite de composition Ψ est distinguée et $\mathrm{gr}_\Psi\, g \simeq g$. L'algèbre g est semi-simple si et seulement si les quotients successifs d'une (donc de toute) suite de Jordan-Hölder ou principale sont non-abéliens.

Démonstration. Les implications (4) $\Rightarrow$ (1) et (5) $\Rightarrow$ (1) résultent de la proposition 2.2 (d'où l'hypothèse sur la caractéristique). Toutes les autres résultent de la discussion précédente et des théorème de Jordan-Hölder-Lie.

Disons enfin quelques mots sur les suites de Jordan-Hölder et principales d'une algèbre de Lie quelconque.

Proposition 4.2. *Soit g une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique zéro. Le nombre de quotients abéliens de toute suite de Jordan-Hölder est égal à la dimension du radical de g.*

Démonstration. Soit r le radical et prenons des suites de Jordan-Hölder $(h_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de l'algèbre semi-simple g/r et $(k_i)_{0 \leqslant i \leqslant q}$ de l'algèbre résoluble r. Cette dernière suite est un drapeau donc les quotients sont tous abéliens. On obtient une suite de Jordan-Hölder $(g_i)_{0 \leqslant i \leqslant p+q}$ de g en posant $g_i = \pi^{-1}h_i$, $0 \leqslant i \leqslant p$, et $g_{p+i} = k_i$, $0 \leqslant i \leqslant q$, où π: $g \to g/r$ est le morphisme canonique. Les quotients $g_i/g_{i+1} \simeq h_i/h_{i+1}$ sont non-abéliens tandis que les g_{p+i}/g_{p+i+1} sont abéliens.

Théorème 4.2. *Soit g une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique zéro. Toute suite principale de g a des quotients ou bien abéliens ou bien simples non-abéliens.*

Démonstration. Prenons la suite $(g_i)_{0 \leqslant i \leqslant p+q}$ construite comme précédemment où l'on remplace $(k_i)_{0 \leqslant i \leqslant q}$ par la suite des idéaux dérivés de r. Comme tout élément k_i est un idéal caractéristique de r il sera également un idéal de

g. De même, puisque la suite $(h_i)_{0 \leqslant i < p}$ est principale (proposition 4.1) les éléments g_i, $0 \leqslant i \leqslant p$, seront aussi des idéaux de g. Ceci montre que la suite (g_i) est distinguée, les quotients g_i/g_{i+1}, $0 \leqslant i \leqslant p$, étant non-abéliens simples tandis que les autres sont tous abéliens. Par raffinement on obtient une suite principale avec les propriétés voulues.

5. Suites de Jordan-Hölder et principales d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie réel, *connexe* de dimension finie et g son algèbre de Lie.

Définition 5.1. Une suite de composition (resp. distinguée) de G est une suite finie $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_p = \{e\}$ de sous-groupes de Lie *connexes* de G tels que G_{i+1} est normal dans G_i (resp. dans G) pour tout i.

Définition 5.2. Une suite de Jordan-Hölder (resp. principale) de G est une suite de composition (resp. distinguée) strictement décroissante qui n'admet aucune suite de composition (resp. distinguée) strictement plus fine.

La correspondance entre sous-groupes et sous-algèbres entraîne trivialement le

Théorème 5.1. *Il existe une correspondance biunivoque entre les suites de Jordan-Hölder (resp. principales) de G et celles de l'algèbre g.*

Nous dirons qu'une suite est fermée lorsque chaque G_{i+1} est fermé dans G_i. Ceci revient à dire que tous les G_i sont fermés dans G. Deux suites de composition fermées sont équivalentes (resp. localement équivalentes) lorsqu'elles sont de même longueur et lorsque les quotients successifs sont, à une permutation près des indices, des groupes de Lie deux à deux isomorphes (resp. localement isomorphes). Prenons maintenant une suite distinguée et fermée (G_i) de G. Chaque terme G_i est un sous-groupe normal de G donc invariant par la représentation adjointe

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}\, G,$$

où $\mathrm{Ad}\, g(x) = gxg^{-1}$. Dans la suite nous identifierons souvent $\mathrm{Ad}\, g$ avec $(\mathrm{Ad}\, g)_* \in \mathrm{Aut}\, \mathcal{G}$. En fait, la structure du groupe de Lie $\mathrm{Aut}\, G$ est celle de $\{\varphi_* | \varphi \in \mathrm{Aut}\, G\} \subset \mathrm{Aut}\, \mathcal{G}$ et la structure de $\mathrm{Ad}\, G \subset \mathrm{Aut}\, G$ est celle de $\{(\mathrm{Ad}\, g)_* | g \in G\} \subset \mathrm{Aut}\, \mathcal{G}$. La représentation Ad passe au quotient en

$$\mathrm{Ad}_{G_i/G_{i+1}} : G \to \mathrm{Aut}(G_i/G_{i+1}),$$

et par conséquent chaque quotient G_i/G_{i+1} est un groupe de Lie à opérateurs dans G. Deux suites distinguées et fermées sont dites équivalentes (resp. localement équivalentes) lorsque les quotients successifs sont, à une permutation prés, deux à deux isomorphes (resp. localement isomorphes) en tant que groupes de Lie à opérateurs dans G. Notons que l'équivalence locale des actions du groupe G n'est supposée que pour des éléments petits. De façon précise, deux quotients H et H' sont dits localement isomorphes en tant que groupes à opérateurs dans G s'il existe un isomorphisme local φ: $U \to U'$ des groupes de Lie H et H' et un voisinage V de l'élément neutre de G tel que

$$\varphi(\mathrm{Ad}_H\, g(x)) = \mathrm{Ad}_{H'}\, g(\varphi(x))$$

pour tout $g \in V$ et $x \in U$ vérifiant $\mathrm{Ad}_H\, g(x) \in U$.

Examinons en premier lieu que se passe-t-il lorsque le groupe G est simplement connexe. Or, dans ce cas, tout sous-groupe de Lie H normal et connexe est fermé et simplement connexe et tout groupe de Lie quotient G/H est simplement connexe [4, p. 204], [7, p. 127], [13, p. 135], [19, p. 238]. On en déduit le

Théorème 5.2. *Soit G un groupe de Lie simplement connexe. Alors*

(i) *toute suite de composition ou distinguée de G est fermée et ses termes ainsi que les quotients successifs sont simplement connexes,*

(ii) *deux suites de composition (resp. distinguées) de G admettent toujours des suites de composition (resp. distinguées) plus fines équivalentes (Schreier),*

(iii) *deux suites de Jordan-Hölder (resp. principales) de G sont toujours équivalentes; toute suite de composition (resp. distinguée) strictement décroissante, en particulier tout sous-groupe de Lie normal et connexe, admet une suite de Jordan-Hölder (resp. principale) plus fine (Jordan-Hölder-Lie).*

Démonstration. La partie (i) se déduit par récurrence de la remarque précédente. Quant à (ii), prenons des suites plus fines et équivalents au niveau de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Les suites correspondantes, au niveau du groupe G, ont des quotients simplement connexes dont les algèbres de Lie sont deux à deux isomorphes. Il s'en suit que ces groupes quotients sont deux à deux globalement isomorphes. Si en plus les deux suites sont distinguées, les isomorphismes entre les algèbres de Lie quotient préservent les représentations adjointes quotient. Soit u: $H \to H'$ un isomorphisme entre deux des quotients successifs qui correspond à un tel isomorphisme infinitésimal. Le composé

$$\lambda\colon g \in G \to u(\mathrm{Ad}_H\, g)u^{-1} \in \mathrm{Isom}\, H'$$

a pour dérivée

$$\lambda_*\colon X \in \mathcal{G} \to u_*(\mathrm{ad}_{\mathcal{H}}\, X)u_*^{-1} \in \mathrm{Der}\, \mathcal{H}'.$$

Or, puisque u_*: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ commute avec $\mathrm{ad}_{\mathcal{H}}$ et $\mathrm{ad}_{\mathcal{H}'}$, on voit aussitôt que λ_* est égal à la dérivée de $\mathrm{Ad}_{H'}$ par conséquent $\lambda = \mathrm{Ad}_{H'}$. Ceci établit bien l'équivalence des actions. La partie (iii) se démontre de façon analogue; elle découle, par ailleurs, trivialement de (ii).

Le lecteur pourra vérifier, en utilisant la remarque qui précède la théorème 5.2, que dans le cas simplement connexe on peut recopier l'argument algébrique pour obtenir une démonstration directe des théorèmes de Schreier et de Jordan-Hölder. En effet, on démontrera tout d'abord le troisième théorème d'isomorphie (Zassenhaus) en remarquant que le produit $H \cdot K$ de deux sous-groupes normaux, connexes et fermés est encore fermé et ensuite on constatera que la méthode de "raffinement" de Schreier fournit des suites de composition (resp. distinguées) dont chaque terme est fermé et connexe car l'intersection $H \cap K$ est connexe. Ces deux propriétés tombent en défaut dans le cas général.

Lorsque G n'est pas simplement connexe il peut admettre des suites de Jordan-Hölder et principales qui ne sont pas fermées. C'est le cas par exemple du tore. Par contre, le cylindre $S^1 \times \mathbf{R}$ n'admet que des sous-groupes à un paramètre fermés (au sens topologique) par conséquent ses suites de Jordan-Hölder, égales aux suites principales, sont toutes fermées. A présent nous allons démontrer que tout groupe de Lie admet des suites de Jordan-Hölder et principales fermées ce qui permettra ensuite d'étudier leure équivalence, notion qui porte sur les quotients successifs. Rappelons tout d'abord le résultat suivant.

Lemme 5.1. *Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe de Lie connexe, normal et fermé. L'application $q\colon G \to G/H$ établit une correspondance biunivoque entre les sous-groupes de Lie connexes de G contenant H et ceux de G/H. Si $q(K) = L$ alors $\bar{q}\colon K/H \to L$ est un isomorphisme de groupes de Lie et cette correspondance, préserve les sous-groupes normaux et fermés. La restriction $q\colon K \to K/H$ préserve en plus les sous-groupes* Ad-*stables.*

Ce lemme montre en particulier qu'une suite de composition (resp. distinguée) et fermée (G_i) est de Jordan-Hölder (resp. principale) si et seulement si tous les quotients G_i/G_{i+1} sont des groupes de Lie simples (resp. Ad-simples).

Lemme 5.2. *Si G est un groupe de Lie semi-simple, tout sous-groupe de Lie connexe et normal est fermé. En particulier, chaque composante simple est fermée.*

Démonstration. Si G est simple il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $G = H_1 H_2 \cdots H_p$ où les H_i sont les composantes simples de G (sous-groupes de Lie connexes qui correspondent aux composantes simples de $\mathcal{G}$) et $p > 1$. Un sous-groupe de Lie normal, connexe et distinct de G est de la forme $H = H_{\sigma(1)} H_{\sigma(2)} \cdots H_{\sigma(r)}$ avec $r < p$. Si H n'est pas fermé, son adhérence est également un sous-groupe normal, connexe et distinct de H par conséquent $\overline{H} = H_{\sigma(1)} \cdots H_{\sigma(r)} \cdots H_{\sigma(r+q)}$ avec $q > 0$. Or, puisque tout élément de H commute avec tous les éléments des sous-groupes $H_{\sigma(r+i)}$, $i > 0$, il en sera de même pour $\overline{H}$. Mais ceci entraîne en particulier que chaque $H_{\sigma(r+i)}$ est abélien ce qui est contradictoire.

Corollaire 5.1. *Soit G un groupe de Lie semi-simple. Alors les suites de composition (resp. de Jordan-Hölder) sont égales aux suites distinguées (resp. principales) et sont toujours fermées.*

La construction des suites de Jordan-Hölder fermées pour un groupe de Lie arbitraire est basée sur le lemme suivant.

Lemme 5.3. *Soit G un groupe de Lie et H un élément maximal dans l'ensemble des sous-groupes fermés, connexes, normaux et proprement contenus dans G. Alors H est maximal dans l'ensemble de tous les sous-groupes de Lie connexes, normaux et proprement contenus dans G.*

Démonstration. Considérons le groupe quotient G/H et soit R son radical. Puisque R est connexe, normal et fermé, d'après le lemme 5.1 deux cas se présentent.

(a) $R = G/H$. Le quotient est résoluble et contient par conséquent un sous-groupe abélien, connexe, normal, fermé et non-trivial [13, p. 185] qui par hypothèse doit être égal à G/H. Or, ce groupe abélien est forcément de dimension 1 sinon il contiendrait des sous-groupes fermés non-triviaux contredisant les hypothèses.

(b) $R = \{e\}$. Dans ce cas le quotient G/H est semi-simple. Or, si le quotient n'était pas simple il contiendrait, en vertu du lemme 5.2, des sous-groupes connexes, normaux et fermés non-triviaux, par exemple les composantes simples, contredisant ainsi les hypothèses sur H.

Théorème 5.3. *Tout groupe de Lie G admet des suites de Jordan-Hölder fermées.*

Démonstration. En raisonnant par récurrence, on construira à l'aide du lemme précédent un sous-groupe normal, connexe et fermé G_{i+1} de G_i qui est maximal dans l'ensemble de tous les sous-groupes de Lie connexes, normaux et distincts de G_i. Puisque G est de dimension finie, la suite termine en $\{e\}$ après un nombre fini d'étapes. La construction même montre que la suite (G_i) est de Jordan-Hölder.

Corollaire 5.2. *Un groupe de Lie de dimension > 0 est simple s'il ne contient aucun sous-groupe fermé, normal et connexe autre que les sous-groupes triviaux.*

Théorème 5.4 (*Jordan-Hölder-Lie*). *Deux suites de Jordan-Hölder fermées d'un même groupe de Lie G sont toujours localement équivalentes.*

Démonstration. Comme les suites correspondantes, au niveau de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, sont des suites de Jordan-Hölder elles sont équivalentes. On déduit que les quotients successifs des deux suites de G ont, à une permutation près, des algèbres de Lie deux à deux isomorphes par conséquent ce sont des groupes localement isomorphes.

Corollaire 5.3. *Toute suite de composition fermée et strictement décroissante de G admet une suite de Jordan-Hölder fermée plus fine. En particulier, tout sous-groupe normal, fermé et connexe de G peut être inséré dans une suite de Jordan-Hölder fermée. Deux suites de composition fermées quelconques de G admettent toujours des suites de composition fermées plus fines et localement équivalentes.*

Pour construire des suites principales fermées on procédera de façon semblable. En effet, la construction de G_1 est la même que pour les suites de Jordan-Hölder. La construction des autres termes de la suite s'appuit sur le lemme suivant dont le lemme 5.3 est un cas particulier.

Lemme 5.4. *Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe normal, connexe et fermé et K un élément maximal dans l'ensemble des sous-groupes fermés, connexes,* Ad-*stables* (*i.e.*, *normaux dans* G) *et proprement contenus dans H. Alors K est maximal dans l'ensemble de tous les sous-groupes de Lie connexes,* Ad-*stables et proprement contenus dans H.*

Démonstration. En vertu du lemme 5.1 il suffit de démontrer que le groupe quotient H/K muni de la représentation adjointe quotient Ad: $G \to \mathrm{Aut}(H/K)$ est Ad-simple c'est-à-dire, ne contient des sous-groupes de Lie connexes et Ad-stables autres que les triviaux. Son radical R est connexe, fermé et invariant par tous les automorphismes de H/K donc il est Ad-stable et par conséquent, compte tenu des hypothèses et du lemme 5.1, deux cas se présentent.

(a) $R = H/K$. Le quotient est résoluble et le dernier terme non-trivial $D^l R = Q$ de la suite dérivée est un sous-groupe de Lie abélien, connexe et invariant par tous les automorphismes de R donc un sous-groupe Ad-stable. Son adhérence $\overline{Q}$ est un sous-groupe abélien, fermé, connexe et Ad-stable qui sera, en vertu des hypothèses, égal à R. Si R est un groupe vectoriel il est forcément Ad-simple car tout sous-groupe connexe est un sous-espace vectoriel donc fermé. De même, si le tore maximal T de R est non-trivial, ce tore est un sous-groupe fermé et invariant par tous les automorphismes de R. On déduit que T est Ad-stable et par conséquent $R = T$. Enfin, puisque le groupe des automorphismes d'un tore est discret [13, p. 42] et que G est connexe, la représentation Ad: $G \to T$ est triviale c'est-à-dire, $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Id}$ pour tout g. Tout sous-groupe de T est donc Ad-stable et ceci entraîne, compte tenu des hypothèses, que $\dim T = 1$. On voit ainsi que T est simple donc, *a fortiori*, Ad-simple.

(b) $R = \{e\}$. Dans ce cas le quotient H/K est semi-simple. Or, tout sous-groupe connexe et Ad-stable est forcément normal dans H/K donc fermé en vertu du lemme 5.2 et par conséquent H/K est Ad-simple.

Par des raisonnements analogues, on peut démontrer le lemme suivant qui sera utile dans la démonstration du corollaire 5.4 et qui peut également servir à la démonstration du théorème 5.5.

Lemme 5.5. *Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe de Lie Ad-stable et connexe, K un sous-groupe de H qui est connexe, Ad-stable et fermé dans H. Indiquons par $L = H/K$ le groupe de Lie quotient muni de la représentation adjointe quotient* Ad: $G \to \operatorname{Aut} L$. *Alors, tout élément maximal dans l'ensemble des sous-groupes fermés, connexes,* Ad-*stables et proprement contenus dans L est également un élément maximal dans l'ensemble des sous-groupes de Lie connexes,* Ad-*stables et proprement contenus dans L.*

Théorème 5.5. *Tout groupe de Lie G admet des suites principales fermées.*

On pourra recopier la démonstration du théorème 5.3 en s'appuyant sur le lemme 5.4. Plus généralement, on pourra démontrer à l'aide du lemme 5.5 que tout groupe quotient $L = H/K$ muni de la représentation adjointe quotient admet des suites de Jordan-Hölder stables et fermées. Le corollaire 5.2, transcrit dans ce contexte, affirmera alors que le quotient L est Ad-simple si et seulement si la Ad-simplicité est vérifiée pour les sous-groupes fermés.

Théorème 5.6 (*Jordan-Hölder-Lie*). *Deux suites principales fermées d'un même groupe de Lie G sont toujours localement équivalentes.*

Démonstration. Prenons deux suites principales fermées Φ et Φ' de G. Les suites correspondantes, au niveau de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, sont des suites principales équivalentes, par conséquent les quotients successifs sont (à une permutation près des indices) deux à deux isomorphes par des isomorphismes préservant les représentations adjointes quotient ad. Soient H et H' deux quotients de Φ et Φ' respectivement et soit u: $U \to U'$ un isomorphisme local de H vers H' dont la dérivée u_*: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ commute avec $\mathrm{ad}_{\mathcal{H}}$ et $\mathrm{ad}_{\mathcal{H}'}$ c'est-à-dire, $u_*[(\mathrm{ad}_{\mathcal{H}} X)Y] = \mathrm{ad}_{\mathcal{H}'}X(u_* Y)$ pour tout $X \in \mathcal{G}$ et tout $Y \in \mathcal{H}$. Indiquons par $\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}}$: $G \to \operatorname{Aut} \mathcal{H}$ la représentation Ad_H remontée à l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ c'est-à-dire, $\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}} g = (\mathrm{Ad}_H g)_*$. La dérivée de λ: $g \in G \to u_*(\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}} g)u_*^{-1} \in \operatorname{Aut} \mathcal{H}'$ est égale à λ_*: $X \in \mathcal{G} \to u_*(\mathrm{ad}_{\mathcal{H}} X)u_*^{-1} = \mathrm{ad}_{\mathcal{H}'} X \in \operatorname{Der} \mathcal{H}'$ donc $\lambda_* = \mathrm{ad}_{\mathcal{H}'}$ et par conséquent $u_*(\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}} g)u_*^{-1} = \mathrm{Ad}_{\mathcal{H}'} g$ pour tout $g \in G$. Supposons pour l'instant que u est global. Dans ce cas $u(\mathrm{Ad}_H g)u^{-1} = \mathrm{Ad}_{H'} g$ car les deux isomorphismes ont la même dérivée. On en déduit la propriété voulue, autrement dit, on obtient la relation $u(\mathrm{Ad}_H g) = (\mathrm{Ad}_{H'} g)u$ pour tout $g \in G$. Lorsque u n'est que local, il y a lieu à prendre les précautions habituelles. Soit $\Omega \subset \mathcal{H}$ un domaine d'injectivité de l'exponentielle pour le groupe H. L'application $(g, X) \in G \times \mathcal{H} \to (\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}} g)X \in \mathcal{H}$ étant continue, il existe un voisinage ouvert symétrique V de $e \in G$ et un voisinage ouvert étoilé $\mathcal{U}$ de $0 \in \mathcal{H}$ tel que $(\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}} V)\mathcal{U} \subset \Omega$. Puisque $\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}} g$ est un isomorphisme linéaire, l'intersection $[(\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}} g)\mathcal{U}] \cap \mathcal{U}$ est étoilée donc connexe. En plus, l'injectivité de l'exponentielle entraîne que $[(\mathrm{Ad}_H\, g)\exp \mathcal{U}] \cap \exp \mathcal{U} = \exp[(\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}}\, g\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}]$ pour tout $g \in V$, par conséquent cette intersection est connexe. Nous pouvons enfin supposer, en prenant au besoin des restrictions, que $U = \exp \mathcal{U}$. Posons $W = (\mathrm{Ad}_H\, g^{-1}U) \cap U$ et $W' = u(W)$. Dans ces conditions, l'application $u(\mathrm{Ad}_H\, g)u^{-1}$, $g \in V$, est définie dans l'ouvert connexe W', est un isomorphisme local et sa dérivée au point $e \in H'$ coïncide avec la dérivée de $\mathrm{Ad}_{H'}\, g$. On en déduit que $u(\mathrm{Ad}_H\, g)u^{-1} = \mathrm{Ad}_{H'}\, g|_{W'}$ ou encore que $u \circ \mathrm{Ad}_H\, g|_W = (\mathrm{Ad}_{H'}\, g) \circ u|_W$. Ceci montre bien que $u[(\mathrm{Ad}_H\, g)x] = (\mathrm{Ad}_{H'}\, g)u(x)$ pour tout $g \in V$ et tout $x \in U$ tel que $(\mathrm{Ad}_H\, g)x \in U$.

Corollaire 5.4. *Toute suite distinguée, fermée et strictement décroissante de G admet une suite principale fermée plus fine. En particulier, tout sous-groupe normal, fermé et connexe de G peut être inséré dans une suite principale fermée. Deux suites distinguées fermées quelconques de G admettent toujours des suites distinguées fermées plus fines et localement équivalentes.*

La première partie se démontre en appliquant le lemme 5.5 aux quotients successifs de la suite distinguée ou, ce qui revient au même, en utilisant la remarque qui suit le théorème 5.5 concernant le groupe quotient $L = H/K$. Les suites de Jordan-Hölder stables et fermées ainsi obtenues se remontent, à l'aide du lemme 5.1, à des sous-groupes connexes, fermés et Ad-stables de G et fournissent ainsi la suite principale cherchée. Les autres parties sont des conséquences immédiates de la première et du théorème 5.6. Par ailleurs, on peut formuler l'analogue du théorème 5.6 et du corollaire 5.4 pour les groupes quotients $L = H/K$ munis de la représentation adjointe quotient en remplaçant tout simplement les suites principales (resp. distinguées) par les suites de Jordan-Hölder (resp. de composition) Ad-stables.

Nous pouvons maintenant traduire quelques résultats algébriques des paragraphes 1-4 dans le contexte des groupes. Remarquons tout d'abord qu'un groupe de Lie est nilpotent ou résoluble (au sens des groupes abstraits) si et seulement si son algèbre de Lie est nilpotente ou résoluble. Les suites principales d'un groupe nilpotent et les suites de Jordan-Hölder d'un groupe résoluble sont des drapeaux. En plus, les quotients d'une suite principale d'un groupe résoluble sont tous de dimension $\leqslant 2$. Lorsque G est réductif, les suites de composition (resp. de Jordan-Hölder) coïcident avec les suites distinguées (resp. principales). Remarquons pourtant que la caractérisation des algèbres réductives en termes du gradué associé (théorème 4.1) ne subsiste pas pour les groupes. Enfin, lorsque G est compact, les quotients de toute suite principale sont compacts et la partie (a) de la démonstration du lemme 5.4 montre en plus que les quotients abéliens sont tous de dimension 1. Ce résultat découle également du fait que tout groupe compact est réductif.

6. Exemples et contre-exemples

Considérons maintenant le problème d'étendre l'équivalence locale de deux suites de Jordan-Hölder ou principales à une équivalence globale. Nous avons vu que cette extension est toujours possible lorsque G est simplement connexe. Par contre elle ne l'est pas en général et, grosso modo, ceci tient au fait que l'homotopie de G peut induire des homotopies non-équivalentes sur deux suites distinctes. Cette remarque intuitive sera formalisée ultérieurement. Il est donc assez remarquable que l'obstruction disparaisse dans le cas des groupes résolubles, autrement dit, on obtient toujours pour de tels groupes des équivalences globales (cf. théorème 7.1).

Commençons tout d'abord par expliciter une certaine construction qui sera utile en plusieurs instances et qui semble être en plus au noyau des difficultés d'extension.

Soit G un groupe de Lie connexe et supposons que $G = H \cdot K$ où H et K sont des sous-groupes de Lie connexes, normaux et tels que $H \cap K$ est un sous-groupe de Lie à topologie discrète (autrement dit, $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = 0$). Si H et K sont fermés ceci revient à dire que $H \cap K$ est un sous-groupe discret de G. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est alors composée directe de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{K}$ et les éléments de H commutent avec ceux de K. Indiquons par $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ les revêtements simplement connexes de H et de K et par Z_H et Z_K les noyaux respectifs. L'application $\pi\colon \tilde{H} \times \tilde{K} \to H \cdot K$, $\pi(\tilde{h}, \tilde{k}) = h \cdot k$ est alors un morphisme de groupes de Lie dont la dérivée est l'identité. Par conséquent π est un revêtement simplement connexe de G dont on notera par Z le noyau. Il est clair que $Z_H = Z \cap \tilde{H}$, $Z_K = Z \cap \tilde{K}$ et $Z \supset Z_H \times Z_K$. Indiquons par p_H et p_K les projections canoniques de $\tilde{H} \times \tilde{K}$ sur ses facteurs. La relation

$$p_H^{-1}(p_H(Z)) = Z \cdot \tilde{K} = \pi^{-1}(K) \tag{6.1}$$

montre que $p_H Z$ est fermé si et seulement si K est fermé. En outre, puisque p_H est surjectif et que Z est un sous-groupe central discret de $\tilde{H} \times \tilde{K}$, on déduit que $p_H Z$ est un sous-groupe central de $\tilde{H}$ qui est discret si et seulement si $p_H Z$ est fermé. Ceci entraîne le

Lemme 6.1. *Pour que $p_H Z$ (resp. $p_K Z$) soit un sous-groupe central discret de $\tilde{H}$ (resp. $\tilde{K}$) il faut et il suffit que K (resp. H) soit fermé.*

Nous pouvons également renverser l'ordre des constructions ci-dessus. De façon explicite, prenons deux groupes simplement connexes $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ et considérons le produit $\tilde{G} = \tilde{H} \times \tilde{K}$ (de façon équivalente, prenons un groupe simplement connexe $\tilde{G}$ et supposons que $\tilde{G} = \tilde{H} \cdot \tilde{K}$ avec $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ des sous-groupes connexes et normaux et $\tilde{H} \cap \tilde{K}$ à topologie discrète; ceci entraîne que $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ sont fermés et simplement connexes et que $\tilde{H} \cap \tilde{K} = \{e\}$ c'est-à-dire, $\tilde{G}$ est produit direct de $\tilde{H}$ avec $\tilde{K}$). Prenons ensuite un sous-groupe central discret Z de $\tilde{G}$. Alors π: $\tilde{G} \to G = \tilde{G}/Z$ est un revêtement, $G = H \cdot K$ et les sous-groupes $H = \pi(\tilde{H}) = \tilde{H}/(\tilde{H} \cap Z)$ et $K = \pi(\tilde{K})$ sont normaux et connexes, l'intersection $H \cap K$ étant à topologie discrète. En outre, pour que H (resp. K) soit fermé il faut et il suffit que $p_K Z$ (resp. $p_H Z$) soit fermé.

Lemme 6.2. *Soit π_H la restriction de π à $\tilde{H}$. Alors $p_H Z = \pi_H^{-1}(H \cap K)$, $H \cap K = p_H Z/(\tilde{H} \cap Z)$ et $p_H Z$ est fermé si et seulement si $H \cap K$ est fermé dans H. En particulier, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *H et K sont fermés dans G.*

(2) *$H \cap K$ est fermé dans H et dans K.*

(3) *$H \cap K$ est fermé dans G.*

Lemme 6.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $Z = (\tilde{H} \cap Z) \times (\tilde{K} \cap Z)$.

(2) $p_H Z = \tilde{H} \cap Z$ *et* $p_K Z = \tilde{K} \cap Z$.

(3) $p_H Z = \tilde{H} \cap Z$ *ou* $p_K Z = \tilde{K} \cap Z$.

(4) *G est produit direct des sous-groupes H et K c'est-à-dire, $H \cap K = \{e\}$.*

Supposons maintenant que les groupes H et K sont fermés. Les suites

$$G \supset H \supset \{e\} \text{ et } G \supset K \supset \{e\} \tag{6.2}$$

sont distinguées et fermées et les quotients successifs sont respectivement

$$\begin{cases} G/H \simeq \tilde{K}/p_K Z, \\ H \simeq \tilde{H}/(\tilde{H} \cap Z), \end{cases} \qquad \begin{cases} G/K \simeq \tilde{H}/p_H Z, \\ K \simeq \tilde{K}/(\tilde{K} \cap Z), \end{cases} \tag{6.3}$$

où $\tilde{H}$ représente plus exactement $\tilde{H} \times \{e\} \subset \tilde{H} \times \tilde{K}$ et $\tilde{K}$ représente $\{e\} \times \tilde{K}$. En effet, on a par exemple $G/H \simeq (\tilde{H} \times \tilde{K})/(\tilde{H} \cdot Z) = (\tilde{H} \times \tilde{K})/(\tilde{H} \times p_K Z) \simeq \tilde{K}/p_K Z$. Si en plus H et K sont des groupes de Lie simples alors les suites (6.2) sont des suites de Jordan-Hölder et principales de G. Nous dirons que l'équivalence des suites (6.2) est *parallèle* lorsque $G/H \simeq G/K$ et $H \simeq K$; nous dirons qu'elle est *croisée* lorsque $G/H \simeq K$ et $G/K \simeq H$. Une condition nécessaire pour l'équivalence parallèle est l'isomorphisme des groupes H et K donc, lorsqu'il n'en est pas ainsi, l'équivalence ne peut être que croisée. Prenons maintentant deux groupes de Lie simplement connexes $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$, soient $Z_1 \subset \tilde{G}_1$ et $Z_2 \subset \tilde{G}_2$ des sous-groupes centraux discrets et indiquons par G_1 et G_2 les quotients correspondants. Tout isomorphisme Φ: $G_1 \to G_2$ se relève en un isomorphisme $\tilde{\Phi}$: $\tilde{G}_1 \to \tilde{G}_2$ qui transforme Z_1 en Z_2 et, réciproquement, un tel isomorphisme $\tilde{\Phi}$ induit, par passage au quotient, un isomorphisme Φ. En particulier, les groupes Z_1 et Z_2 sont isomorphes. On voit ainsi qu'une condition nécessaire pour l'équivalence parallèle est l'isomorphisme de $p_H Z$ avec $p_K Z$ et de $\tilde{H} \cap Z$ avec $\tilde{K} \cap Z$. De même, l'équivalence croisée présuppose l'isomorphisme de $p_H Z$ avec $\tilde{H} \cap Z$ et de $p_K Z$ avec $\tilde{K} \cap Z$. Remarquons que dans ce dernier cas $p_H Z \supset \tilde{H} \cap Z$ et $p_K Z \supset \tilde{K} \cap Z$. Par conséquent, lorsque ces groupes sont finis, il faut avoir l'égalité et ceci aura lieu, notamment, lorsque le centre de $\tilde{H}$ (resp. $\tilde{K}$) est fini. Les conditions nécessaires décrites ci-dessus ne sont pas en général suffisantes car les isomorphismes en question doivent être induits par des isomorphismes des groupes de Lie simplement connexes. Revenons maintenant au lemme 6.3. Lorsque les conditions équivalentes du lemme sont vérifiées, les suites (6.2) sont trivialement équivalentes, l'équivalence étant croisée. Si en plus $H \simeq K$ l'équivalence est également parallèle. Nous verrons par des exemples que les conditions du lemme ne sont pas nécessaires à l'équivalence croisée. Pourtant,

Lemme 6.4. *Supposons que $\tilde{H}$ (resp. $\tilde{K}$) a un centre discret. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *Les suites* (6.2) *sont équivalentes par une équivalence croisée.*

(2) *Les conditions équivalentes du lemme* 6.3 *sont vérifiées.*

(3) $G/K \simeq H$ *(resp.* $G/H \simeq K$).

En particulier, si $H \not\simeq K$, chacune des deux dernières conditions est nécessaire et suffisante à l'équivalence des suites (6.2). *En outre, on peut remplacer dans les hypothèses $\tilde{H}$ par H (resp. $\tilde{K}$ par K). Enfin, si le centre de $\tilde{H}$ (resp. $\tilde{K}$) est fini, on peut ajouter aux trois conditions précédentes la condition*:

(4) $p_H Z \simeq \tilde{H} \cap Z$ *(resp.* $p_K Z \simeq \tilde{K} \cap Z$).

Démonstration. Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2). En effet, l'équivalence croisée entraîne l'existence d'un automorphisme $\tilde{\Phi}$: $\tilde{H} \to \tilde{H}$ tel que $\tilde{\Phi}(p_H Z) = \tilde{H} \cap Z \subset p_H Z$. Par restriction au centre $\mathfrak{Z}$ de $\tilde{H}$ on obtient un automorphisme $\tilde{\Phi}$: $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ qui laisse stable le sous-groupe $p_H Z$. Remarquons ensuite que le centre d'un groupe de Lie connexe est discret si et seulement si il est abélien de type fini (cf. [13, théorème 1.2, p. 189] et passer au revêtement simplement connexe du groupe abélien). La propriété $\tilde{H} \cap Z = p_H Z$ sera donc une conséquence du lemme algébrique suivant.

Lemme 6.5. *Tout automorphisme d'un groupe abélien de type fini induit un automorphisme sur chaque sous-groupe stable.*

Esquissons la démonstration. Remarquons tout d'abord que si le sous-groupe est de torsion il est fini et le résultat est évient. Le même argument montre, plus généralement, que la torsion du sous-groupe est égale à la torsion de son image, cette torsion étant égale à l'intersection du sous-groupe avec la torsion du groupe tout entier. On peut donc quotienter par le sous-groupe de torsion en se ramenant ainsi au cas libre. On obtient alors le résultat en utilisant la structure donnée par les facteurs invariants (cf. [2, p. 88, théorème 1]).

Puisque le centre d'un groupe de Lie semi-simple est discret on obtient le

Corollaire 6.1. *Si l'un des groupes H ou K est semi-simple, la condition $H \cap K = \{e\}$ est nécessaire et suffisante pour l'équivalence croisée. En particulier, si $H \simeq K$, la condition ci-dessus est nécessaire et suffisante pour l'équivalence.*

Lemme 6.6. *Soient H et K des groupes de Lie abéliens. Alors*

(1) *la condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence croisée est l'isomorphisme des groupes $p_K Z$ et $p_H Z$ avec les groupes $\tilde{K} \cap Z$ et $\tilde{H} \cap Z$ respectivement.*

(2) *la condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence parallèle est l'égalité* $\dim H = \dim K$ *et l'isomorphisme des groupes $p_K Z$ et $\tilde{K} \cap Z$ avec les groupes $p_H Z$ et $\tilde{H} \cap Z$ respectivement.*

Démonstration. Deux groupes abéliens libres de type fini sont isomorphes si et seulement si leur rang est le même. D'autre part, il existe toujours un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qui transforme p vecteurs libres (v_i) en p vecteurs libres (w_i) donnés arbitrairement ce qui achève la démonstration. On pourrait également remarquer que le quotient de $\mathbf{R}^n$ par un sous-groupe discret de rang p est isomorphe à $\mathbf{R}^{n-p} \times T^p$.

Lorsque la dimension des groupes abéliens H ou K est supérieure à 1, les suites (6.2) ne sont pas toujours équivalentes (voir exemple VII). Pourtant,

Lemme 6.7. *Si H et K sont abéliens de dimension* 1 (*i.e., simples*) *alors les suites de Jordan-Hölder* (6.2) *sont toujours équivalentes.*

Démonstration. Comme $\tilde{H} = \tilde{K} = \mathbf{R}$, le revêtement $\pi: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to G$ a pour noyau un sous-groupe discret Z de rang $\leqslant 2$. Examinons les différents cas.

(i) Si rang $Z = 0$ alors $Z = \{0\}$, π est un isomorphisme et les quotients (6.3) sont tous isomorphes à $\mathbf{R}$.

(ii) Si rang $Z = 1$ alors $Z = \mathbf{Z} \cdot v$ où v est un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$. Deux cas se présentent: (a) L'intersection de Z avec une des composantes de $\mathbf{R}^2$, par exemple $\mathbf{R} \times \{0\}$, est non-triviale. Dans ce cas $Z \subset \mathbf{R} \times \{0\}$ et les quotients sont donnés par $G/H \simeq K \simeq \mathbf{R}$ et $G/K \simeq H \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq T^1$. (b) L'intersection de Z avec les deux composantes est triviale. Dans ce cas $p_H Z \simeq p_K Z \simeq Z$ et les quotients sont donnés par $G/H \simeq G/K \simeq T^1$ et $H \simeq K \simeq \mathbf{R}$.

(iii) Si rang $Z = 2$ alors $Z = \mathbf{Z}v + \mathbf{Z}w$ où v et w sont des vecteurs linéairement indépendants. Montrons que dans ce cas l'intersection de Z avec les deux composantes de $\mathbf{R}^2$ est non triviale. En effet, si par exemple $(\mathbf{R} \times \{0\}) \cap Z = \{0\}$ alors le sous-groupe H, image de la droite $\mathbf{R} \times \{0\}$ dans le quotient $\mathbf{R}^2/Z \simeq T^2$, est partout dense et par conséquent n'est pas fermé. D'autre part, puisque H et K sont fermés, les projections $p_H Z$ et $p_K Z$ sont des sous-groupes fermés donc discrets. On voit ainsi que tous les quotients sont isomorphes à T^1.

Remarque. La démonstration ci-dessus montre en particulier que l'équivalence des suites (6.2) peut avoir lieu dans les deux sens possibles.

La construction précédente admet le cas particulier suivant. Soient $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ deux groupes de Lie simplement connexes, $Z_1 \subset \tilde{H}$ et $Z_2 \subset \tilde{K}$ deux sous-groupes centraux discrets et $\varphi\colon Z_1 \to Z_2$ un morphisme de groupes. Le graphe de φ

$$Z = \{(x, \varphi(x)) | x \in Z_1\} \subset Z_1 \times Z_2$$

est un sous-groupe central discret de $\tilde{G} = \tilde{H} \times \tilde{K}$ et on prend le revêtement $\pi\colon \tilde{G} \to G = \tilde{G}/Z$. Puisque $p_H Z = Z_1$ et $p_K Z = \operatorname{im}\varphi \subset Z_2$ sont des sous-groupes fermés de $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$, on déduit que $H = \pi(\tilde{H})$ et $K = \pi(\tilde{K})$ sont des sous-groupes fermés de G. En outre, puisque $\tilde{H} \cap Z = \ker\varphi$ et $\tilde{K} \cap Z = \{e\}$, les quotients (6.3) se réduisent à

$$\text{(6.4)} \qquad \begin{cases} G/H \simeq \tilde{K}/\operatorname{im}\varphi, \\ H \simeq \tilde{H}/\ker\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} G/K \simeq \tilde{H}/Z_1, \\ K \simeq \tilde{K}. \end{cases}$$

On aura par conséquent une équivalence croisée si et seulement si $\operatorname{im}\varphi = \{e\}$ c'est-à-dire, si φ est trivial et ceci équivaut manifestement, à ce que $Z =$ graphe φ soit un produit, en l'occurrence le produit trivial $Z_1 \times \{e\}$. Lorsque $H \not\simeq K$ ce sera la condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence. Dans le cas parallèle on trouve la condition nécessaire $\ker\varphi = \{e\}$ qui, outre le cas abélien, n'est pas toujours suffisante (cf. exemple IV).

Donnons à présent quelques exemples et contre-exemples à l'équivalence globale.

(I) Soit $\tilde{G} = \mathbf{R} \times S^3$ où S^3 est la sphère munie de la structure du groupe des quaternions de norme 1. Prenons $Z_1 = \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, $Z_2 = \{1, -1\} \subset S^3$ le centre de S^3 et $\varphi\colon Z_1 \to Z_2$, $n \mapsto (-1)^n$. Les suites de Jordan-Hölder (6.2) ne sont pas équivalentes car φ n'est pas trivial. Elles admettent les quotients (où $\tilde{H} = \mathbf{R}$ et $\tilde{K} = S^3$)

$$\begin{cases} G/H \simeq S^3/Z_2 \simeq SO(3), \\ H \simeq \mathbf{R}/2\mathbf{Z} \simeq T^1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} G/K \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq T^1, \\ K \simeq S^3. \end{cases}$$

On montre facilement que tout sous-groupe central discret de $\mathbf{R} \times S^3$ qui n'est pas un produit (i.e., donne des suites non-équivalentes) est un graphe de la forme ci-dessus où Z_1 est un sous-groupe discret de rang 1 de $\mathbf{R}$.

(II) Soit $\tilde{G} = \mathrm{Spin}(n) \times \mathrm{Spin}(n+1)$, $n \geqslant 3$, $Z_1 = \{1, -1\} \subset \mathrm{Spin}(n)$, $Z_2 = \{1, -1\} \subset \mathrm{Spin}(n+1)$ et $\varphi = \mathrm{Id}\colon Z_1 \to Z_2$. Dans ce cas on n'a pas d'équivalence et

$$\begin{cases} G/H \simeq \mathrm{Spin}(n+1)/Z_2 \simeq SO(n+1), \\ H \simeq \mathrm{Spin}(n), \end{cases} \qquad \begin{cases} G/K \simeq \mathrm{Spin}(n)/Z_1 \simeq SO(n), \\ K \simeq \mathrm{Spin}(n+1). \end{cases}$$

(III) Considérons le groupe $SO(m)$, $m = 4n > 8$, et son revêtement simplement connexe Spin(m). Le centre $\tilde{\mathfrak{Z}}$ du revêtement est isomorphe à $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ et le groupe de Poincaré π_1 de $SO(m)$ (noyau du revêtement) est un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_2$. Écrivons $\tilde{\mathfrak{Z}} = \{1, a, b, c\}$. Le groupe des automorphismes de $\tilde{\mathfrak{Z}}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ car chaque automorphisme correspond à une permutation de $\{a, b, c\}$. D'autre part, le groupe des automorphismes de Spin(m) induit sur $\tilde{\mathfrak{Z}}$ un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_2$ composé de l'identité et d'un automorphisme involutif $\overline{\Phi}$ qui préserve le sous-groupe π_1. Nous supposerons désormais que $\pi_1 = (c) = (ab)$, $\overline{\Phi}(a) = b$ et $\tilde{\mathfrak{Z}} = (a) \cdot (b) \simeq \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

Soit $\tilde{G} = \mathrm{Spin}(m) \times \mathrm{Spin}(m)$, $Z_1 = Z_2 = \tilde{\mathfrak{Z}}$ et φ: $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2$ une des projections, par exemple sur le premier facteur. Puisque φ n'est ni triviale ni injective on ne peut avoir équivalence. Les quotients sont

$$\begin{cases} G/H \simeq \mathrm{Spin}(m)/\,(a), \\ H \simeq \mathrm{Spin}(m)/\,(b), \end{cases} \qquad \begin{cases} G/K \simeq \mathrm{Spin}(m)/\tilde{\mathfrak{Z}} \simeq SO(m)/\mathfrak{Z}, \\ K \simeq \mathrm{Spin}(m), \end{cases}$$

où $\mathfrak{Z} = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ est le centre de $SO(m)$. On remarque que $G/H \simeq H$ car $\overline{\Phi}$ transforme a en b et que les groupes G/H et H ne sont pas isomorphes à $SO(m) \simeq \mathrm{Spin}(m)/(c)$. Par contre, si l'on prend le morphisme φ_1: $\tilde{\mathfrak{Z}} \to \pi_1$ défini par $\varphi_1(a) = c$ et $\varphi_1(b) = 1$, alors G/H et H ne sont pas isomorphes. Considérons ensuite le sous-groupe $Z_1 = (a) \subset \tilde{\mathfrak{Z}}$ et les deux morphismes injectifs φ, φ_1: $Z_1 \to \tilde{\mathfrak{Z}}$ définis pas $\varphi(a) = b$ et $\varphi_1(a) = c$. Ces morphismes n'étant pas triviaux il n'y a pas d'équivalence croisée. D'autre part, puisque φ est induit par $\overline{\Phi}$ (ou encore, puisque (a) est transformé en (b) par $\overline{\Phi}$) il y a équivalence parallèle pour φ, tandis qu'il n'y a pas de telle équivalence pour φ_1. Les quotients s'écrivent

$$\begin{cases} G/H \simeq \mathrm{Spin}(m)/\,(b) \quad (\text{resp. } \mathrm{Spin}(m)/\,(c) \simeq SO(m)), \\ H \simeq \mathrm{Spin}(m), \end{cases}$$

$$\begin{cases} G/K \simeq \mathrm{Spin}(m)/\,(a), \\ K \simeq \mathrm{Spin}(m). \end{cases}$$

(IV) Soit $\tilde{K}$ le revêtement simplement connexe de $SL(2, \mathbf{R})$, $\tilde{\mathfrak{Z}} \simeq \mathbf{Z}$ le centre de $\tilde{K}$ et $\pi_1 \simeq \mathbf{Z}$ le groupe de Poincaré de $SL(2, \mathbf{R})$ qui en tant que sous-groupe de $\tilde{\mathfrak{Z}}$ est égal à $2\tilde{\mathfrak{Z}}$. Soit $\tilde{G} = \tilde{H} \times \tilde{K}$ où $\tilde{H} = \mathbf{R}$, et prenons les sous-groupes discrets $Z_1 = \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ et $Z_2 = \pi_1 \subset \tilde{K}$. En fixant un générateur de π_1, on peut prendre le morphisme $\varphi = \mathrm{Id}$: $Z_1 \to Z_2$. L'équivalence n'a pas lieu et

$$\begin{cases} G/H \simeq \tilde{K}/Z_2 \simeq SL(2, \mathbf{R}), \\ H \simeq \tilde{H} = \mathbf{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} G/K \simeq \mathbf{R}/\mathbf{Z} \simeq T^1, \\ K \simeq \tilde{K}. \end{cases}$$

(V) Soit $\tilde{G} = \tilde{H} \times \tilde{K}$ où $\tilde{H} = \tilde{K}$ est le revêtement simplement connexe de $SL(2, \mathbf{R})$. Prenons $Z_1 = Z_2 = \pi_1 \subset \tilde{K}$ et, en fixant des générateurs, soit φ: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ l'application $\varphi(n) = 2n$. Les quotients sont donnés par

$$\begin{cases} G/H \simeq \tilde{K}/2Z_2, \\ H \simeq \tilde{K}, \end{cases} \qquad \begin{cases} G/K \simeq \tilde{K}/Z_2 \simeq SL(2, \mathbf{R}), \\ K \simeq \tilde{K}. \end{cases}$$

Il est clair que l'équivalence croisée n'a pas lieu. Montrons qu'il en est de même pour l'équivalence parallèle. En effet, si une telle équivalence avait lieu, il existerait un automorphisme $\overline{\Phi}$: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ du centre de $\tilde{K}$ transformant Z_2 en $2Z_2$ c'est-à-dire, transformant $2\mathbf{Z}$ en $4\mathbf{Z}$. Or, ceci est impossible car $\mathbf{Z}$ ne possède que les automorphismes Id et $-$Id.

(VI) Soit $\tilde{G} = \tilde{H} \times \tilde{K}$ comme dans (V). Son centre est égal à $\tilde{\mathfrak{Z}} \times \tilde{\mathfrak{Z}} \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Considérons le sous-groupe Z engendré par $\{(1, 1), (1, -1)\}$. Dans ce cas $\tilde{H} \cap Z = \tilde{K} \cap Z = 2\mathbf{Z}$, $p_H Z = p_K Z = \mathbf{Z}$ et l'équivalence est parallèle. Par contre, si Z est engendré par $\{(1, 2), (2, -2)\}$ alors $\tilde{H} \cap Z = 4\mathbf{Z}$, $\tilde{K} \cap Z = 6\mathbf{Z}$, $p_H Z = \mathbf{Z}$ et $p_K Z = 2\mathbf{Z}$. Nous trouvons ainsi des groupes discrets tous distincts bien qu' isomorphes. Il n'y a pas d'équivalence croisée ou parallèle. Enfin, remarquons que le sous-groupe Z n'est pas un graphe de morphisme entre sous-groupes de $\mathbf{Z}$.

(VII) Prenons maintenant $\tilde{G} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$, et soit Z le sous-groupe discret engendré par un vecteur dont les composantes sur chaque facteur sont non nulles. On trouve $\tilde{H} \cap Z = \tilde{K} \cap Z = \{0\}$, $p_H Z \simeq p_K Z \simeq Z \simeq \mathbf{Z}$ et les quotients sont donnés par

$$G/H \simeq \mathbf{R}^2/p_K Z \simeq \mathbf{R} \times T^1, \quad G/K \simeq \mathbf{R}/p_H Z \simeq T^1, \quad H \simeq \mathbf{R}, K \simeq \mathbf{R}^2.$$

Les suites ne sont pas équivalentes. Considérons enfin le groupe $\tilde{G} = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ et soit Z le sous-groupes discret de rang 2 engendré par un vecteur v dont les composantes sur chaque facteur sont non nulles et par un vecteur $w \in \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ qui n'est pas colinéaire avec la projection de v. Dans ces conditions, $p_K Z \simeq \mathbf{Z}$, $p_H Z \simeq \mathbf{Z}^2$, $\tilde{H} \cap Z \simeq \mathbf{Z}$ et $\tilde{K} \cap Z = 0$. Les quotients sont respectivement

$$G/H \simeq \mathbf{R} \times T^1, \quad G/K \simeq T^2, \quad H \simeq \mathbf{R} \times T^1, \quad K \simeq \mathbf{R}^2,$$

et il n'y a pas d'équivalence.

7. Groupes de Lie résolubles

Théorème 7.1. *Soit G un groupe de Lie résoluble. Deux suites de Jordan-Hölder fermées quelconques de G sont toujours globalement équivalentes.*

Démonstration. L'argument procède par induction sur la dimension de G, le cas des dimensions 0 et 1 étant trivial. Soit donc G un groupe de dimension $n > 1$ et prenons deux suites de Jordan-Hölder fermées $(G_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ et $(H_j)_{0 \leqslant j \leqslant q}$ où $G_0 = H_0 = G$. Deux cas se présentent.

(1) $G_1 \cap H_1$ n'est pas discret, autrement dit, $\dim(G_1 \cap H_1) > 0$. Soit $K = (G_1 \cap H_1)_0$ la composante connexe de l'unité dans l'intersection. Puisque G_1 et H_1 sont des sous-groupes fermées, il en est de même pour l'intersection donc aussi pour K et $\dim K > 0$. En outre, K est normal dans G car $G_1 \cap H_1$ est normal et la composante connexe de l'unité est caractéristique (invariante par tous les automorphismes du groupe). A l'aide du corollaire 5.3 nous pouvons insérer le sous-groupe K d'une part en une suite de Jordan-Hölder fermée $(K_\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant A}$ avec $K_1 = G_1$ et d'autre part en une suite de Jordan-Hölder fermée $(K'_\beta)_{0 \leqslant \beta \leqslant B}$ avec $K'_1 = H_1$ de telle sorte que $K = K_{\alpha_0} = K'_{\beta_0}$. On peut supposer en plus que les deux suites coïncident à partir du terme K c'est-à-dire, $A - \alpha_0 = B - \beta_0$ et $K_{\alpha_0+\lambda} = K'_{\beta_0+\lambda}$ pour $\lambda \geqslant 0$. Par induction, les suites de Jordan-Hölder $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(K_\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant A}$ de G_1 sont équivalentes et ceci entraîne que les suites $(G_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ et $(K_\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant A}$ sont aussi équivalentes. De même, les suites $(H_j)_{0 \leqslant j \leqslant q}$ et $(K'_\beta)_{0 \leqslant \beta \leqslant B}$ sont équivalentes. Pour achever la démonstration il suffit de montrer que $(K_\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant A}$ est équivalente à $(K'_\beta)_{0 \leqslant \beta \leqslant B}$. Or, les deux suites induisent, par passage au quotient, des suites de Jordan-Hölder fermées $(L_\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0}$ et $(L'_\beta)_{0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0}$ dans le groupe quotient G/K où $L_\alpha = K_\alpha/K$ et $L'_\beta = K'_\beta/K$. Puisque $\dim G/K < n$, l'hypothèse de récurrence entraîne que (L_α) est équivalente à (L'_β). Par conséquent, compte tenu de la relation $L_\alpha/L_{\alpha+1} \simeq K_\alpha/K_{\alpha+1}$ ainsi que de la relation analogue pour L'_β, les quotients successifs de $(K_\alpha)_{0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0}$ sont, à une permutation près, isomorphes à ceux de $(K'_\beta)_{0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0}$. Enfin, puisque $K_{\alpha_0+\lambda} = K'_{\beta_0+\lambda}$, on trouve bien l'équivalence cherchée.

(2) $G_1 \cap H_1$ est discret. En écartant le cas trivial $G_1 = \{e\}$ qui entraîne forcément $H_1 = \{e\}$ (et qui en fait ne peut se produire sous les hypothèses $\dim G > 1$ et G résoluble), nous pouvons supposer que les dimensions de G_1 et H_1 sont strictement positives. Puisque G_1 (et H_1) est un sous-groupe connexe, normal et maximal dans G, on déduit que $G = G_1 \cdot H_1$ et que les sous-groupes G_1 et H_1 sont simples (G_1 commute avec H_1 et l'intersection est discrète donc pour tout sous-groupe normal, connexe et non trivial G_2 de G_1 le sous-groupe $G_2 \cdot H_1$ est normal, connexe et distinct de G et H_1). Les suites de Jordan-Hölder (G_i) et (H_j) se réduisent chacune à trois termes et nous nous retrouvons dans la situation décrite au paragraphe 6 avec $G_1 = H$ et $H_1 = K$. Utilisons maintenant l'hypothèse sur G. Les sous-groupes G_1 et H_1 sont résolubles et simples donc abéliens de dimension 1. Par conséquent $\tilde{G}_1 = \tilde{H}_1 = \mathbf{R}$ et l'équivalence des deux suites résulte du lemme 6.7.

La démonstration ci-dessus peut servir de modèle dans l'étude de l'équivalence globale pour d'autres classes de groupes de Lie. La première partie de la démonstration ainsi que le début de la deuxième sont valables pour tout groupe de Lie et ce n'est que la dernière partie qui peut tomber en défaut comme le montrent les contre-exemples. Cette démonstration redonne en particulier le résultat pour les groupes simplement connexes. Dans ce cas, le revêtement π: $\tilde{G}_1 \times \tilde{H}_1 \to G = G_1 \cdot H_1$ est un isomorhisme et par conséquent G est produit direct de G_1 et H_1. Il en résultent trivialement les isomorphismes $G/G_1 \simeq H_1$ et $G/H_1 \simeq G_1$. Par ailleurs, puisque les sous-groupes normaux G_1 et H_1 sont dans ce cas simplement connexes on peut vérifier directement que $G_1 \cap H_1 = \{e\}$.

Théorème 7.2. *Soit G un groupe de Lie résoluble. Deux suites principales fermées quelconques de G sont toujours équivalentes.*

La démonstration suit les mêmes étapes que celle du théorème précédent. En effet, la partie (1) se recopie entièrement en utilisant le corollaire 5.4 et en remarquant que le sous-groupe connexe K est Ad-stable lorsque G_1 et H_1 le sont. Ensuite, lorsque $G_1 \cap H_1$ est discret, les mêmes arguments montrent que $G = G_1 \cdot H_1$, que G_1 et H_1 sont Ad-simples et que G_1 commute avec H_1. Cette dernière condition montre que la représentation Ad de G dans G_1 se réduit en faît à la représentation habituelle avec domaine G_1 autrement dit, l'action par l'élément $gh \in G = G_1 \cdot H_1$ est la même que celle par l'élément $g \in G_1$. De même la représentation de G dans H_1 se réduit à H_1. Il s'en suite que les sous-groupes Ad-stables de G_1 et H_1 ne sont autres que les sous-groupes normaux et par conséquent G_1 et H_1 sont simples. Ces groupes étant résolubles, ils sont abéliens de dimension 1. Le groupe G est donc abélien de dimension 2 et la représentation Ad opère de façon triviale sur G ainsi que sur les quotients. Ceci montre que l'équivalence des suites principales revient tout simplement à l'équivalence des suites de Jordan-Hölder c'est-à-dire, on retrouve les conditions de la partie (2).

8. Groupes de Lie semi-simples et réductifs

Contrairement aux groupes résolubles, les groupes semi-simples et réductifs présentent de mauvaises propriétés par rapport à l'équivalence. Les théorèmes qui suivent décrivent certaines des obstructions.

Théorème 8.1. *Soit G un groupe de Lie semi-simple dont les composantes simples sont toutes non-isomorphes (ce qui est le cas, en particulier, lorsque les composantes simples de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sont toutes non-isomorphes). Pour que deux suites de Jordan-Hölder (resp. principales) quelconques de G soient équivalentes il faut et il suffit que G soit produit direct de ses composantes simples.*

Démonstration. Le groupe G étant semi-simple, il suffit en vertu du corollaire 5.1 de faire la démonstration pour les suites de Jordan-Hölder. Un terme quelconque G_i d'une suite de Jordan-Hölder Φ est un sous-groupe de Lie connexe et normal dans G donc sera le produit d'un certain nombre de composantes simples. Si en plus G est produit direct de ses composantes simples, le sous-groupe G_i est également un produit direct. Et dans ce cas les quotients successifs de Φ sont canoniquement isomorphes aux composantes simples de G. Pour montrer que la condition est nécessaire, procédons par récurrence sur le nombre r des composantes simples de G. Si $r = 1$, le résultat est trivial et si $r = 2$ le résultat est conséquence des lemmes 6.3 et 6.4 car l'équivalence ne peut être que croisée. Prenons ensuite un groupe semi-simple $G = H_1 \cdots H_r$, $r > 2$, dont les composantes simples H_i sont toutes non-isomorphes et supposons que le produit n'est pas direct. Plusieurs cas se présentent.

(1) Il existe des indices $i \neq j$ tel que $H_i \cap H_j \neq \{e\}$. En permutant au besoin les indices, nous pouvons supposer que $i = r - 1$ et $j = r$. Dans ces conditions, les suites de Jordan-Hölder

(A) $\quad G = H_1 \cdots H_r \supset H_2 \cdots H_r \supset \cdots \supset H_{r-1}H_r \supset H_r \supset \{e\},$

(B) $\quad G = H_1 \cdots H_r \supset H_2 \cdots H_r \supset \cdots \supset H_{r-1}H_r \supset H_{r-1} \supset \{e\}$

ne sont pas équivalentes. En effet, puisque $H_{r-1} \cap H_r \neq \{e\}$, les lemmes 6.3 et 6.4 nous disent que les suites $H_{r-1}H_r \supset H_r \supset \{e\}$ et $H_{r-1}H_r \supset H_{r-1} \supset \{e\}$ ne sont pas équivalentes. Par conséquent, si (A) est équivalent à (B), le quotient $H_{r-1}/\{e\}$ de (B) est forcément isomorphe à un quotient $(H_{i-1} \cdots H_r)/(H_i \cdots H_r)$ de la suite (A) avec $i < r$. Or ce dernier quotient, considéré comme un quotient de la suite (B), est à son tour isomorphe à un quotient $(H_{j-1} \cdots H_r)/(H_j \cdots H_r)$ de (A) avec $j \neq i$ et $j < r$. En itérant ce procédé on aboutit finalement à un quotient $(H_{l-1} \cdots H_r)/(H_l \cdots H_r)$, $l < r$, de la suite (B) qui devra être d'une part isomorphe à $H_{r-1}/\{e\}$ et d'autre part isomorphe à l'un des quotients $(H_{r-1}H_r)/H_r$ ou $H_r/\{e\}$, ce qui est contradictoire.

(2) Pour tout $i \neq j$ on a $H_i \cap H_j = \{e\}$. Puisque le produit n'est pas direct, nous pouvons supposer que $H_1 \cap (H_2 \cdots H_r) \neq \{e\}$ et par conséquent que $(H_1H_2) \cap (H_3 \cdots H_r) \neq \{e\}$. Distinguons ici deux cas:

(a) $H_1 \cap (H_3 \cdots H_r) = H_2 \cap (H_3 \cdots H_r) = \{e\}$ (ce sera toujours le cas lorsque $r = 3$). Dans ces conditions, les suites de Jordan-Hölder

(A) $\quad G = H_1 \cdots H_r \supset H_2 \cdots H_r \supset H_3 \cdots H_r \supset \cdots \supset \{e\},$

(B) $\quad G = H_1 \cdots H_r \supset H_1\hat{H}_2 \cdots H_r \supset H_3 \cdots H_r \supset \cdots \supset \{e\}$

ne sont pas équivalentes. On constate tout d'abord que les suites $G \supset H_2 \cdots H_r \supset H_3 \cdots H_r$ et $G \supset H_1\hat{H}_2 \cdots H_r \supset H_3 \cdots H_r$ ne sont pas équivalentes car elles induisent des suites de Jordan-Hölder non-équivalentes dans $\Gamma = G/(H_3 \cdots H_r)$. En effet, q étant l'application quotient, les suites induites s'écrivent respectivement par $\Gamma \supset q(H_2) \supset \{e\}$ et $\Gamma \supset q(H_1) \supset \{e\}$. Les hypothèses ci-dessus entraînent que $q(H_1) \simeq H_1$ n'est pas isomorphe à $q(H_2) \simeq H_2$ et que $q(H_1) \cap q(H_2) \neq \{e\}$. Un arguement semblable à celui esquissé dans (1) montre enfin que la suite (A) n'est pas équivalente à (B).

(b) $H_1 \cap (H_3 \cdots H_r) \neq \{e\}$ (ou $H_2 \cap (H_3 \cdots H_r) \neq \{e\}$). Le groupe de Lie $K = H_1H_3 \cdots H_r$ n'étant pas un produit direct admet, par l'hypothèse de récurrence, des suites de Jordan-Hölder non-équivalentes $(K_i)_{1<i<p}$ et $(K_j')_{1<j<p}$. En posant $K_0 = K_0' = G$, on obtient deux suites de Jordan-Hölder de G qui visiblement ne sont pas équivalentes. Ceci achève la démonstration.

Ce théorème n'est plus vrai lorsque G admet des composantes simples isomorphes. Il est clair que la condition de produit direct est suffisante à ce que les suites de Jordan-Hölder soient toutes équivalentes. Pourtant elle n'est pas nécessaire car on pourrait avoir des équivalences parallèles. En effet, si l'on prend dans l'exemple III le morphisme de groupes $\varphi: Z_1 \to \tilde{\mathfrak{Z}}$ défini par $\varphi(a) = b$, on obtient le groupe semi-simple $G = H \cdot K$ avec $H \simeq K \simeq$ Spin(m), l'intersection $H \cap K$ est non-triviale (car φ est non-trivial) et les deux suites de Jordan-Hölder possibles sont équivalentes par une équivalence parallèle. De même, on pourra prendre dans l'exemple V le morphisme non-trivial $\varphi = \mathrm{Id}: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Le résultat peut néanmoins s'étendre aux groupes de Lie réductifs. Soit G un tel groupe, R son radical et S sa composante semi-simple. Le sous-groupe R, égal à la composante connexe de l'unité du centre de G, est normal et fermé dans G (c'est en fait un sous-groupe caractéristique). Le sous-groupe S, produit de tous les sous-groupes connexes, normaux et simples non-abéliens de G, est égal au premier groupe dérivé $\mathfrak{D}^1G$ (sous-groupe engendré par les commutateurs de G). C'est un sous-groupe caractéristique donc normal dans G qui n'est pas forcément fermé. En plus $G = R \cdot S$, tout élément de R commute avec tout élément de S et l'intersection $R \cap S$ est un sous-groupe de Lie avec topologie discrète (i.e., $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S} = 0$). L'exemple suivant montre que S n'est pas toujours fermé. Soit $\tilde{S}$ le revêtement simplement connexe de $SL(2, \mathbf{R})$, $Z \simeq \mathbf{Z}$ son groupe de Poincaré et prenons dans le produit $\tilde{G} = \mathbf{R} \times \tilde{S}$ le sous-groupe central discret $\mathfrak{Z} \subset \mathbf{R} \times Z$ engendré par les éléments $(1, 1)$ et $(\alpha, 1)$ où α est un nombre irrationnel. Alors $(\mathbf{R} \times \{e\}) \cap \mathfrak{Z} = \{(n(1 - \alpha), e)\}$, $(\{0\} \times \tilde{S}) \cap \mathfrak{Z} = \{e\}$, $p_{\mathbf{R}}\mathfrak{Z} = \{n + m\alpha\}$ et $p_S\mathfrak{Z} = Z$. Il en résulte le revêtement simplement connexe π: $\mathbf{R} \times \tilde{S} \to \tilde{G}/\mathfrak{Z} = R \cdot S$ où $R = \pi(\mathbf{R} \times \{e\}) \simeq T^1$ et $S = \pi(\{0\} \times \tilde{S}) \simeq \tilde{S}$. Comme $p_{\mathbf{R}}\mathfrak{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$ ce groupe n'est pas fermé et par conséquent, en utilisant la formule (6.1), on voit que S n'est pas fermé dans G. Remarquons en outre que $R \cap S \simeq \mathbf{Z}$; comme sous-groupe de $S \simeq \tilde{S}$ il est égal à Z et il est fermé; comme sous-groupe de R il est égal au quotient $p_{\mathbf{R}}\mathfrak{Z}/(\mathbf{R} \cap \mathfrak{Z})$ c'est-à-dire, au quotient de $p_{\mathbf{R}}\mathfrak{Z}$ modulo la relation d'équivalence; $(n + m\alpha) \sim (n' + m'\alpha)$ si et seulement si $n - n' = m - m'$, et il est dense dans T^1.

Plus généralement, soit $G = R \cdot S$ un groupe de Lie réductif et $\tilde{G}$ son revêtement simplement connexe. Alors $\tilde{G} = \tilde{R} \times \tilde{S}$ où $\tilde{R} \simeq \mathbf{R}^q$ est le radical de $\tilde{G}$ ainsi que le revêtement simplement connexe de R et $\tilde{S}$ est la composante semi-simple de $\tilde{G}$ ainsi que le revêtement simplement connexe de S. Soit Z le noyau de π: $\tilde{G} \to G$. La formule (6.1) montre que S est fermé dans G si et seulement si $p_R Z$ est fermé dans $\tilde{R}$.

Lemme 8.1. *Pour que S soit fermé dans G il faut et il suffit que $R \cap S$ soit fermé dans G.*

Démonstration. En effet, si S est fermé alors $R \cap S$ est fermé. Réciproquement, si $R \cap S$ est fermé, son image réciproque dans $\tilde{R}$ est fermée. Or, cette image réciproque est égale à $p_R Z$ (cf. lemme 6.2).

Corollaire 8.1. *Pour que S soit fermé dans G il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée;*

(1) *Le centre de $\tilde{S}$ est fini.*

(2) *$p_S Z$ est fini.*

(3) *$p_S Z/(\tilde{S} \cap Z)$ est fini.*

(4) *$R \cap S$ est fini.*

Démonstration. Il est clair que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) et que (3) $\Leftrightarrow$ (4) en vertu du lemme 6.2. Enfin, la condition (4) entraîne que $R \cap S$ est fermé. Il est utile de voir plus directement la nature de ces conditions. Pour ceci remarquons tout d'abord que la trace $(\tilde{R} \times \{x\}) \cap Z$ est fermée donc sa projection dans $\tilde{R}$ est aussi fermée. Puisque $p_R Z = \bigcup p_R[(\tilde{R} \times \{x\}) \cap Z]$, $x \in p_S Z$, la condition (2) entraîne que $p_R Z$ est fermé en tant que réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés. Remarquons ensuite que si $x \equiv y \bmod(\tilde{S} \cap Z)$ alors $p_R[(\tilde{R} \times \{x\}) \cap Z] = p_R[(\tilde{R} \times \{y\}) \cap Z]$ et par conséquent la condition (3) entraîne que $p_R Z$ est réunion d'un nombre fini de $p_R[(\tilde{R} \times \{x\}) \cap Z]$ à savoir, de ceux qui proviennent d'un système complet de représentants du quotient $p_S Z/(\tilde{S} \cap Z)$.

Remarque La composante semi-simple S peut être fermée même lorsque l'intersection $R \cap S$ est infinie. Pour le voir, il suffit de reprendre l'exemple précédent et de considérer le sous-groupe central discret $\mathfrak{Z} \subset \mathbf{R} \times Z$ de $\mathbf{R} \times \tilde{S}$ engendré par (1, 1). Dans ce cas $R \simeq \mathbf{R}$, $S \simeq \tilde{S}$ et $R \cap S \simeq \mathbf{Z}$.

Lemme 8.2. *Soit G un groupe de Lie réductif dont la composante semi-simple est fermée. Pour que deux suites de Jordan-Hölder (resp. principales) fermées de G soient toujours équivalentes il faut que $R \cap S = \{e\}$.*

Démonstration. La démonstration procède en deux étapes. Tout d'abord nous établirons le résultat lorsque dim $R = 1$. Ensuite, nous réduirons le cas général à ce cas particulier. Puisque G est réductif, les suites de Jordan-Hölder sont égales aux suites principales.

(a) On suppose que $G = R \cdot S$ est réductif et que $\dim R = 1$. Soit $S = S_1 \cdots S_r$ la décomposition de S en ses composantes simples. Nous allons procéder par récurrence sur le nombre r. Pour $r = 1$ le résultat est conséquence du corollaire 6.1 car l'équivalence ne peut être que croisée. Supposons ensuite que $r > 1$. Si $R \cap S_1 \neq \{e\}$, les suites

$$\text{(A)} \quad G = R \cdot S_1 \cdots S_r \supset R \cdot S_1 \cdots S_{r-1} \supset \cdots \supset R \cdot S_1 \supset R \supset \{e\},$$

$$\text{(B)} \quad G = R \cdot S_1 \cdots S_r \supset \cdots \supset R \cdot S_1 \supset S_1 \supset \{e\}$$

ne sont pas équivalentes car les trois derniers termes de chaque suite ne sont pas équivalents. Si $R \cap S_1 = \{e\}$ et si en plus $R \cap S \neq \{e\}$ alors $e \neq g = g_1 \cdots g_r$, avec $g \in R$ et $g_i \in S_i$, entraîne $gg_1^{-1} = g_2 \cdots g_r \neq e$ c'est-à-dire, $(R \cdot S_1) \cap (S_2 \cdots S_r) \neq \{e\}$. Dans ces conditions, si $R \cap (S_2 \cdots S_r) = \{e\}$, les suites

$$\text{(A)} \quad G = R \cdot S_1 \cdots S_r \supset R \cdot S_2 \cdots S_r \supset S_2 \cdots S_r \supset \cdots \supset \{e\},$$

$$\text{(B)} \quad G = R \cdot S_1 \cdots S_r \supset S_1 \cdots S_r \supset S_2 \cdots S_r \supset \cdots \supset \{e\}$$

ne sont pas équivalentes. En effet, les trois premiers termes de (A) et (B) induisent des suites de Jordan-Hölder dans le quotient $\Gamma = G/(S_2 \cdots S_r)$ et, si l'on indique par q l'application quotient, ces suites sont données par $\Gamma \supset q(R) \supset \{e\}$ et $\Gamma \supset q(S_1) \supset \{e\}$. Puisque $q(R)$ est abélien et $q(S_1)$ non-abélien simple et que $\Gamma = q(R) \cdot q(S_1)$, l'équivalence ne peut être que croisée. Or, cette équivalence n'a pas lieu car l'hypothèse $R \cap (S_2 \cdots S_r) = \{e\}$ entraîne que $q\colon R \to q(R)$ est un isomorphisme et par conséquent $q(g)$ est un élément non-trivial de $q(R) \cap q(S_1)$. Si par contre $R \cap (S_2 \cdots S_r) \neq \{e\}$, l'hypothèse de récurrence entraîne que le groupe $R \cdot S_2 \cdots S_r$ admet des suites de Jordan-Hölder non-équivalentes qui s'étendent trivialement à des suites de Jordan-Hölder non-équivalentes de G en prenant pour premier terme le groupe $G = S_1 \cdot R \cdot S_2 \cdots S_r$. On remarquera de passage que $R \cdot S_i \cdots S_r$ est toujours un sous-groupe fermé car c'est l'image réciproque de son image directe dans G/R, cette image étant fermée car G/R est semi-simple.

(b) Considérons maintenant le cas général où $G = R \cdot S$ est réductif et la dimension de R est quelconque. Supposons que $R \cap S \neq \{e\}$ et construisons deux suites de Jordan-Hölder fermées et non-équivalentes de G. Pour le faire, nous allons tout d'abord construire un sous-groupe fermé à un paramètre H de R tel que $H \cdot S$ est fermé dans G et l'intersection $H \cap S$ est non-triviale. Pour ceci, indiquons par Z le noyau de $\pi\colon \tilde{G} \to G$ et remarquons que $R \cap S$

est un sous-groupe discret de R dont l'image réciproque par l'application restreinte $\pi\colon \tilde{R} \to R$ est égale à $p_R Z$. Soit (ξ_λ) un système libre de générateurs du groupe abélien $p_R Z$. Puisque $p_R Z \supsetneq \tilde{R} \cap Z$, il existe un générateur, par exemple ξ_1, qui n'appartient pas à $\tilde{R} \cap Z$. Décomposons $\tilde{R} \simeq \mathbf{R}^q$ en un produit $\tilde{R} = \mathbf{R}^{q-1} \times \mathbf{R}$ de telle sorte que la composante $\{0\} \times \mathbf{R}$ contienne le générateur ξ_1 et que la composante $\mathbf{R}^{q-1} \times \{0\}$ contienne tous les autres générateurs ξ_λ, $\lambda > 1$. Nous pouvons réécrire $\tilde{G}$ sous la forme $\tilde{G} = \tilde{R} \times \tilde{S} = \mathbf{R}^{q-1} \times \mathbf{R} \times \tilde{S}$ et prendre le sous-groupe à un paramètre $H = \pi(\{0\} \times \mathbf{R} \times \{e\})$ de G. Dans ces conditions, le sous-groupe $H \cdot S = \pi(\{0\} \times \mathbf{R} \times \tilde{S})$ est fermé dans G car si l'on pose $K = \pi(\mathbf{R}^{q-1} \times \{0\} \times \{e\})$ et si l'on considère le revêtement $\pi\colon \mathbf{R}^{q-1} \times (\mathbf{R} \times \tilde{S}) \to K \cdot (H \cdot S)$, la projection $p_{\mathbf{R}^{q-1}} Z$ est le sous-groupe discret de $\mathbf{R}^{q-1}$ engendré par les éléments $(\xi_\lambda)_{\lambda > 1}$ donc un sous-groupe fermé. En effet, $p_{\mathbf{R}^{q-1}}$ est le composé de p_R avec la première projection du produit $\mathbf{R}^{q-1} \times \mathbf{R}$. Montrons ensuite que H est fermé dans G. Puisque R est fermé dans G il suffit de montrer que H est fermé dans R. Or, $\tilde{R} \cap Z$ est un sous-groupe de $p_R Z$ et par conséquent il existe un système libre $(\zeta_\mu)_{1 \leqslant \mu \leqslant r}$, $r \leqslant q$, de générateurs de $p_R Z$ et des entiers non nuls $(n_\mu)_{1 \leqslant \mu \leqslant s}$, $s \leqslant r$, tel que $(n_\mu \zeta_\mu)_{1 \leqslant \mu \leqslant s}$ soit un système libre de générateurs de $\tilde{R} \cap Z$. Posons $\xi_1 = \xi_1' + \xi_2''$ où $\xi_1' \in [\zeta_1, \cdots, \zeta_s]$ et $\xi_2'' \in [\zeta_{s+1}, \cdots, \zeta_r]$ et décomposons $\tilde{R}$ en le produit $\tilde{R} = \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^{q-s}$ de telle sorte que $\mathbf{R}^s \times \{0\}$ contienne les éléments $(\zeta_\mu)_{1 \leqslant \mu \leqslant s}$ (en fait ce sera le sous-espace vectoriel engendré par ces éléments) et que $\{0\} \times \mathbf{R}^{q-s}$ contienne les éléments $(\zeta_\mu)_{\mu > s}$. Le sous-groupe $\{0\} \times \mathbf{R} \times \{e\} = (t\xi_1)$ est égal à $(t\xi_1') + (t\xi_1'')$, $t \in \mathbf{R}$, et par conséquent le sous-groupe $H \subset R \simeq T^s \times \mathbf{R}^{q-s}$ est égal à $(t\pi\xi_1') \cdot (t\pi\xi_1'')$. Or, puisque $n_1 \cdots n_s \xi_1' \in \tilde{R} \cap Z$, le sous-groupe à un paramètre $(t\pi\xi_1')$ est périodique donc compact (isomorphe à T^1 ou réduit à $\{0\}$ lorsque $\xi_1' \in \tilde{R} \cap Z$) et, puisque $\pi\colon \mathbf{R}^{q-s} \to \mathbf{R}^{q-s}$ est un isomorphisme, le sous-groupe $(t\pi\xi_1'')$ est égal à une droite de $\mathbf{R}^{q-s}$ ou est réduit à $\{0\}$ lorsque $\xi_1'' = 0$. En tout cas, ceci entraîne que H est fermé dans R. Une façon plus rapide de démontrer cette propriété est la suivante: On remarque que le groupe de Lie $H \cdot S$ est réductif et que sa composante semi-simple est égale à S. Par conséquent son radical est forcément égal au sous-groupe abélien connexe H ce radical étant fermé dans $H \cdot S$ donc dans G. Enfin, la construction même de H montre que $H \cap S \neq \{e\}$. La partie (a) entraîne maintenant qu'il existe des suites de Jordan-Hölder fermées de $H \cdot S$ qui ne sont pas équivalentes et ces suites peuvent s'étendre de façon triviale en des suites non-équivalentes de G en intercalant des sous-groupes fermés entre G et $H \cdot S$. En fait, les nouveaux quotients ainsi obtenus sont tous abéliens simples car la suite à intercaler entre G et $H \cdot S$ peut être obtenue tout simplement en remontant à G une suite de Jordan-Hölder fermée du groupe résoluble (de fait abélien) $G/(H \cdot S)$.

Remarque. La démonstration ci-dessus montre plus précisément que lorsque $R \cap S \neq \{e\}$, le groupe de Lie réductif $G = R \cdot S$ admet toujours des suites de Jordan-Hölder fermées non-équivalentes, la non-équivalence ayant déjà lieu pour les quotients simples non-abéliens.

Soit $G = R \cdot S$ un groupe de Lie réductif. Son algèbre de Lie $\mathcal{G} = \mathfrak{R} \oplus \mathbb{S}$ est composée directe du radical $\mathfrak{R}$ (égal au centre) et de la composante semi-simple $\mathbb{S}$. Tout idéal $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ est réductif et sa décomposition en radical et partie semi-simple est donnée par $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \mathfrak{R}) \oplus (\mathcal{H} \cap \mathbb{S})$. Il en résulte que tout sous-groupe de Lie normal et connexe H de G se décompose en le produit $H = (H \cap R) \cdot (H \cap S)$ où $H \cap R$ est central et $H \cap S$ est semi-simple. En plus, la composante connexe de l'unité de $H \cap R$ est égale au sous-groupe de Lie H' qui correspond à $\mathcal{H} \cap \mathfrak{R}$, la composante connexe de l'unité de $H \cap S$ est égale au sous-groupe H'' qui correspond à $\mathcal{H} \cap \mathbb{S}$ et par conséquent $H = H' \cdot H''$. Si en plus $R \cap S = \{e\}$ alors le produit $H = H' \cdot H''$ est direct et $H' = H \cap R$, $H'' = H \cap S$. Les propriétés ci-dessus ne dépendent que de la structure particulière de l'algèbre semi-simple $\mathbb{S}$. Par conséquent elles s'étendent entièrement à tout groupe de Lie G dont l'algèbre est un composé direct $\mathcal{G} = \mathfrak{R} \oplus \mathbb{S}$, $\mathbb{S}$ étant semi-simple et $\mathfrak{R}$ quelconque. Au niveau du groupe, ceci revient à dire que $G = R \cdot S$ où R et S sont des sous-groupes de Lie normaux, R est quelconque, S est semi-simple et l'intersection $R \cap S$ est un sous-groupe de Lie à topologie discrète. Remarquons enfin qu'un groupe réductif $G = R \cdot S$ est produit direct de sous-groupes simples (abéliens ou non) si et seulement si (a) $R \cap S = \{e\}$ et (b) S est produit direct de ses composantes simples. En outre, lorsque cette condition est vérifiée, le sous-groupe S est fermé dans G.

Théorème 8.2. *Soit G un groupe de Lie réductif dont la composante semi-simple S est fermée et supposons en plus que toutes les composantes simples de S sont non-isomorphes. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que deux suites de Jordan-Hölder* (*resp. principales*) *fermées de G soient toujours équivalentes est que $R \cap S = \{e\}$ et que S soit produit direct de ses composantes simples.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire en vertu du lemme. Sinon, il existerait des suites de Jordan-Hölder non-équivalentes de S qui s'étendraient en des suites de Jordan-Hölder fermées et non-équivalentes de G. Montrons que la condition est également suffisante. Soient (G_i) et (H_j) deux suites de Jordan-Hölder fermées de G. Le groupe réductif G_i admet la décomposition en produit direct $G_i = G_i' \cdot G_i''$ où $G_i' = G_i \cap R$ et $G_i'' = G_i \cap S$. On remarque que dans le cas réductif la proposition 4.1 entraîne que chaque G_i est normal dans G c'est-à-dire, que la suite est principale. Pourtant cette propriété n'est pas essentielle et la décomposition peut s'obtenir en procédant par récurrence sur les termes G_i de la suite. Par conséquent, le quotient $G_i/G_{i+1} = (G_i'/G_{i+1}') \cdot (G_i''/G_{i+1}'')$ est également un produit direct et, puisque ce quotient est simple, chaque facteur est soit un groupe simple soit le groupe réduit à l'identité. Ceci montre que la suite (G_i) induit des suites de composition fermées (G_i') et (G_i'') dans R et S respectivement et que les quotients de ces suites sont soit simples soit triviaux. En outre, à chaque quotient trivial de (G_i') correspond un quotient non-trivial de (G_i'') et réciproquement. En supprimant les termes répétés, on obtient deux suites de Jordan-Hölder fermées, une dans R et l'autre dans S, dont les quotients successifs se trouvent en correspondance biunivoque avec les quotients de la suite (G_i), deux quotients correspondants étant isomorphes. De même, la suite (H_j) induit des suites de Jordan-Hölder fermées dans R et dans S. Enfin, les théorèmes 7.1 et 8.1 nous disent que les suites induites sont équivalentes et ceci achève la démonstration. Pour les suites principales, on voit facilement que la Ad-équivalence des suites de R et de S donne la Ad-équivalence des suites de G.

On peut encore étendre ces résultats aux groupes de Lie dont la décomposition de Levi est un composé direct. En effet, soit G un groupe de Lie et supposons que son algèbre de Lie est composée directe $\mathcal{G} = \mathfrak{R} \oplus \mathcal{S}$ d'un idéal résoluble $\mathfrak{R}$ et d'un idéal semi-simple $\mathcal{S}$. L'idéal $\mathfrak{R}$ est forcément le radical de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{S}$ est un supplémentaire de Levi. En indiquant par R et S les sous-groupes de Lie connexes correspondants, le sous-groupe R est le radical de G donc il est fermé dans G, le sous-groupe S est normal et semi-simple, l'intersection $R \cap S$ est un sous-groupe de Lie à topologie discrète et $G = R \cdot S$. On démontre aussi que S est fermé si et seulement si $R \cap S$ est fermé dans G (dans quel cas, $R \cap S$ est un sous-groupe discret de G) et cette condition sera vérifiée en particulier lorsque $R \cap S = \{e\}$. Puisque deux supplémentaires de Levi $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{G}$ diffèrent par un automorphisme spécial, il en sera de même pour les sous-groupes correspondants S et S' et le caractère normal ou fermé de S entraîne alors le même caractère pour tout autre supplémentaire de Levi S'. Enfin, puisque R est caractéristique, les intersections $R \cap S$ et $R \cap S'$ sont isomorphes. En particulier, si $R \cdot S$ est un produit direct il en est de même pour $R \cdot S'$ et $S = S'$ car deux composantes normales coïncident.

Lemme 8.3. *Soit G un groupe de Lie dont une composante de Levi S est fermée et normale dans G. Pour que les suites de Jordan-Hölder (resp. principales) fermées de G soient toutes équivalentes il faut que $R \cap S = \{e\}$.*

Démonstration. Soit q: $\mathcal{G} = \mathfrak{R} \oplus \mathcal{S} \to \mathcal{G}/\mathcal{S}$ l'application quotient. Sa restriction $q_{\mathfrak{R}}$: $\mathfrak{R} \to \mathcal{G}/\mathcal{S}$ est surjective (en fait un isomorphisme), par conséquent l'image réciproque de toute sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}/\mathcal{S}$ s'écrit comme composé direct $q^{-1}(\mathcal{H}) = (q_{\mathfrak{R}})^{-1}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{S}$ et $(q_{\mathfrak{R}})^{-1}(\mathcal{H}) = \mathfrak{R} \cap q^{-1}(\mathcal{H})$. Considérons ensuite le groupe résoluble G/S et soit (K_i) la suite de ses sous-groupes dérivés. Chaque K_i est connexe et normal et il existe un indice i_0 tel que K_{i_0} est abélien et non-trivial (on suppose que R est non-trivial). Son adhérence $K = \overline{K_{i_0}}$ est un sous-groupe de Lie abélien, connexe, normal et fermé. Soit p: $G \to G/S$ l'application quotient. Sa restriction p_R: $R \to G/S$ est surjective et son noyau est le sous-groupe discret $R \cap S$, par conséquent p_R est un revêtement. Posons $H = p^{-1}(K) \subset G$, $H' = (p_R)^{-1}(K) \subset R$ et soit H'' la composante connexe de l'unité de H'. Dans ces conditions, H est un sous-groupe connexe, normal et fermé de G, H' est un sous-groupe normal et fermé de R et par conséquent H'' est connexe, normal et fermé dans R. Puisque tout élément de R commute avec tout élément de S et que R est fermé dans G, on voit que H'' est aussi normal et fermé dans G. En plus, H'' est abélian car son algèbre de Lie est isomorphe à celle de K. On montre également que H' est abélien car $H' = H'' \cdot Z$ où Z est le noyau de p_R donc un sous-groupe central discret de R. Si l'on indique par q: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{S}$ l'application tangente à p, alors $\mathcal{H} = q^{-1}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'' = (q_{\mathfrak{R}})^{-1}(\mathcal{H})$ et par conséquent $\mathcal{H} = \mathcal{H}'' \oplus \mathcal{S}$. On en déduit que $H = H'' \cdot S$. Procédons maintenant par récurrence sur la dimension de R. Si $\dim R = 1$, le groupe R est abélien et par conséquent G est réductif. On retrouve donc les hypothèses du lemme 8.2. Dans le cas général, remarquons tout d'abord que le sous-groupe normal $H = H'' \cdot S$ est réductif car son radical H'' est abélien. En plus, deux suites de Jordan-Hölder fermées et non-équivalentes de H peuvent s'étendre trivialement en des suites de Jordan-Hölder fermées et non-équivalentes de G. Par conséquent toutes les suites de Jordan-Hölder fermées de H sont équivalentes et ceci entraîne, en vertu du lemme 8.2, que $H'' \cap S = \{e\}$. Considérons ensuite le groupe quotient $G/H'' = R' \cdot S'$ où $R' = R/H''$ est l'image de R et S' est l'image de S dans le quotient. La condition $H'' \cap S = \{e\}$ entraîne que S' est un sous-groupe semi-simple isomorphe à S et, puisque son image réciproque $H'' \cdot S$ est fermée dans G, ce sous-groupe est fermé dans G/H''. D'autre part R' est résoluble. Enfin, si l'on indique par ρ: $G \to G/H''$ l'application quotient, alors sa restriction ρ: $R \cap S \to R' \cap S'$ est un isomorphisme. En effet, si $x \in R \cap S$ et $\rho(x) = e$ alors, puisque ρ: $S \to S'$ est un isomorphisme, on trouve que $x = e$. D'autre part, si $z \in R' \cap S'$ alors $z = \rho(x) = \rho(y)$ avec $x \in R$ et $y \in S$. Or, ceci entraîne que $x^{-1}y \in H'' \subset R$ c'est-à-dire, $y \in R \cap S$. On voit ainsi que $R' \cap S' \simeq (R \cap S)/[(R \cap S) \cap H''] = (R \cap S)/\{e\}$. Puisque H'' est connexe, normal et fermé, deux suites de Jordan-Hölder fermées et non-équivalentes de G/H'' induisent par image réciproque des suites de Jordan-Hölder fermées et non-équivalentes de G. Par conséquent G/H'' vérifie les hypothèses du lemme et, puisque $\dim R' < \dim R$, la récurrence montre que $R' \cap S' = \{e\}$ donc finalement que $R \cap S = \{e\}$.

Théorème 8.3. *Soit G un groupe de Lie dont le radical admet un supplémentaire de Levi fermé et normal. Supposons en plus que les composantes simples de ce supplémentaire sont toutes non-isomorphes. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que deux suites de Jordan-Hölder (resp. principales) fermées quelconques de G soient équivalentes est que* (a) $R \cap S = \{e\}$ *et* (b) *S est produit direct de ses composantes simples.*

La démonstration est entièrement analogue à celle du théorème 8.2.

9. Suites d'homotopie

Soit $\pi: \tilde{G} \to G$ le revêtement simplement connexe du groupe G, H un sous-groupe de Lie normal et connexe de G et $\tilde{H}$ le sous-groupe normal et connexe de $\tilde{G}$ qui correspond à H c'est-à-dire, le sous-groupe connexe dont l'algèbre de Lie est celle de H. Le groupe $\tilde{H}$ est la composante connexe de l'unité de $\pi^{-1}(H)$ et c'est un sous-groupe fermé. On sait que $\tilde{H}$ et $\tilde{G}/\tilde{H}$ sont simplement connexes et par conséquent la restriction $\pi: \tilde{H} \to H$ ainsi que l'application quotient $\pi: \tilde{G}/\tilde{H} \to G/H$ qui s'en déduit sont des revêtements simplement connexes de H et de G/H respectivement. Indiquons par $\pi_1(G)$ le groupe de Poincaré de G. Puisque $\pi_1(G) = \pi^{-1}(e)$, il est clair que $\pi_1(H) = \pi_1(G) \cap \tilde{H}$ et on voit facilement que $\pi_1(G/H) = \pi_1(G)/\pi_1(H)$.

Prenons maintenant une suite de composition (ou distinguée) $\Phi = (G_i)$ de G et soit $\tilde{\Phi} = (\tilde{G}_i)$ la suite correspondante dans $\tilde{G}$. Alors $\pi: \tilde{G}_i \to G_i$ et $\pi: \tilde{G}_i/\tilde{G}_{i+1} \to G_i/G_{i+1}$ sont des revêtements simplement connexes, $\pi_1(G_i) = \pi_1(G) \cap \tilde{G}_i$ et $\pi_1(G_i/G_{i+1}) = [\pi_1(G) \cap \tilde{G}_i]/[\pi_1(G) \cap \tilde{G}_{i+1}]$. On voit ainsi que la suite de composition Φ détermine une suite de composition $\eta = (\pi_1(G_i)) = (\pi_1(G) \cap \tilde{G}_i)$ du groupe abélien de type fini $\pi_1(G)$. Or, si l'on prend deux suites Φ et $\Psi = (H_j)$ de G et si l'on considère les suites correspondantes η et ζ de $\pi_1(G)$, alors l'équivalence des deux premières entraîne l'équivalence des deux dernières car tout isomorphisme $u_i: G_i/G_{i+1} \to H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)+1}$ se remonte en un isomorphisme $\tilde{u}_i: \tilde{G}_i/\tilde{G}_{i+1} \to \tilde{H}_{\sigma(i)}/\tilde{H}_{\sigma(i)+1}$ qui transforme $\pi_1(G_i/G_{i+1})$ sur $\pi_1(H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)+1})$. Réciproquement, s'il existe une équivalence $(\tilde{u}_i)$ des suites $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ qui induit une équivalence sur les suites d'homotopie alors $(\tilde{u}_i)$ se factorise en une équivalence des suites Φ et Ψ. Pour les suites distinguées il faut exiger en plus que l'équivalence soit compatible avec la représentation Ad. Or, nous avons vu dans la démonstration du théorème 5.6 que s'il existe un isomorphisme global u entre deux quotients H et H' dont la dérivée u_* est compatible avec la représentation ad alors l'isomorphisme u est compatible avec Ad. Autrement dit, la compatibilité avec Ad ne représente pas une obstruction supplémentaire. Remarquons enfin que toute équivalence au niveau de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ entraîne une équivalence au niveau du groupe simplement connexe $\tilde{G}$. On obtient ainsi la proposition suivante où Φ_* indique la suite de composition de l'algèbre de Lie g qui correspond a Φ.

Proposition 9.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux suites de Jordan-Hölder (resp. principales) fermées Φ et Ψ soient équivalentes est qu'il existe une équivalence pour les suites de Jordan-Hölder (resp. principales) Φ_* et Ψ_* qui induit une équivalence pour les suites d'homotopie.*

Rappelons que deux suites de Jordan-Hölder (ou principales) de g ou $\tilde{G}$ sont toujours équivalentes. La proposition 9.1 affirme qu'il y aura équivalence dans G si et seulement si l'équivalence dans $\mathcal{G}$ ou $\tilde{G}$ peut être choisie de façon compatible avec les suites d'homotopie. Remarquons aussi qu'une suite de Jordan-Hölder $\tilde{\Phi}$ n'induit pas forcément une suite de Jordan-Hölder du groupe d'homotopie. En plus, la simple équivalence des suites d'homotopie est loin d'être suffisante à l'équivalence des suites Φ et Ψ. En effet, si l'on reprend l'exemple II, les deux suites d'homotopie sont données par $\mathbf{Z}_2 \supset 0 \supset 0$.

Pourtant, nous pouvons obtenir certains résultats en faisant valoir la connaissance de la structure des groupes simples. En effet, si H et K sont deux groupes localement isomorphes (même algèbre de Lie) on peut supposer que $\tilde{H} = \tilde{K}$ et tout isomorphisme u: $H \to K$ se remonte en un automorphisme $\tilde{u}$: $\tilde{H} \to \tilde{H}$ dont la restriction au centre $\tilde{u}_{\mathfrak{Z}}$: $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ est également un automorphisme qui transforme $\pi_1(H)$ en $\pi_1(K)$. Par conséquent, pout déterminer s'il existe un isomorphisme global u: $H \to K$ il faut procéder aux vérifications suivantes:

(a) $\pi_1(H)$ doit être isomorphe à $\pi_1(K)$ en tant que groupes abstraits.

(b) Il doit exister un automorphisme φ de $\mathfrak{Z}$ qui transforme $\pi_1(H)$ en $\pi_1(K)$.

(c) φ doit être induit par un automorphisme de $\tilde{H}$.

Appliquons cette méthode aux groupes compacts. Pour ceci, remarquons tout d'abord que les quotients abéliens de toute suite de Jordan-Hölder Φ de G sont compacts donc isomorphes à S^1. L'équivalence aura toujours lieu pour ces quotients et il ne reste qu'à examiner les quotients simples non abéliens qui eux sont également compacts. Lorsque Φ est principale, c'est une suite de Jordan-Hölder car G est réductif et les quotients abéliens sont tous des cercles. En plus, la représentation adjointe induite dans ces quotients abéliens est triviale et par conséquent tout équivalence entre ces quotients est compatible avec Ad. Pour examiner l'équivalence des quotients non abéliens, dressons la liste des groupes simples de type compact [12, p. 346], [18], [9]:

$\mathcal{G}$	U	$\mathfrak{Z}(\tilde{U})$	Aut $\mathfrak{Z}(\tilde{U})$	$A(\tilde{U})$
a_n $(n \geqslant 1)$	$SU(n+1)$	$\mathbf{Z}_{n+1}$	$\mathbf{Z}^*_{n+1}$	$\mathbf{Z}_2$
b_n $(n \geqslant 2)$	$SO(2n+1)$	$\mathbf{Z}_2$	Id	Id
c_n $(n \geqslant 3)$	$Sp(n)$	$\mathbf{Z}_2$	Id	Id
d_n $(n \geqslant 4)$	$SO(2n)$	$\mathbf{Z}_4$ (n impair)	$\mathbf{Z}^*_4$	$\mathbf{Z}^*_4 \simeq \mathbf{Z}_2$
				$\mathfrak{S}_3$ $(n = 4)$
		$\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ (n pair)	$\mathfrak{S}_3$	
				$\mathbf{Z}_2$ $(n \neq 4)$
e_6	E_6	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}^*_3$	$\mathbf{Z}^*_3 \simeq \mathbf{Z}_2$
e_7	E_7	$\mathbf{Z}_2$	Id	Id
e_8	E_8	$\mathbf{Z}_1$	Id	Id
f_4	F_4	$\mathbf{Z}_1$	Id	Id
g_2	G_2	$\mathbf{Z}_1$	Id	Id

Suivant [12], $\mathcal{G}$ représente les algèbres simples complexes, U représente des groupes de Lie réels compacts dont les algèbres de Lie sont les formes réelles (compactes) de g, $\tilde{U}$ est le revêtement simplement connexe de U, $\mathfrak{Z}(\tilde{U})$ est le centre, Aut $\mathfrak{Z}(\tilde{U})$ est le groupe des automorphismes du centre et $A(\tilde{U})$ est le groupe des automorphismes extérieurs de $\tilde{U}$ (cf. [18, p. 6]). Ce groupe est canoniquement isomorphe au quotient de $\mathrm{Aut}(\tilde{U})$ par le sous-groupe des automorphismes intérieurs et, dans le cas simple, il est fini et la restriction $A(\tilde{U}) \to A(\tilde{U})|\mathfrak{Z}(\tilde{U})$ est injective. Par conséquent $A(\tilde{U}) \simeq \mathrm{Aut}(\tilde{U})|\mathfrak{Z}(\tilde{U})$. Enfin, $\mathbf{Z}^*_n$ indique le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}_n$.

Prenons maintenant un groupe simple et simplement connexe $\tilde{U}$ et soient π_1 et π_2 deux sous-groupes isomorphes du centre $\mathfrak{Z}(\tilde{U})$. Lorsque le centre est cyclique, $\pi_1 = \pi_2$ et l'équivalence est trivialement réalisée. Il reste donc le seul cas de d_n avec n pair. Le groupe $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ admet trois sous-groupes propres et non-triviaux qui sont cycliques d'ordre 2. Lorsque $n = 4$, ces sous-groupes sont permutés entre eux par les automorphismes extérieurs de $\tilde{U}$ et par conséquent l'équivalence est toujours réalisée. Lorsque $n \neq 4$, deux des sous-groupes sont échangés par $A(\tilde{U})$ et le troisième (le groupe de Poincaré de $SO(2n)$) reste invariant. On voit ainsi que le seul cas où l'équivalence peut tomber en défaut est le cas d_n avec n pair et $n \neq 4$ et c'est en fait la raison d'être de l'exemple III.

Théorème 9.1. *Soit G un groupe de Lie compact dont aucune composante simple (dans $\mathcal{G}$) est une forme réelle de d_n avec n pair et $n > 4$. Une condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence de deux suites de Jordan-Hölder* *(resp. principales) fermées Φ et Ψ de G est l'existence d'une permutation σ qui réalise simultanément l'équivalence entre Φ_* et Ψ_* ainsi que l'équivalence entre les suites d'homotopie η et ζ.*

Ce théorème montre que l'équivalence entre les suites d'homotopie doit être "bien" choisie. Il ne suffit pas tout simplement que les quotients possèdent deux à deux des groupes d'homotopie isomorphes (cf. exemple II).

A l'aide de la classification complète des groupes de Lie simples (compacts ou non) la méthode esquissée ci-dessus nous fournit des critères permettant de déterminer l'équivalence des quotients non-abéliens de deux suites de Jordan-Hölder ou principales d'un groupe de Lie quelconque. Quant aux quotient abéliens, il y aura une difficulté supplémentaire due au fait que ces quotients ne sont pas forcément équivalents aux quotients d'une suite de Jordan-Hölder ou principale du radical de G (cf. exemple IV). Pourtant, lorsque G est réductif et lorsque les composantes simples non-abéliennes de G ont des revêtement simplement connexes à centre fini, cette propriété est vérifiée et par conséquent les quotients abéliens sont toujours équivalents.

10. Groupes semi-simples compacts

La théorie exposée précédemment montre que l'équivalence des suites de Jordan-Hölder ou principales présente certaines obstructions dues au fait que l'homotopie de G peut être "mal répartie" parmi les termes successifs de deux suites distinctes. Lorsque le groupe est compact et semi-simple nous pouvons corriger ce défaut en introduisant des quotients discrets. De façon précise, nous affaiblissons la notion de suite de composition (resp. distinguée) en supposant tout simplement que les termes sont tous fermés mais possiblement disconnexes. Avec cette notion faible, la théorie se déroule de façon aussi satisfaisante que la théorie algébrique et l'équivalence est toujours réalisée. Pour éviter des confusions, le terme *connexe* sera explicitement mentionné dans tout le reste du paragraphe lorsqu'il est question de suites à termes connexes.

Théorème 10.1. *Tout groupe de Lie compact et semi-simple admet des suites de Jordan-Hölder (resp. principales) au sens faible. Lorsque G est connexe, les suites de Jordan-Hölder faibles coïcident avec les suites principales faibles.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que le groupe G est connexe. D'après le théorème 5.3 (ou encore le corollaire 5.1), le groupe G admet une suite de Jordan-Hölder fermée (G_i) dont tous les termes sont connexes. Soit H un des quotients G_i/G_{i+1}. Puisque H est simple, tout sous-groupe de Lie fermé, normal et proprement contenu dans H est discret donc central. En plus, puisque H est non-abélien et compact, son centre est fini et par conséquent toute suite de Jordan-Hölder $(H_i)_{1<i<p}$ du centre (au sens purement algébrique) détermine une suite de Jordan-Hölder au sens faible Φ_i de H en posant $H_0 = H$. L'image réciproque de Φ_i dans G_i est une suite strictement décroissante de sous-groupes fermés contenus entre G_i et G_{i+1}. L'ensemble de toutes ces suites se rassemble en une suite de Jordan-Hölder au sens faible de G. Quant aux suites principales, on procède de façon analogue. Tout d'abord, G admet une suite principale fermée et connexe et puisque G est semi-simple cette suite principale est également de Jordan-Hölder donc les quotients successifs sont tous simples. Si H est l'un des quotients, alors un sous-groupe fermé, Ad-stable et proprement contenu dans H est discret donc central (car Ad-stable implique normal). En plus, puisque les éléments des différentes composantes simples de G sont permutables, la représentation quotient Ad_H: $G \to \mathrm{Aut}\, H$ se réduit à la représentation adjointe ordinaire du groupe H et tous les sous-groupes normaux sont Ad-stables. On voit ainsi que les suites de Jordan-Hölder Ad-stables de H coïncident avec les suites de Jordan-Hölder au sens ordinaire de H et la démonstration s'achève comme précédemment. La suite principale, au sens faible, ainsi obtenue est manifestement une suite de Jordan-Hölder et par conséquent toute suite principale, au sens faible, du groupe de Lie connexe G est de Jordan-Hölder en vertu de l'équivalence qui fera l'objet du théorème suivant. Lorsque le groupe G n'est pas connexe, indiquons par G_0 sa composante connexe de l'unité. La compacité entraîne que G/G_0 est fini et par conséquent toute suite de Jordan-Hölder de G_0 s'étend en une suite de Jordan-Hölder de G en prenant l'image réciproque d'une suite de Jordan-Hölder du groupe fini G/G_0. Pour montrer l'existence de suites principales, il faudra reprendre l'argument au complet. Tout d'abord, G_0 est Ad-stable car il est invariant par $\mathrm{Aut}\, G$, toute suite de Jordan-Hölder connexe et Ad-stable du sous-groupe G_0 est fermée en vertu du corollaire 5.1 et les quotients successifs sont semi-simples mais pas forcément simples. Soit Φ une telle suite, $H = G_i/G_{i+1}$ un quotient et q: $G_i \to H$ l'application canonique. Tout sous-groupe K fermé, Ad-stable et proprement contenu dans H est discret donc central sinon la composante connexe de l'unité de $q^{-1}(K)$ serait un sous-groupe fermé, Ad-stable, connexe et proprement inclu entre G_i et G_{i+1} ce qui contredit le fait que Φ est de Jordan-Hölder. Pour construire à partir de Φ une suite de Jordan-Hölder au sens faible et Ad-stable Ψ du sous-groupe G_0, il suffit de reprendre l'argument précédent et remonter à G_0 des suites de Jordan-Hölder Ad-stables des centres des groupes quotient G_i/G_{i+1}, ces centres étant finis. Enfin, on étendra Ψ en une suite principale de G en remontant à G une suite de Jordan-Hölder Ad-stable du groupe fini G/G_0.

Théorème 10.2. *Soit G un groupe de Lie compact et semi-simple. Deux suites de Jordan-Hölder (resp. principales) au sens faible sont toujours équivalentes.*

La démonstration utilise l'argument habituel. On constate tout d'abord que le troisième théorème d'isomorphie (Zassenhaus) est vérifié pour les sous-groupes fermés d'un groupe compact que l'on utilise ensuite pour démontrer le lemme de "raffinement" de Schreier qui à son tour entraîne le théorème de Jordan-Hölder.

La méthode ainsi que les résultats exposés pour les groupes semi-simples compacts ne s'étendent pas à des situations plus générales. Pour le voir, considérons un groupe compact dont le centre (égal au radical) n'est pas discret, par exemple S^1. Ce groupe n'admet pas des suites de Jordan-Hölder finies. En effet, soit H un sous-groupe fermé et proprement contenu dans S^1. Ce groupe est discret donc fini et par conséquent il est engendré par un élément θ (l'angle) qui est multiple rationnel de 2π. Si p est un nombre premier, $p > 1$, et si l'on indique par H_n le sous-groupe de S^1 engendré par θ/p^n, on voit que H_{n+1}/H_n est simple et par conséquent S^1 admet des suites de Jordan-Hölder, au sens faible, dénombrables (on complètera la suite (H_n) par une suite de Jordan-Hölder de $H = H_0$). Si l'on prend maintenant un nombre premier $q \neq p$, les deux suites de Jordan-Hölder ne sont pas équivalentes. Remarquons toutefois que le lemme de "raffinement" de Schreier est valable pour tout groupe de Lie compact. Par conséquent,

Théorème 10.3. *Soit G un groupe de Lie compact et connexe. Deux suites de Jordan-Hölder (resp. principales) connexes et fermées de G admettent toujours des suites de composition (resp. distinguées), au sens faible, plus fines et équivalentes. Les quotients successifs des dernières suites sont soit localement équivalents au quotients des suites initiales soit des groupes finis.*

Sans vouloir faire la démonstration, rappelons toujours que si (G_i) et (H_j) sont deux suites, la méthode de "raffinement" de Schreier consiste à prendre les nouvelles suites $G_{ij} = (G_i \cap H_j)G_{i+1}$ et $H_{ji} = (H_j \cap G_i)H_{j+1}$. Intuitivement, ceci consiste à "bien répartir" l'homotopie et à "rassembler" les excès en de nouveaux groupes quotients à savoir, les groupes quotients finis. Les suites de l'exemple I, une fois "raffinées", illustrent bien cette affirmation.

Pour terminer, disons enfin quelques mots sur les groupes de Lie complexes. Contrairement à ce que nous pourrions espérer, la théorie est dans ce cas bien moins satisfaisante que dans le cas réel. Les généralités se transcrivent sans peine et les résultats concernant les groupes semi-simples demeurent inchangés car tout groupe complexe simple est également réel simple. Pourtant, le théorème 7.1 sur les groupes résolubles, qui en un sens est le résultat positif le plus intéressant du travail, tombe en défaut même déjà dans le cas abélien. Si, dans la deuxième partie de l'exemple VII on remplace $\mathbf{R}^2$ par $\mathbf{C}$ on trouve deux suites de Jordan-Hölder non-équivalentes d'un groupe abélien complexe. Ceci entraîne en particulier que les théorèmes 8.2 et 8.3 ne donnent que des conditions nécessaires. De plus, la structure complexe étant assez rigide, un groupe complexe n'admet pas toujours des suites de Jordan-Hölder ou principales fermées. C'est le cas par exemple de la plupart des tores complexes (i.e., génériquement).

References

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. II, Hermann, Paris, 1951.
[2] ______, *Algèbre*, chap. VII, Hermann, Paris, 1952.
[3] ______, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. I, Hermann, Paris, 1960.
[4] ______, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. II et III, Hermann, Paris, 1972.
[5] ______, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. IV, V, VI, Hermann, Paris, 1968.
[6] R. W. Carter, *Simple groups of Lie type*, John Wiley, New York, 1972.
[7] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*. I, Princeton University Press, Princeton, 1946.
[8] ______, *Théorie des groupes de Lie*. III, Hermann, Paris, 1955.
[9] J. Dieudonné, *On the automorphisms of the classical groups*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 2, 1951.
[10] J. Dixmier, *Algèbres de Lie*, Centre de Documentation Universitaire, Paris, 1958.
[11] M. Hausner & J. Schwartz, *Lie groups and Lie algebras*, Gordon and Breach, New York, 1968.
[12] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1962.
[13] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, San Francisco, 1965.
[14] A. Sagle & R. Walde, *Introduction to Lie groups and Lie algebras*, Academic Press, New York, 1973.
[15] Sophus Lie, *Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen die eine kontinuierliche, endliche Gruppe gestatten*, Math. Ann. **25** (1885) 77–151; Gesam. Abh. Bd. VI, 139–223.
[16] ______, *Zur allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung*, Leipzig Ber. **47** (1895) 53–128; Gesam. Abh. Bd. VI, 320–384.
[17] ______, *Verwertung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen*, Leipzig Ber. **47** (1895) 261–322; Gesam Abh. Bd. VI, 539–591.
[18] J. Tits, *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihre Darstellungen*, Springer, Berlin, 1967.
[19] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Prentice Hall, Englewood, NJ, 1974.

Universidade Estadual de Campinas