J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
15 (1980) 1–26

SPEKTRALEIGENSCHAFTEN DES DIRAC-OPERATORS- DIE FUNDAMENTALLÖSUNG SEINER WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG UND DIE ASYMPTOTENENTWICKLUNG DER ZETA-FUNKTION

H. DLUBEK & TH. FRIEDRICH

1. Einleitung

Besitzt eine geschlossene, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit X^n eine Spin-Struktur, so wird im assoziierten Spinorbündel $\mathbb{S}$ durch kovariante Ableitung und Clifford-Multiplikation ein elliptischer Differentialoperator D 1. Ordnung, der sogenannte Dirac-Operator, definiert. Die Eigenwerte λ_i sowie die Dimensionen m_i der Eigenunterräume des Operators D^2 bestimmen seine Zeta-Funktion

$$\zeta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i \cdot e^{-\lambda_i t},$$

deren asymptotisches Verhalten an der Stelle $t = 0$ in der vorliegenden Arbeit untersucht wird. Zu diesem Ziel geben wir eine Konstruktion der Fundamentallösung $E(x, y, t)$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + D^2\right)u = 0$$

an, welche die Geometrie des Spinorbündels, insbesondere die in ihm induzierte kovariante Ableitung und Parallelverschiebung benutzt und erhalten:

Theorem. *Sei X^n $(n \geqslant 3)$ eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit und D der im Spinorbündel wirkende Dirac-Operator. Die Zeta-Funktion $\zeta(t)$ des Operators D^2 besitzt an der Stelle $t = 0$ die asymptotische Entwicklung*

$$\zeta(t) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} d_j t^j$$

Received, November 7, 1977, and, in revised form, March 31, 1978.

mit

$$d_0 = \dim \mathbb{S} \cdot \mathrm{Vol}(X),$$

$$d_1 = -\frac{\dim \mathbb{S}}{12} \int_{X^n} R(x)\, dx,$$

$$d_2 = \frac{\dim \mathbb{S}}{4320} \int_{X^n} \left(15\, R(x)^2 - 21\|\mathfrak{R}(x)\|^2 - 24\rho(x)^2\right) dx.$$

Danach wenden wir uns der Frage zu, welche Größen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Spin-Struktur durch die Spektren des Laplace-Operators Δ und des Operators D^2 zusammen determiniert werden. Neben Resultaten über gewisse Klassen 4-dimensionaler Mannigfaltigkeit, in denen die Eulersche Charakteristik, die Signatur bzw. das arithmetische Geschlecht durch diese Spektren bestimmt werden, erhalten wir Anwendungen auf n-dimensionale Räume konstanter Schnittkrümmung. Insbesondere sind die Sphäre S^n und der reell-projektive Raum $\mathbf{P}^{4k+3}(\mathbf{R})$ in der Klasse aller Spin-Mannigfaltigkeit durch die Spektren von Δ und D^2 bis auf Isometrie festgelegt.

2. Die Fundamentallösung und die Zeta-Funktion eines elliptischen Operators

Sei X^n eine glatte, kompakte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, und E ein komplexes Vektorbündel mit hermitischer Metrik über ihr. Den Raum der glatten Schnitte dieses Vektorbündels bezeichnen wir mit $\Gamma(E)$. Die Metrik in E gestattet es, mit jedem Differentialoperator P: $\Gamma(E) \to \Gamma(E)$ den zu ihm adjungierten P^*: $\Gamma(E) \to \Gamma(E)$ zu betrachten, welcher durch die Gleichung

$$\int_X (Ps, s') = \int_X (s, P^*s'), \quad s, s' \in \Gamma(E),$$

eindeutig definiert wird. Ist P elliptisch der Ordnung m, so untersucht man das Cauchy-Problem der zum Operator P gehörigen Wärmeleitungsgleichung (WLG)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + PP^*u(x, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$\text{für } t \geq 0, f \in L^2(E) \text{ und } u(\cdot, t) \in \Gamma(E).$$

Es ist wohlbekannt (vgl. [1], [12]), daß im Bündel $E \boxtimes E$ über $X \times X$ ein Schnitt $E(x, y, t)(t > 0)$ existiert–die sogenannte Fundamentallösung des

Cauchy-Problems der *WLG*−, welche durch die nachstehenden drei Eigenschaften eindeutig charakterisiert ist:

1. E ist einmal in t und $(2m)$-*mal* in x und y differenzierbar.
2. $(\partial/\partial t)E(x, y, t) + (PP^*)_x E(x, y, t) = 0.$
3. Für alle $s \in \Gamma(E)$ und alle $x \in X$ gilt

$$s(x) = \lim_{t \to 0} \int_X E(x, y, t) \circ s(y)\, dy.$$

Die Spur der Fundamentallösung

$$\zeta(t) = \int_X \operatorname{Tr} E(x, x, t)\, dx$$

ist die Zeta-Funktion des Operators PP^*, die sich bekanntlich(vgl. [1], [12]) durch die Eigenwerte $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$ und die Dimensionen $m_0, m_1, \cdots$ der entsprechenden Eigenunterräume dieses Operators durch die Formel

$$\zeta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i e^{-\lambda_i t}$$

ausdrücken läßt.

Von Interesse ist das asymptotische Verhalten dieser Funktion an der Stelle $t = 0$. Nach Seeley (vgl. [1], [12]) ist das asymptotische Verhalten der Funktion $\zeta(t)$ für $t \to 0$ durch

$$\zeta(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{n/2m}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k(PP^*) t^k$$

mit den Koeffizeinten $a_k\ (PP^*) = \int_X \mu_k$ gegeben, wobei die Maße μ_k durch eine lokale Konstruktion aus dem Operator P erhalten werden können.

Diese Koeffizienten wurden für eine Reihe spezieller Operatoren bereits berechnet (vgl. [2], [8], [11] im Fall PP^* = Laplace-operator einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auf Funktionen, sowie [5] für den Laplaceoperator auf p-Formen; siehe auch [6]). Da wir für den Dirac-Operator D eine geometrische Konstruktion der Fundamentallösung angeben und daraus die ersten Koeffizienten der Asymptotenentwicklung der zu D^2 gehörigen Zeta-Funktion erhalten wollen, beschreiben wir an dieser Stelle die Konstruktion der Fundamentallösung etwas näher. Wir beschränken uns mit Hinblick auf diese Anwendung auf Operatoren P der Ordnung 1. Zwei von einem Parameter $t \geqslant 0$ stetig abhängende Schnitte $A(x, y, t)$, $B(x, y, t)$ in $E \boxtimes E$ über $X \times X$ kann man nach der Formel

$$(A * B)(x, y, t) = \int_0^t \int_X A(x, u, t-\vartheta) \circ B(u, y, \vartheta)\, du d\vartheta$$

falten und erhält somit wiederum einen vom Parameter $t \geqslant 0$ stetig abhängenden Schnitt $(A * B)(x, y, t)$ in dem gleichen Bündel. Wenden wir diese Operation mehrfach auf ein und denselben Schnitt A an, so schreiben wir $A * \cdots * A = A^{*i}$.

Gegeben sei nun eine ganze Zahl $k > n/2 + 2$. Unter einer Parametrix verstehen wir einen Schnitt $W(x, y, t)(t > 0)$ in $E \boxtimes E$ über $X \times X$ mit folgenden drei Eigenschaften:

1. $(\partial/\partial t + PP^*)W(x, y, t)$ läßt sich auf $t = 0$ stetig fortsetzen.
2. $s(x) = \lim_{t \to 0} \int_X W(x, y, t) \circ s(y)\, dy,\ s \in \Gamma(E)$.
3. Es existiert ein $T > 0$ und eine Konstante c, so daß für alle $t \in [0, T]$ gilt

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} + PP^* \right) W(x, y, t) \right\| \leqslant ct^{k-n/2}.$$

Lemma 1. *Ist W eine Parametrix, so gilt:*

1. *Die Reihe $Q = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}((\partial/\partial t + PP^*)W)^{*i}$ ist konvergent und definiert einen vom Parameter $t \geqslant 0$ stetig abhängenden Schnitt in $E \boxtimes E$.*
2. *$E := W - W * Q$ ist die Fundamentallösung der WLG zum Operator P.*
3. *Für kleine t gilt:*

$$\| E(x, y, t) - W(x, Ly, t) \| \leqslant c' t^{k-n/2+1}.$$

Beweis. Der Beweis entspricht dem in [2] für den Laplace-Operator auf Funktionen gegebenen. Den Operator $\partial/\partial t + PP^*$ bezeichnen wir mit Z und beweisen zuerst, daß $Q = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}(ZW)^{*i}$ gleichmäßig konvergiert. Aus der dritten Eigenschaft der Parametrix ergibt sich $\|ZW(x, y, t)\| \leqslant C = cT^{k-n/2}$ für alle $x, y \in X$, $t \in [o, T]$. Ist V das Volumen von X, so ergibt eine mehrfache Anwendung der Faltungsformel die Abschätzung $(0 \leqslant t \leqslant T)$

$$\|(ZW)^{*i}(x, y, t)\| \leqslant \frac{C^i V^{i-1} t^{i-1}}{(i-1)!} \leqslant \frac{C^i V^{i-1} T^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Damit hat Q die Majorante

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C^i V^{i-1} T^{i-1}}{(i-1)!} = C \cdot e^{CVT}$$

und konvergiert gleichmäßig gegen einen stetigen Schnitt. Eine direkte Rechnung zeigt (vg. [2]), daß die Differenz $W - W * Q$ die charakteristischen Eigenschaften der Fundamentallösung erfüllt und somit ergibt sich $E = W - W * Q$. Wir zeigen nun die dritte in Lemma 1 behauptete Eigenschaft. Aus $\|ZW(x, y, t)\| \leqslant c \cdot t^{k-n/2}$ folgt wie oben die Abschätzung

$$\|Q(x, y, t)\| \leqslant C_1 t^{k-n/2},$$

welche zeigt, daß der Schnitt $R(x, y, t) = Q(x, y, t)/t^{k-n/2}$ um $t = 0$ beschränkt ist. Es ist

$$(W * Q)(x, y, t) = \int_0^t \vartheta^{k-n/2} \int_X W(x, u, t - \vartheta) \circ R(u, y, \vartheta)\, du\, d\vartheta.$$

Die zweite Eigenschaft der Parametrix liefert

$$\lim_{\vartheta \to t} \int_X W(x, u, t - \vartheta) \circ R(u, y, \vartheta)\, du = R(x, y, t)$$

und sichert somit die Beschränktheit von

$$\int_X W(x, u, t - \vartheta) \circ R(u, y, \vartheta)\, du \text{ für } 0 \leqslant \vartheta \leqslant t.$$

Daraus erhält man unmittelbar die Behauptung.

Folgerung 1. $\zeta(t) = \int_X Tr W(x, x, t) + o(t^{k-n/2+1})$.

3. Der Dirac-Operator

In diesem Abschnitt stellen wir einige bekannte Tatsachen über den Dirac-Operator zusammen (vg. [4], [7], [14]). Gegeben sei eine parakompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit X^n der Dimension $n \geqslant 3$ und bezeichne $(P, \pi, X^n; SO(n))$ das assoziierte $SO(n)$-Hauptfaserbündel. Eine Spin-Struktur ist ein Hauptfaserbündel $(Q, \pi, X^n; \mathrm{Spin}(n))$ und eine überlagerung λ: $Q \to P$ derart, daß

$$\begin{tikzcd}
Q \times \mathrm{Spin}(n) \arrow[r] \arrow[dd, "\lambda \times \rho"] & Q \arrow[dd, "\lambda"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
& & X^n \\
P \times SO(n) \arrow[r] & P \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Hierbei ist ρ: $\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ die universelle Überlagerung der speziellen orthogonalen Gruppe. Ist X^n kompakt, so existiert bekanntlicherweise genau dann eine Spin-Struktur, falls die zweite Stiefel-Whitney-Klasse von X^n verschwindet. In diesem Fall werden die Spin-Strukturen durch $H^1(X^n, \mathbb{Z}_2)$ klassifiziert (vg. [9]).

Für unsere weiteren Überlegungen fixieren wir eine Spin-Struktur. Sind $\underline{so(n)}$ bzw. $\underline{\mathrm{spin}(n)}$ die Lie-Algebren der entsprechenden Gruppen, so hebt sich der Levi-Civita-Zusammenhang Z: $TP \to \underline{so(n)}$ zu einem Zusammenhang

$\hat{Z}$: $TQ \to \underline{\mathrm{spin}(n)}$ derart, daß

$$\begin{tikzcd} TQ \arrow[r, "\hat{Z}"] \arrow[d, "\lambda_*"] & \mathrm{spin}(n) \arrow[d, "\rho_*"] \\ TP \arrow[r, "Z"] & so(n) \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm ist. Im zur Spin-Darstellung Δ_n der Gruppe Spin(n) assoziierten Spinorbündel $\mathbb{S} = Q \times_{\mathrm{Spin}(n)} \Delta_n$ induziert der Zusammenhang $\hat{Z}$ eine kovariante Ableitung

$$\nabla^{\mathbb{S}}: \Gamma(\mathbb{S}) \to \Gamma(T^*(X^n) \otimes \mathbb{S}),$$

sowie eine Parallelverschiebung

$$\tau_\gamma: \mathbb{S}_{\gamma(0)} \to \mathbb{S}_{\gamma(1)}$$

entland einer Kurve γ in X.

Sei $s = (s_1, \cdots, s_n)$: $V \to P$ ein lokales Reper von orthonormierten Vektorfeldern über einer einfach-zusammenhängenden, offenen Menge V. Der Zusammenhang Z: $TP \to \underline{so(n)}$ induziert die lokale Zusammenhangsform $Z^s = Z \circ s_*$: $TV \to \underline{so(n)}$. Wählen wir in $\underline{so(n)}$ die Standardbasis E_{ij} $(i < j)$, so erhalten wir durch

$$Z^s = \sum_{i<j} \omega_{ij} E_{ij}$$

die lokalen Formen ω_{ij} $(i < j)$, welche wir durch $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ für alle Indizes (i, j) definieren können. Nach [10] kann man $\underline{spin(n)}$ mit der linearen Hülle der Produkte $e_i e_j$ $(i < j)$ in der Cliffordalgebra Cliff($\mathbf{R}^n$) identifizieren ($e_1, \cdots, e_n$ ist eine orthonormierte Basis des $\mathbf{R}^n$) und dabei wird das Differential ρ_*: $\underline{spin(n)} \to \underline{so(n)}$ durch $\rho_*(e_i e_j) = 2E_{ij}$ beschrieben. Heben wir den Schnitt s zu einem Schnitt $\hat{s}$: $V \to Q$, so können wir wiederum die lokale Zusammenhangsform $\hat{Z}^{\hat{s}} = \hat{Z} \circ \hat{s}_*$: $TV \to \underline{spin(n)}$ betrachten und erhalten

$$\hat{Z}^{\hat{s}} = \sum_{i<j} \frac{1}{2} \omega_{ij} e_i e_j.$$

Ist nun u_ε eine orthonormierte Basis des Spin-Moduls Δ_n, so erhalten wir durch $\eta_\varepsilon(x) = [\hat{s}(x), u_\varepsilon]$ orthonormierte Schnitte η_ε in $\mathbb{S}$ über V. Die Kovariante Ableitung $\nabla^{\mathbb{S}}$ wird dann durch

$$\nabla^{\mathbb{S}}_t \eta_\varepsilon = \sum_{l<m} \frac{1}{2} \omega_{lm}(t)(s_l s_m) \cdot \eta_\varepsilon$$

beschrieben (vgl. [13, Seite 151]), wobei $(s_l s_m) \cdot \eta_\varepsilon = [\hat{s}(x), e_l e_m u_\varepsilon]$ die Clifford-Multiplikation des Spinors η_ε mit den Vektoren s_l und s_m bezeichnet.

Die Riemannsche Metrik gestattet es, $T^*(X^n)$ mit $T(X^n)$ zu identifizieren.

Weiterhin induziert die Clifford-Multiplikation einen Homomorphismus μ: $T(X^n) \otimes \mathbb{S} \to \mathbb{S}$. Der Dirac-Operator D wird nun als Superposition folgender Abbildungen definiert:

$$\Gamma(\mathbb{S}) \xrightarrow{\nabla^{\mathbb{S}}} \Gamma(T^*(X^n) \otimes \mathbb{S}) \approx \Gamma(T(X^n) \otimes \mathbb{S}) \xrightarrow{\mu} \Gamma(\mathbb{S}).$$

D ist ein formal selbstadjungierter, elliptischer Differentialoperator 1. Ordnung. Ist $(s_1, \cdots, s_n)$ ein orthonormietes Reper von Vektorfeldern auf einer offenen Menge $U \subset X^n$ und $u \in \Gamma(\mathbb{S})$ ein Schnitt im Spinorbündel, so gilt

$$D(u) = \sum_{j=1}^{n} s_j \cdot \nabla^{\mathbb{S}}_{s_j}(u).$$

Ist R die Skalarkrümmung des Riemannschen Raumes X^n, dann ergibt sich folgende Formel (vgl. [7]) für das Quadrat D^2 des Dirac-Operators

$$D^2(u) = \frac{1}{4} Ru - \sum_{j=1}^{n} \nabla^{\mathbb{S}}_{s_j} \nabla^{\mathbb{S}}_{s_j} u - \sum_{j=1}^{n} \operatorname{div}(s_j) \nabla^{\mathbb{S}}_{s_j} u.$$

4. Die Konstruktion der Fundamentallösung der zum Dirac-Operator D gehörigen Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt der Arbeit konstruieren wir eine Folge von Parametrixen W_k, welche gemäß Folgerung 1 das asymptotische Verhalten der Zeta-Funktion des Operators $D^2 = DD^*$ an der Stelle $t = 0$ beschreiben.

Weil X kompakt ist, existiert eine positive Zahl $\varepsilon > 0$ so, daß sich jedes Punktepaar (x, y) der Menge

$$U_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X \,|\, r(x, y) < \varepsilon\}$$

deren Abstand $r(x, y)$ kleiner als ε ist, durch eine eindeutig bestimmte minimale Geodätische γ verbinden läßt. Mittels des Exponentials $\exp_y$: $T_yX \to X$ führen wir Normalkoordinaten um den Punkt y ein und definieren auf der Menge U_ε eine Funktion $\theta = \theta(x, y)$ durch

$$\theta(x, y) = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\ ,$$

wobei g_{ij} die Koeffizienten der Metrik in diesem Koordinatensystem sind. Unter der Anwendung eines Differentialoperators auf einen Schnitt oder eine Funktion, welche über $X \times X$ definiert sind, verstehen wir im weiteren immer dessen Anwendung auf die erste Variable.

Lemma 2. *Sei $\Psi \in \Gamma(\mathbb{S} \boxtimes \mathbb{S})$ ein Schnitt im Bündel $\mathbb{S} \boxtimes \mathbb{S}$ über $X \times X$ und f: $X \times X \to \mathbf{C}$ eine glatte Funktion, welche nur vom Quadrat des geodätischen*

Abstandes $r^2 = r^2(x,y)$ abhängt, $f = f(r^2)$. Dann gilt über U_ε: $D^2(f\Psi)(x,y) = (D^2\Psi)f - (4r^2f'' + 2f'(r(\theta'/\theta) + n))\Psi - 4f'\nabla^{\mathbb{S}}_{\dot\gamma(1)}\Psi$, wobei γ die minimale Geodätische von y nach x und $\dot\gamma$ ihre Ableitung ist.

Beweis. Δ bezeichne den Laplace-Operator der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Aus der im Abschnitt 3 zitierten Formel für D^2 ergibt sich

$$D^2(f\Psi) = fD^2\Psi + \Delta(f)\Psi - 2\nabla^{\mathbb{S}}_{\operatorname{grad} f}\Psi.$$

Der Laplace-Operator einer nur von r abhängigen Funktion $h = h(r)$: $U_\varepsilon \to \mathbf{C}$ drückt sich durch

$$\Delta(h) = -h''(r) - h'(r)\left(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{r}\right)$$

aus (vgl. [2]). Wenden wir diese Formel auf $f = f(r^2)$ an, so erhalten wir

$$\Delta(f) = -4r^2f''(r^2) - 2f'(r^2)\left(r\frac{\theta'}{\theta} + n\right).$$

Andererseits ergibt sich für den Gradienten von f -indem wir in den Normalkoordinaten $x_1, \cdots, x_n$ um y rechnen und $g^{ij}x_j = x_i$ sowie $\dot\gamma(1) = x_i\partial/\partial x_i$ benutzen

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial f(r^2)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j} g^{ij}f'(r^2)\frac{\partial r^2}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= \sum_{i,j} g^{ij}f'(r^2)2x_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i f'(r^2)2x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= 2f'(r^2)\dot\gamma(1).\end{aligned}$$

Setzen wir in der Formel für $D^2(f\Psi)$ jetzt die Ausdrücke für $\Delta(f)$ und $\operatorname{grad} f$ ein, so erhalten wir die Behauptung. q.e.d.

Für die Konstruktion der Parametrix W_k benötigen wir einen Schnitt I in $\mathbb{S}\boxtimes\mathbb{S}$ über U_ε sowie einen Multiplikationsformalismus von auf U_ε definierten Schnitten in diesem Bündel. Sind p_1, p_2 die Projektionen von $X \times X$ auf die erste und zweite Achse, so identifizieren wir $\mathbb{S}\boxtimes\mathbb{S}$ mit $\operatorname{Hom}(p_2^*(\mathbb{S}), p_1^*(\mathbb{S}))$. Einem Schnitt $\Phi \in \Gamma(\mathbb{S}\boxtimes\mathbb{S})$ entspricht bei dieser Identifizierung eine Familie von Homomorphismen $\Phi(x,y)$: $\mathbb{S}_y \to \mathbb{S}_x$. Den Schnitt $I \in \Gamma(\mathbb{S}\boxtimes\mathbb{S}/U_\varepsilon)$ erhalten wir nun dadurch, daß wir jedem Punktepaar $(x,y) \in U_\varepsilon$ die Parallelverschiebung im Bündel $\mathbb{S}$ entlang der von diesen beiden Punkten eindeutig bestimmten Geodätischen γ zuordnen:

$$I(x,y) = \tau_\gamma\colon \mathbb{S}_y \to \mathbb{S}_x.$$

Ist also $\{e_i(y)\}$ eine orthonormierte Basis von $\mathbb{S}_y$ und $\{e_i(x)\}$ deren Parallelverschiebung entlang γ, so gilt

$$I(x,y) = \sum_i e_i(x) \otimes e_i(y).$$

Sind Φ und Ψ zwei Schnitte in $\mathbb{S} \boxtimes \mathbb{S}$ über der Menge U_ε, so haben wir gemäß der angegebenen Identifikation Homomorphismen $\Phi(x, y)$: $\mathbb{S}_y \to \mathbb{S}_x$ und $\Psi(x, y)$: $\mathbb{S}_y \to \mathbb{S}_x$. Durch

$$(\Phi \circ \Psi)(x, y) = \Phi(x, y) I(x, y)^{-1} \Psi(x, y)$$

wird ein Homomorphismus $(\Phi \circ \Psi)(x, y)$: $\mathbb{S}_y \to \mathbb{S}_x$, also ein Schnitt $\Phi \circ \Psi$ im Bündel $\mathbb{S} \boxtimes \mathbb{S}$ über U_ε definiert. In den oben gewählten Basen $\{e_i(y)\}$ und $\{e_i(x)\}$ gilt dann mit

$$\Phi(x, y) = \sum_{i,j} \varphi^{ij}(x, y) e_i(x) \otimes e_j(y),$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{i,j} \psi^{ij}(x, y) e_i(x) \otimes e_j(y)$$

die Formel

$$(\Phi \circ \Psi)(x, y) = \sum_{i,j,k} \varphi^{ik}(x, y) \psi^{kj}(x, y) e_i(x) \otimes e_j(y).$$

Über U_ε definierte Schnitte kann man nach Vektorfeldern differenzieren. Ist nämlich t ein auf V definiertes Vektorfeld und Ψ ein Schnitt in $\mathbb{S} \boxtimes \mathbb{S}$ über U_ε, so wird durch

$$\Psi(x, y) = \sum_{i,j} \psi^{ij}(x, y) e_i(x) \otimes e_j(y),$$

$$t(\Psi)(x, y) = \sum_{i,j} t(\psi^{ij}(x, y)) e_i(x) \otimes e_j(y)$$

ein Schnitt $t(\Psi)$ im $\mathbb{S} \boxtimes \mathbb{S}$ über $U_\varepsilon \cap (V \times X)$ definiert. Dann gilt

$$\nabla_t^{\mathbb{S}}(\Phi \circ \Psi) = \Phi \circ t(\Psi) + (\nabla_t^{\mathbb{S}} \Phi) \circ \Psi.$$

Aus dieser Formel und Lemma 2 erhalten wir mittels

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot\gamma(1)}^{\mathbb{S}} \Psi &= \nabla_{\dot\gamma(1)}^{\mathbb{S}}(I \circ \Psi) = I \circ (\dot\gamma(1)\Psi) + \left(\nabla_{\dot\gamma(1)}^{\mathbb{S}} I\right) \circ \Psi \\ &= r \cdot I \circ \frac{\partial}{\partial r}\Psi + 0 = r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\Psi \end{aligned}$$

das folgende

Lemma 3. *Seien f eine auf U_ε definierte, nur vom Quadrat des geodätischen Abstandes r abhängige Funktion und Ψ ein über U_ε definierter Schnitt in $\mathbb{S} \boxtimes \mathbb{S}$. Dann gilt $D^2(f\Psi) = D^2(\Psi)f - (4r^2 f'' + 2f'(r(\theta'/\theta) + n))\Psi - 4rf'(\partial/\partial r)\Psi$.*

Folgerung 2. Die Funktion f sei auf U_ε definiert durch

$$f(x, y) = f(r^2) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2(x,y)/4t}.$$

Dann gilt

$$D^2(f\Psi) = fD^2(\Psi) - \frac{\partial f}{\partial t}\Psi + \frac{r}{2t}\frac{\theta'}{\theta} f\Psi + \frac{r}{t} f \frac{\partial}{\partial r}\Psi.$$

Zur Konstruktion der gesuchten Parametrix W_k betrachten wir zuerst einen Schnitt H_k über U_ε

$$H_k = \sum_{j=0}^{k} fU_j t^j,$$

und bestimmen die Schnitte U_j so, daß

$$\left(D^2 + \frac{\partial}{\partial t}\right) H_k = fD^2(U_k)t^k$$

gilt. Danach erhalten wir W_k aus H_k, indem wir H_k nach vorheriger Glättung außerhalb von U_ε Null legen. Zu diesem Ziel berechnen wir unter Verwendung von Folgerung 2 $(D^2 + \partial/\partial t)H_k$ und bekommen

$$\begin{aligned}(D^2 + \partial/\partial t)H_k = f\sum_{j=0}^{k} \left[D^2(U_{j-1}) + \left(j + \tfrac{1}{2} r\theta'/\theta + r(\partial/\partial r)\right) U_j \right] t^{j-1} \\ + fD^2(U_k)t^k.\end{aligned}$$

Die Bedingungen, welche wir an die Schnitte U_j stellen müssen, lauten demnach:

$$\left(\frac{r}{2}\frac{\theta'}{\theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\right) U_0 = 0,$$

$$D^2(U_{j-1}) + \left(j + \frac{r}{2}\frac{\theta'}{\theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\right) U_j = 0, \quad j = 1, \cdots, k.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen ergeben folgende Rekursionsformel für die Schnitte U_j (vgl. [2]):

$$U_0(x,y) = \theta^{-1/2}(x,y) I(x,y),$$

$$U_j(x,y) = -\theta^{-1/2}(x,y) \int_0^1 \theta^{1/2}(z_\xi, y) \xi^{j-1} \tau_{\gamma(z_\xi, x)} \left[D^2(U_{j-1})(z_\xi, y) \right] d\xi,$$

wobei $z_\xi = \exp_y(\xi \exp_{V_y}^{-1}(x))$, und $\tau_{\gamma(z_\xi,x)}$ die bereits eingeführte Parallelverschiebung τ im Spinorbündel $\mathbb{S}$ von z_ξ nach x ist.

Sei nun α: $X \times X \to [0, 1]$ eine glatte Funktion, die nur vom Quadrat des geodätischen Abstandes abhängt und folgende beiden Eigenschaften erfüllt:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } r(x,y) \leqslant \varepsilon/4, \\ 0 & \text{falls } r(x,y) \geqslant \varepsilon/2. \end{cases}$$

Satz 1. *Für $k > n/2 + 2$ ist $W_k = \alpha H_k$ eine Parametrix.*

Beweis. Zu jedem $1 > 0$ existiert eine Konstante C_1 so, daß für alle $\varepsilon/4 \leqslant r \leqslant \varepsilon/2$ und $0 \leqslant t \leqslant T$

$$|f(t)| = |(4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t}| \leqslant C_1 t^1 \tag{1}$$

gilt. Die erste Eingenschaft, welche an eine Parametrix gestellt wird, ergibt sich für W_k daraus, daß dieser Schnitt im Bereich $r(x,y) \geqslant \varepsilon/4$ auf $t = 0$ fortsetzbar ist und für $r(x,y) \leqslant \varepsilon/4$

$$\begin{aligned}\left(D^2 + \frac{\partial}{\partial t}\right) W_k &= \left(D^2 + \frac{\partial}{\partial t}\right) H_k = f \cdot D^2(U_k) t^k \\ &= (4\pi)^{-n/2} e^{-r^2/4t} t^{k-n/2} D^2(U_k)\end{aligned}$$

gilt. Die Abschätzung $\|(D^2 + \partial/\partial t) W_k\| \leqslant c t^{k-n/2}$ erhalten wir, indem wir die linke Seite jeweils über $U_{\varepsilon/4}$ und $U_{\varepsilon/2} - U_{\varepsilon/4}$ entsprechend unter Verwendung von Lemma 3 und der eingangs erwähnten Eigenschaft (1) der Funktion f wie folgt behandeln:

$$\left\|\left(D^2 + \frac{\partial}{\partial t}\right) W_k\right\| = \left\|\left(D^2 + \frac{\partial}{\partial t}\right) H_k\right\| \leqslant (4\pi)^{-n/2} \cdot 1 \cdot \max_{U_{\varepsilon/4}} \|D^2(U_k)\| \cdot t^{k-n/2},$$

$$\begin{aligned}\left\|\left(D^2 + \frac{\partial}{\partial t}\right) W_k\right\| &= \left\|D^2(\alpha H_k) + \alpha \frac{\partial}{\partial t} H_k\right\| \\ &\leqslant \left\|\alpha\left(D^2 + \frac{\partial}{\partial t}\right) H_k\right\| + \left|4r^2\alpha'' + 2\alpha'\left(r\frac{\partial'}{\theta} + n\right)\right| \|H_k\| \\ &\quad + |4\alpha' r| \left\|\frac{\partial}{\partial r} H_k\right\| \\ &\leqslant C_1 t^{k-n/2} + C_2 t^{k-n/2} + C_3 t^{k-n/2} \\ &\leqslant C t^{k-n/2}.\end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \int_X W_k(x, y, t) \circ s(x)\, dy,$$

indem wir das Integral in die Summen

$$\int_X = \int_{\{y \in X/r(x,y) < \varepsilon/4\}} + \int_{\{y \in X/r(x,y) \geqslant \varepsilon/4\}}$$

zerlegen. Aus (1) folgt dann unmittelbar, daß der Grenzwert des zweiten Integrals gleich Null ist. Das vergleibende Integral transformieren wir mittels der Exponentialabbildung $\exp_x\colon T_xX \to X$ und erhalten

$$\lim_{t\to 0}\int_X W_k(x,y,t)\circ s(y)\,dy$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_{\{y\in X/r(x,y)<\varepsilon/4\}} W_k(x,y,t)\cdot s(y)\,dy$$

$$= \lim_{t\to 0}\sum_{j=0}^{k} t^k \int_{\{y\in X/r(x,y)<\varepsilon/4\}} f(x,y,t)\,U_j(x,y)\circ s(y)\,dy$$

$$= \lim_{t\to 0}\sum_{j=0}^{k} t^j \int_{T_xX} f(x,\exp_x z,t)\cdot U_j(x,\exp_x z)s(\exp_x z)$$

$$\cdot\theta(x,\exp_x z)\,dz.$$

Aus $\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}(4\pi t)^{-n/2}e^{-|x-z|^2/4t}g(z)\,dz = g(x)$ folgt nun $\lim_{t\to 0}\int_X W_k(x,y,t)\circ s(y)\,dy = U_0(x,x)\circ s(x)\cdot\theta(x,x) = s(x)$. q.e.d.

Mit Folgerung 1 ergibt sich für die Zeta-Funktion des Operators D^2.

Folgerung 3. $\zeta(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2}\sum_{j=0}^{\infty}(\int_X \operatorname{Tr} U_j(x,x)\,dx)t^j$.

Bezeichnung. $d_j = \int_X \operatorname{Tr} U_j(x,x)\,dx$.

Satz 2. *Die Spuren* $\operatorname{Tr} U_j(y,y)$ *sind universelle,* $O(n)$*-invariante Polynome im Krümmungstensor* $\mathfrak{R} = (R_{ijkl})$ *des Levi-Civita-Zusammenhanges auf* X *und seinen Ableitungen* $D^k\mathfrak{R}$. *Der Grad* x_k, *mit dem* $D^k\mathfrak{R}$ *in einem Monom des die Spur* $\operatorname{Tr} U_j$ *bestimmenden Polynoms* P_j^n *auftreten kann, wird durch*

$$j = \sum_k \left(1+\frac{k}{2}\right)x_k$$

gegeben.

Beweis. Wir beweisen induktiv, daß $f_j(x,y) = \operatorname{Tr}\tau_{\gamma(x,y)}U_j(x,y)$ in einer Normalenumgebung von y bezüglich x eine Taylorentwicklung besitzt, deren Koeffizienten universelle Polynome in $\mathfrak{R}(y)$, $D^1\mathfrak{R}(y),\cdots$ sind. Weil sich die Koeffizienten der Metrik in der Form

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{ikjl}x^kx^l + \cdots$$

darstellen lassen (vg. [1]), besitzt

$$f_0(x,y) = \dim \mathbb{S}\left(\det(g_{ij}(x))\right)^{-1/4}$$

eine derartige Entwicklung. Aus der Rekursionsformel für U_j ergibt sich

$$f_j(x,y) = -\theta^{-1/2}(x,y)\int_0^1 \theta^{1/2}(z_\xi,y)\xi^{j-1}\operatorname{Tr}\tau_{\gamma(z_\xi,y)}\left(D^2U_{j-1}(z_\xi,y)\right)d\xi.$$

Benutzen wir nun die leicht einzusehende Formel

$$t(\operatorname{Tr}\tau_{\gamma(x,y)}W(x,y)) = \operatorname{Tr}\tau_{\gamma(x,y)}(tW(x,y)),$$

in welcher t ein Vektor aus $T_x(X)$ ist, sowie

$$D^2 = \tfrac{1}{4}R - \sum_i \nabla^S_{s_i}\nabla^S_{s_i} - \sum_i \operatorname{div}(s_i)\nabla^S_{s_i},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} f_j(x,y) = -\theta^{-1/2}(x,y)\int_0^1 \theta^{1/2}(z_\xi,y)\xi^{j-1}\Big\{\tfrac{1}{4}R(z_\xi)f_{j-1}(z_\xi,y) + \Delta f_{j-1}(z_\xi,y) \\ -\operatorname{Tr}\tau_{\gamma(z_\xi,y)}\Big(\sum_i \nabla^S_{s_i}\nabla^S_{s_i}I + \operatorname{div}(s_i)\nabla^S_{s_i}I\Big)\cdot f_{j-1}(z_\xi,y) \\ -2\sum_i \operatorname{Tr}\tau_{\gamma(z_\xi,y)}\big(\nabla^S_{s_i}I\big)\cdot s_i(f_{j-1})(z_\xi,y)\Big\}\,d\xi. \end{aligned}$$

Aus $\nabla^S_{s_i}e_\varepsilon = \sum_{\varepsilon'}\Gamma^{\varepsilon'}_{i,\varepsilon}e_{\varepsilon'}$ sowie aus der Tatsache, daß $\Gamma^{\varepsilon'}_{i,\varepsilon}$ Linear-Kombinationen der Zusammenhangskoeffizienten $\omega_{ij}(s_k)$ des Levi-Civita-Zusammenhanges sind und der Definition des Schnittes I ergibt sich nun, daß

$$\operatorname{Tr}\tau_{\gamma(z_\xi,y)}\big(\nabla^S_{s_i}\nabla^S_{s_i}I + \operatorname{div}\big(s_i\nabla^S_{s_i}I\big)\big), \quad \operatorname{Tr}\tau_{\gamma(z_\xi,y)}\big(\nabla^S_{s_i}I\big)$$

Taylorentwicklungen der gesuchten Art besitzen. Induktiv erhalten wir daraus die Taylorentwicklung von $f_j(x,y)$ und wegen $\operatorname{Tr} U_j(y,y) = f_j(y,y)$ die erste Behauptung des Satzes. Die $O(n)$-Invarianz der Polynome erhält man wie in [2].

Die Änderung des Dirac-Operators unter konformer Deformation der Metrik läßt sich durch eine geeignete Identifikation der Spinorbündel durch $(D^2)^{ag} = a^{-1}(D^2)^g$ beschreiben (vgl. [7]). Dieser Zusammenhang garantiert, daß sich der in [2] gegebene Beweis der Gleichung $j = \sum_k(1 + k/2)x_k$ auf unseren Fall überträgt. q.e.d.

Nach dem Satz von H. Weyl über die Invarianten der orthogonalen Gruppe erhalten wir aus Satz 2

$$\operatorname{Tr} U_1(y,y) = k(n)R(y),$$

$$\operatorname{Tr} U_2(y,y) = \alpha(n)R(y)^2 + \beta(n)\|\mathfrak{R}(y)\|^2 + \gamma(n)\rho(y)^2 + \delta(n)\Delta R(y),$$

wobei $R = R_{jiij}$ die Skalarkrümmung, $\|\mathfrak{R}\| = \sqrt{R_{ijkl}{}^2}$ die Länge des Krümmungstensors und $\rho = \sqrt{\sum_{i,k}(\sum_i R_{jiik})^2}$ die Länge des Ricci-Tensors ist.

5. Berechnung der ersten Koeffizienten d_0, d_1, d_2 in der Asymptotenentwicklung der Zeta-Funktion von D^2

Wir wenden uns jetzt der Berechnung der ersten Koeffizienten $d_j = \int_{X^n} \operatorname{Tr} U_j(x,x)\,dx$ zu, welche in der Asymptotenentwicklung

$$\zeta(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2}\sum_{j=0}^{\infty} d_j\, t^j$$

der Zeta-Funktion $\tau(t)$ des Operators D^2 auftreten. Aus $U_0(x, x) = \theta^{-1/2}(x, x)I(x, x) = I(x, x)$ folgt unmittelbar

$$d_0 = \dim \mathbb{S} \cdot \mathrm{Vol}(X).$$

Über die Koeffizienten d_1 und d_2 wissen wir bereits, daß diese die Form

$$d_1 = k(n)\int_{X^n} R(x)\,dx,$$

$$d_2 = \int_{X^n} \left(\alpha(n)R(x)^2 + \beta(n)\|\mathfrak{R}(x)\|^2 + \gamma(n)\rho(x)^2\right) dx$$

haben, wobei $k(n)$, $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $\gamma(n)$ nur von der Dimension der Mannigfaltigkeit abhängende Größen sind. Um diese zu bestimmen, können wir daher eine Serie von Test-Mannigfaltigkeit einsetzen–welche die Sphären S^n sein werden–und für sie d_1 und d_2 direkt berechnen. Deshalb wenden wir uns der Untersuchung des Quadrates des Dirac-Operators D^2 und des im Abschnitt 4 konstruierten Schnittes I auf der Sphäre S^n zu.

Satz 3. *Sei S^n die Standardsphäre und $(s_1, \cdots, s_n)$ ein orthonormiertes Reper von Vektorfeldern, welches durch Parallelverschiebung aus einem Punkt $y \in S^n$ entsteht. Dann gilt in einer Umgebung von y*

1. $\sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i}\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I(x, y) = (-\frac{n-1}{16}r^2 + o(r^4))I(x, y)$,
2. $\sum_i \mathrm{div}(s_i)\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I(x, y) = 0$.

Beweis. Den rein rechnerischen Beweis führen wir in mehreren Schritten.

1. *Schritt.* Die kovariante Ableitung $\nabla^{\mathbb{S}}$ im Spinorbündel wird durch die Formen $w_{ij}(s_k) = (\nabla_{s_k}s_i, s_j)$ des Levi-Civita-Zusammenhanges beschrieben. Daher berechnen wir zuerst für die Sphäre S^n diese Zusammenhangsformen, wobei das Problem mit Hinblick auf den zu beweisenden Satz darin besteht, für sie Ausdrücke in Abhängigkeit vom geodätischen Abstand r zu erhalten. Sei S^n als Einheitssphäre in den euklidischen Raum R^{n+1} eingebettet und $e_1, \cdots, e_{n+1}$ die Standartbasis dieses. Aus Symmetriegründen können wir $y = (0, \cdots, 0, 1)$ und $s_k(y) = (y, e_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, annehmen. Wir müssen $\nabla_{s_k}s_i$ in einem Punkt x_0 berechnen, dessen Koordinaten wir aus den gleichen Gründen

$$x_0 = (\sin t_0, 0, \cdots, 0, \cos t_0)$$

setzen können. Die kovariante Ableitung ist in unserem Fall durch

$$(\nabla_{s_k}s_i)(x_0) = s_k \cdot s_i - (s_k, s_i)x_0$$

gegeben, wobei $s_k \cdot s_i$ die Differentiation von s_i nach s_k ist. Daraus erhalten wir

$$w_{ij}(s_k)(x_0) = (s_k \cdot s_i, s_j)(x_0)$$

und somit genügt es, den Vektor $s_k \cdot s_i$ zu berechnen. Sei vorerst k größer als 1. Dann gilt $s_k(x_0) = (x_0, e_k)$ und wir erhalten für die durch $\gamma_k(0) = x_0$, $\dot{\gamma}_k(0) = s_k(x_0)$ eindeutig bestimmte Geodätische $\gamma_k(t)$ in S^n die Formel

$$\gamma_k(t) = \cos t\, x_0 + \sin t\, e_k.$$

Wir betrachten jetzt die Geodätische δ_k^t, welche y mit $\gamma_k(t)$ verbindet und durch die Formel

$$\delta_k^t(s) = \left(\frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0 \sin s, 0, \cdots, 0, \frac{\sin t}{\sin \alpha_t} \sin s, 0, \cdots, 0, \cos(s)\right)$$

mit $\sin \alpha_t = \sqrt{cos^2\, t\, sin^2\, t_0 + sin^2\, t}$ gegeben ist. Dessen Tangentialvektor im Punkt $s = 0$ ist

$$\dot{\delta}_k^t(0) = \left(\frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0, 0, \cdots, 0, \frac{\sin t}{\sin \alpha_t}, 0, \cdots, 0\right),$$

und somit gilt

(a) $$\left(s_i(y), \dot{\delta}_k^t(0)\right) = 0 \text{ für } i \neq 1, k,$$

(b) $$s_1(y) = \frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0 \dot{\delta}_k^t(0) + \frac{\sin t}{\sin \alpha_t}\left(\frac{\sin t}{\sin \alpha_t}, 0, \cdots, 0 - \frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0, 0, \cdots, 0\right)$$

mit

$$\left(\dot{\delta}_k^t(0), \left(\frac{\sin t}{\sin \alpha_t}, 0, \cdots, 0, -\frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0, 0, \cdots, 0\right)\right) = 0.$$

Weil $s_i(\gamma_k(t))$ aus $s_i(y) = (y, e_i)$ durch Parallelverschiebung entlang δ_k^t entsteht, erhalten wir folgende Ausdrücke für $s_i(\gamma_k(t))$:

(a′) $$s_i(\gamma_k(t)) = (\gamma_k(t), e_i), i \neq 1, k.$$

(b′)

$$s_1(\gamma_k(t)) = \frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0 \dot{\delta}_k^t(\alpha_t) + \frac{\sin t}{\sin \alpha_t}\left(\frac{\sin t}{\sin \alpha_t}, 0, \cdots, 0 - \frac{\cos t}{\sin \alpha_t} \sin t_0, 0, \cdots, 0\right).$$

Aus $(s_k \cdot s_i)(x_0) = (d/dt) s_i(\gamma_k(t))_{t=0}$ folgt nun

(a″) $$(s_k \cdot s_i)(x_0) = 0 \text{ für } i \neq 1, k,$$

(b″) $$(s_k \cdot s_1)(x_0) = (0, \cdots, 0, -\tan(t_0/2), 0, \cdots, 0).$$

Dann ergibt sich unter Berücksichtigung von $t_0 = r(x_0, y) = r_0$:

$$w_{ij}(s_k) = 0, i \neq 1, k,$$
$$w_{1j}(s_k) = 0, j \neq k, w_{1k}(s_k) = -\tan(r_0/2),$$
$$w_{kj}(s_k) = 0, j \neq 1, w_{k1}(s_k) = -w_{1k}(s_k) = \tan(r_0/2).$$

Behandeln wir den Fall $k = 1$ analog, so erhalten wir insgesamt folgendes Ergebnis:

$$w_{jl}(s_i)(x_0) = \begin{cases} -\tan(r_0/2), & j = 1, l = i > 1, \\ \tan(r_0/2), & l = 1, j = i > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. *Schritt.* Wir zeigen $s_i(w_{jl}(s_i)) = 0$. Da nur $w_{1i}(s_i)$ verschieden von Null sind, genügt es $s_i(w_{1i}(s_i)) = 0$ zu zeigen. Der Abstand von $\gamma_i(t) = (\cos t \cdot \sin t_0, \cdots, \cos t, \cdots, \cos t \cdot \cos t_0)$ zu $y = (0, \cdots, 0, 1)$ in S^n beträgt

$$r(\gamma_i(t), y) = \cos^{-1}(\cos t \cdot \cos t_0),$$

und somit gilt

$$w_{1i}(s_i)(\gamma_i(t)) = -\tan\left(\tfrac{1}{2}\cos^{-1}(\cos t \cdot \cos t_0)\right),$$

woraus $s_i(w_{1i}(s_i))(x_0) = (d/dt)(w_{1i}(s_i)(\gamma_i(t)))|_{t=0} = 0$ folgt.

3. *Schritt.* Der Schnitt $I(x, y)$ wurde dadurch definiert, daß wir in $\mathbb{S}_y$ eine orthonormierte Basis e_ε wählten, diese parallel im Spinorbündel nach x verschoben und $I(x, y) = \sum_\varepsilon e_\varepsilon(x) \otimes e_\varepsilon(y)$ setzten. Weil das Reper von Vektorfeldern $(s_1, \cdots, s_n)$ als durch Parallelverschiebung von y hervorgehend vorausgesetzt ist, haben die in Abschnitt 3 definierten Schnitte $\eta_\varepsilon(x) = [\hat{s}(x), u_\varepsilon]$ die gleiche Eigenschaft. Wir können demnach $e_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x)$ annehmen. Aus der Formel für die kovariante Ableitung $\nabla^{\mathbb{S}}$ erhalten wir dann

$$\sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} e_\varepsilon(x_0) = \sum_i \sum_{l<m} \tfrac{1}{2} s_i(w_{lm}(s_i))(s_l s_m) \cdot e_\varepsilon(x_0)$$
$$+ \sum_i \sum_{l<m} \sum_{p<q} \tfrac{1}{4} w_{lm}(s_i) w_{pq}(s_i)(s_p s_q s_l s_m) \cdot e_\varepsilon(x_0).$$

Aus den Formeln für $w_{ij}(s_k)$ folgt dann unmittelbar

$$\sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} e_\varepsilon(x_0) = -\frac{n-1}{4} \tan^2 \frac{r_0}{2} e_\varepsilon(x_0),$$

und somit

$$\sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I(x, y) = \left(-\frac{n-1}{16} r^2 + o(r^4)\right) I(x, y).$$

4. *Schritt.* Aus $\operatorname{div}(s_i) = \sum_{j=1}^n w_{ij}(s_j)$ ergibt sich nun

$$\operatorname{div}(s_i) = \begin{cases} 0, & i \neq 1, \\ -(n-1)\tan(r_0/2), & i = 1, \end{cases}$$

und somit

$$\sum_i \operatorname{div}(s_i)\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} e_\varepsilon = -(n-1)\tan(r_0/2)\nabla^{\mathbb{S}}_{s_1} e_\varepsilon$$

$$= -(n-1)\tan(r_0/2) \sum_{l<m} \tfrac{1}{2} w_{lm}(s_1)(s_l s_m) \cdot e_\varepsilon = 0.$$

Wir erhalten daher die zweite Behauptung

$$\sum_i \operatorname{div}(s_i)\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I(x,y) = 0.$$

Bemerkung. Ist $\Psi = gI$ ein Schnitt über U_ε, wobei g nur vom Abstand $r = r(x,y)$ abhängt, so gilt $\sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I \circ s_i(\Psi) = 0$. Der Beweis ergibt sich aus folgender einfacher Rechnung

$$\sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I \circ s_i(\Psi) = \sum_i s_i(g)\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I \circ I = \nabla^{\mathbb{S}}_{\operatorname{grad} g} I.$$

Der Gradient von g grad $g = g' \cdot \dot{\gamma}(r)$ ist parallel zum Radialfeld und I wurde als parallel verschoben in dessen Richtung definiert. Daher gilt $\nabla^{\mathbb{S}}_{\operatorname{grad} g} I = 0$.

Satz 4. *Im Fall der Sphäre S^n gilt für eine nur vom Abstand r abhängende Funktion $g = g(r)$ die Formel*

$$D^2(g\,I) = \left\{\left(\tfrac{1}{4}n(n-1) + \frac{n-1}{16}r^2 + o(r^4)\right)g + \Delta(g)\right\}I.$$

Insbesondere haben die zur Bestimmung der Parametrix W eingeführten Schnitte U_j die "Diagonalform" $U_j = g_j I$, in welcher $g_j = g_j(r)$ nur vom Abstand r abhängige Funktionen sind und welche induktiv gemäß

$$g_0(r) = \theta^{-1/2}(r),$$

$$g_j(r) = -\theta^{-1/2}(r)\int_0^1 \theta^{1/2}(r\xi)\xi^{j-1}\left\{\left(\tfrac{1}{4}n(n-1) + \frac{n-1}{16}r^2\xi^2 + o(r^4)\right)\right.$$
$$\left. \cdot g_{j-1}(r\xi) + \Delta(g_{j-1})(r\xi)\right\} d\xi\Big\}$$

gegeben sind.

Beweis. Die erste Behauptung folgt mit Satz 3 und der obigen Bemerkung aus

$$D^2(\Psi) = \tfrac{1}{4}R\Psi + \Delta(\Psi) - \left(\sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i}\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I + \operatorname{div}(s_i)\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I\right) \circ \Psi - 2\sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} I \circ s_i(\Psi),$$

während sich die Rekursionsformel für g_j aus derjenigen für U_j und dem angegebenen Ausdruck

$$D^2(g\, I) = \left\{\left(\tfrac{1}{4}n(n-1) + \frac{n-1}{16}r^2 + o(r^4)\right)g + \Delta(g)\right\} I$$

ergibt. q.e.d.

Wir wenden uns nun der Berechnung der Koeffizienten d_1 und d_2 zu. Dazu verwenden wir folgende auf der Sphäre S^n geltende Formeln (vgl. [2])

$$\theta(r) = \left(\frac{\sin r}{r}\right)^{n-1},$$

$$g_0(r) = \left(\frac{\sin r}{r}\right)^{-(n-1)/2} = 1 + \frac{n-1}{12}r^2 + \frac{(n-1)(5n-1)}{1440}r^4 + o(r^6),$$

$$\frac{\theta'}{\theta}(r) = -\frac{n-1}{3}r + o(r^3),$$

sowie folgende Formel für den Laplace-Operator einer nur vom Abstand abhängenden Funktion g

$$\Delta(g) = -g'' - g'\left(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{r}\right).$$

Setzen wir dies in die Rekursionsformel für g_1 ein, so erhalten wir

$$g_1(r) = -\frac{1}{12}R + \frac{r^2}{2160}(-15n^3 + 18n^2 - 12n + 9) + o(r^3),$$

und daher gilt

$$U_1(y,y) = g_1(o) = -\frac{1}{12}R \cdot I(y,y).$$

Wir hatten d_1 bereits in der Form $d_1 = k(n) \cdot \int_{X^n} R(x)\, dx$ dargestellt. Setzen wir nun $X^n = S^n$, so erhalten wir $k(n) = -\dim \mathbb{S}/12$, also

$$d_1 = -\frac{\dim \mathbb{S}}{12}\int_{X^n} R(x)\, dx.$$

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned} g_2(o) &= \frac{1}{4320}(15\, n^4 - 54\, n^3 + 21\, n^2 + 18\, n) \\ &= \frac{1}{4320}\left(15 \cdot n^2(n-1)^2 - 21 \cdot 2n(n-1) - 24 \cdot n(n-1)^2\right), \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} U_2 &= \dim \mathbb{S} \cdot g_2(o) \\ &= \frac{\dim \mathbb{S}}{4320}\left(15n^2(n-1)^2 - 21 \cdot 2n(n-1) - 24n(n-1)^2\right). \end{aligned}$$

Andererseits hatten wir Tr U_2 in der Form

$$\operatorname{Tr} U_2 = \alpha(n)R^2 + \beta(n)\|\mathfrak{R}\|^2 + \gamma(n)\rho^2 + \delta(n)\Delta R$$

dargestellt, woraus im Fall $X = S^n$

$$a(n)n^2(n-1)^2 + b(n)2n(n-1) + c(n)n(n-1)^2 = 0$$

mit

$$a(n) = \frac{\alpha(n)}{\dim \mathbb{S}} - \frac{15}{4320},$$

$$b(n) = \frac{\beta(n)}{\dim \mathbb{S}} + \frac{21}{4320},$$

$$c(n) = \frac{\gamma(n)}{\dim \mathbb{S}} + \frac{24}{4320}$$

folgt. Wir wollen nun $a(n) \equiv 0$, $b(n) \equiv 0$, $c(n) \equiv 0$ für $n \geqslant 3$ schließen. Zu diesem Ziel benötigen wir eine weitere Serie von Test-Mannigfaltigkeiten, welche wir in der Form $X^k = S^n \times S^m$ $(n + m = k)$ wählen. Weil die Metrik von $S^n \times S^m$ das Produkt der Metriken von S^n und S^m ist, erhält man für diesen Raum unter Verwendung der auf S^n und S^m bereits berechneten Größen die Zusammenhangskoeffizienten $w_{ij}(s_i)$ und den Schnitt $\sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i}\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i}I + \operatorname{div}(s_i)\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i}I$, welcher wiederum ein Vielfaches von I ist. Daraus bekommt man in Analogie zu der für $X^n = S^n$ durchgeführten Rechnungden Wert

$g_2^{S^n\times S^m}(o)$:

$$g_2^{S^n\times S^m}(o) = \frac{1}{4320}\big[15(n(n-1) + m(m-1))^2 - 21(2n(n-1)$$
$$+2m(m-1)) - 24\big(n(n-1)^2 + m(m-1)^2\big)\big].$$

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen erhalten wir

$$0 = a(n+m)(n(n-1) + m(m-1))^2 + 2b(n+m)(n(n-1) + m(m-1))$$
$$+ c(n+m)\big(n(n-1)^2 + m(m-1)^2\big).$$

Setzen wir jetzt $n = \lambda$ und $m = k - \lambda$, so entsteht ein Polynom 4. Grades in λ mit den Nullstellen $\lambda = 0, 1, \cdots, k$. Daraus schließt man für $k \geqslant 4$ leicht $a(k) = b(k) = c(k) = 0$. Der Fall dritter Dimension muß etwas anders behandelt werden, weil wir drei Unbekannte $a(3) = a$, $b(3) = b$, $c(3) = c$, aber nur zwei Test-Mannigfaltigkeit S^3, $S^2 \times S^1$ und somit nur zwei Beziehungen zwischen ihnen haben

(2) $$3a + b + c = 0, 2a + 2b + c = 0.$$

Dafür besteht aber in einem 3-dimensionalen Riemannschen Raum die Beziehung $R^2 - 4\rho^2 + \|\mathfrak{R}\|^2 = 0$!

Aus ihr erhalten wir

$$d_2 = \int_{X^3} \alpha R^2 + \beta \|\mathfrak{R}\|^2 + \gamma \rho^2 = \int_{X^3} (\beta - \alpha)\|\mathfrak{R}\|^2 + (\gamma + 4\alpha)\rho^2.$$

Aus der Definition der Größen a, b und c folgt unmittelbar

$$\beta - \alpha = 2b - 2a - \frac{72}{4320}, \gamma + 4\alpha = 2c + 8a + \frac{72}{4320},$$

woraus man unter Verwendung von (2) $\beta - \alpha = -72/4320$ und $\gamma + 4\alpha = 72/4320$ schließt. Dann aber gilt

$$d_2 = \int_{X^3} (\beta - \alpha)\|\mathfrak{R}\|^2 + (\gamma + 4\alpha)\rho^2 = \frac{2}{4320}\int_{X^3} - 36\|\mathfrak{R}\|^2 + 36\rho^2$$

und eine nochmalige Anwendung von $R^2 - 4\rho^2 + \|\mathfrak{R}\|^2 = 0$ ergibt die Formel

$$d_2 = \frac{\dim \mathbb{S}}{4320}\int_{X^3} 15R^2 - 21\|\mathfrak{R}\|^2 - 24\rho^2.$$

Das Ergebnis der bisherigen Überlegungen zusammenfassend formulieren wir

Theorem. *Sei X^n $(n \geqslant 3)$ eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit und D der im Spinorbündel wirkende Dirac-Operator. Die Zeta-Funktion $\zeta(t)$ des Operators D^2 besitzt an der Stelle $t = 0$ die asymptotische Entwicklung*

$$\zeta(t) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} d_j t^j$$

mit

$$\begin{aligned} d_0 &= \dim \mathbb{S} \cdot \mathrm{Vol}(X), \\ d_1 &= -\frac{\dim \mathbb{S}}{12}\int_{X^n} R(x)\,dx, \\ d_2 &= \frac{\dim \mathbb{S}}{4320}\int_{X^n} \left(15R(x)^2 - 21\|\mathfrak{R}(x)\|^2 - 24\rho(x)^2\right) dx. \end{aligned}$$

6. Einige Anwendungen der Asymptotenentwicklung der Zeta-Funktion von D^2

In diesem Abschnitt der Arbeit wenden wir uns der Frage zu, welche Größen der Riemannschen Mannigfaltigkeit das Spektrum Spec^{Δ} des Laplace-Operators und das Spektrum Spec^{D^2} des Operators D^2 gemeinsam bestimmen. Aus der Asymptotenentwicklung der Zeta-Funktion $\zeta^{D^2}(t)$ des Operators D^2 folgt mit dem oben bewiesenen Theorem, daß die Integrale

$$\int_{X^n} R(x)\,dx, \quad \int_{X^n} \left(15\, R(x)^2 - 21\|\mathfrak{R}(x)\|^2 - 24\, \rho(x)^2\right) dx,$$

sowie das Volumen und die Dimension der Mannigfaltigkeit X^n durch Spec^{D^2} determiniert werden. Andererseits bestimmt das Spektrum Spec^{Δ} des Laplace-Operators außer dem Volumen und der Dimension der Mannigfaltigkeit die Integrale

$$\int_{X^n} R(x)\,dx, \quad \int_{X^n} (5\,R(x)^2 + 2\|\Re(x)\|^2 - 2\rho(x)^2)\,dx,$$

(siehe [2]). Durch eine Kombination dieser Ausdrücke erhalten wir, daß für eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit die Größen

$$\int_{X^n} 3\,R^2 - 2\rho^2, \int_{X^n} 3\|\Re\|^2 + 2\rho^2, \int_{X^n} \|\Re\|^2 + R^2 \tag{3}$$

durch die beiden Spektren Spec^{Δ} und Spec^{D^2} zusammen determiniert werden.

Satz 5. *Seien X^4 eine 4-dimensionale, geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit konstanter Skalarkrümmung R, und $\bar{X}$ eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit konstanter Skalarkrümmung $\bar{R}$ mit* $\mathrm{Spec}^{D^2}(X^4) = \mathrm{Spec}^{D^2}(\bar{X})$ *und* $\mathrm{Spec}^{\Delta}(X^4) = \mathrm{Spec}^{\Delta}(\bar{X})$. *Dann sind die Eulerschen Charakteristiken $\chi(X^4)$ und $\chi(\bar{X})$ der Mannigfaltigkeit X^4 und $\bar{X}$ gleich.*

Bemerkung. Bereits aus $\mathrm{Spec}^{\Delta}(X^4) = \mathrm{Spec}^{\Delta}(\bar{X})$ oder $\mathrm{Spec}^{D^2}(X^4) = \mathrm{Spec}^{D^2}(\bar{X})$ folgt $R = \bar{R}$, $\dim \bar{X} = \dim X^4 = 4$ und $\mathrm{Vol}(X) = \mathrm{Vol}(\bar{X})$.

Beweis. Aus dem Satz von Gauß-Bonet für 4-dimensionale Mannigfaltigkeit (vgl. [2]) erhalten wir

$$\begin{aligned}\chi(X^4) &= \frac{1}{32\pi^2}\int_{X^4}(R^2 + \|\Re\|^2 - 4\rho^2)\\ &= \frac{1}{32\pi^2}\left\{\int_{X^4}(R^2 + \|\Re\|^2) + 2\int_{X^4}(3\,R^2 - 2\rho^2) - 6\int_{X^4} R^2\right\}.\end{aligned}$$

Die beiden ersten Integrale sind nach (3) durch die beiden Spektren determiniert, während $\int_X R^2 = \int_{\bar{X}} \bar{R}^2$ aus $R = \bar{R}$ const und $\mathrm{Vol}(X) = \mathrm{Vol}(\bar{X})$ folgt. q.e.d.

Ist X^4 eine reell-4-dimensionale komplexe Kähler-Mannigfaltigkeit, so gilt für deren Signatur sign (X^4) und deren arithmetisches Geschlecht a (X^4) (vgl. [3])

$$\mathrm{sign}(X^4) = -\frac{1}{48\pi^2}\int \|\Re\|^2 - 2\rho^2,$$

$$a(X^4) := \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)[X^4] = \frac{1}{384\cdot\pi^2}\int \|\Re\|^2 - 8\rho^2 + 3R^2.$$

Satz 6. *Seien X^4, $\bar{X}^4$ reell-4-dimensionale, geschlossene komplexe Kähler-Mannigfaltigkeit mit Spin-Struktur und konstanter Skalarkrümmung. Aus* $\mathrm{Spec}^{\Delta}(x) = \mathrm{Spec}^{\Delta}(\bar{X})$ *und* $\mathrm{Spec}^{D^2}(X) = \mathrm{Spec}^{D^2}(\bar{X})$ *folgt die Gleichheit der*

Signaturen $sign(X) = sign(\bar{X})$ *und der arithmetischen Geschlechte* $a(X) = a(\bar{X})$.

Beweis. Aus dem oben angegebenen Ausdruck für $a(X)$ erhalten wir

$$a(X) = \frac{1}{384\pi^2}\int_{X^4} \|\mathfrak{R}\|^2 - 8\rho^2 + 3\,R^2$$

$$= \frac{1}{384\pi^2}\left\{\int_{X^4}(\|\mathfrak{R}\|^2 + R^2) + 4\int_{X^4}(3\,R^2 - 2\rho^2) - 10\int_{X^4}R^2\right\}$$

und schließen wie im Beweis von Satz 5. Der Beweis für die Signatur verläuft analog. q.e.d.

Wir wenden uns nun Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung zu und beweisen

Satz 7. *Es seien* X^n *und* $\bar{X}^n$ *geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit, für welche die Spektren der Laplace-und Dirac-Operatoren* Spec^{Δ} *und* Spec^{D^2} *gleich sind. Hat* X^n *eine konstante Schnittkrümmung* σ, *so istdie Schnittkrümmung* $\bar{\sigma}$ *von* $\bar{X}^n$ *ebenfalls konstant und gleich* σ.

Beweis. Da X^n ein Riemannscher Raum mit konstanter Schnittkrümmung ist, gilt $\|\mathfrak{R}\|^2 = 2/(n-1)\rho^2$ und $\rho^2 = R^2/n$, während wir für $\bar{X}^n$ die Ungleichungen $\|\bar{\mathfrak{R}}\|^2 \geqslant 2/(n-1)\bar{\rho}^2$ und $\bar{\rho}^2 \geqslant \bar{R}^2/n$ haben. Wegen $R = n(n-1)\sigma$ folgt, daß R konstant ist. Aus der Gleichheit der Spektren Spec^{Δ} und Spec^{D^2} erhalten wir

$$\int_{\bar{X}}\|\bar{\mathfrak{R}}\|^2 + \bar{R}^2 = \int_X \|\mathfrak{R}\|^2 + R^2, \quad \int_{\bar{X}}\bar{R} = \int_X R,$$

woraus wir mittels

$$\left(\frac{2}{n(n-1)} + 1\right)\int_{\bar{X}}\bar{R}^2 \leqslant \int_{\bar{X}}\|\bar{\mathfrak{R}}\|^2 + \bar{R}^2 = \int_X \|\mathfrak{R}\|^2 + R^2$$

$$= \left(\frac{2}{n(n-1)} + 1\right)\int_X R^2$$

die Ungleichung $\int_{\bar{X}} \bar{R}^2 \leqslant \int_X R^2$ und somit

$$\mathrm{Vol}(\bar{X})\int_{\bar{X}}\bar{R}^2 \leqslant \mathrm{Vol}(X)\int_X R^2 = \left(\int_X R\right)^2 = \left(\int_{\bar{X}}\bar{R}\right)^2$$

bekommen. Eine Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt dann

$$\left(\int_{\bar{X}}\bar{R}\right)^2 \leqslant \int_{\bar{X}}\bar{R}^2\cdot\int_{\bar{X}}1^2 = \int_{\bar{X}}\bar{R}^2\cdot\mathrm{Vol}(\bar{X}) \leqslant \left(\int_{\bar{X}}\bar{R}\right)^2.$$

Daher tritt in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung Gleichheit ein, also ist $\bar{R}$ konstant und wegen $\int_{\bar{X}} \bar{R} = \int_X R$ gleich R. Da die in (1) angeführten

Integrale durch die Spektren Spec^{Δ} und Spec^{D^2} determinert werden, erhalten wir aus $R = \bar{R}$

$$\int_X \rho^2 = \int_{\bar{X}} \bar{\rho}^2, \quad \int_X \|\mathfrak{R}\|^2 = \int_{\bar{X}} \|\bar{\mathfrak{R}}\|^2.$$

Dann aber gilt

$$\frac{2}{n-1}\int_X \rho^2 = \frac{2}{n-1}\int_{\bar{X}} \bar{\rho}^2 \leqslant \int_{\bar{X}} \|\bar{\mathfrak{R}}\|^2 = \int_X \|\mathfrak{R}\|^2 = \frac{2}{n-1}\int_X \rho^2,$$

und somit $2/(n-1)\,\bar{\rho}^2 = \|\bar{\mathfrak{R}}\|^2$. Diese Bedingung ist jedoch notwendig und hinreichend dafür, daß $\bar{X}$ eine konstante Schnittkrümmung $\bar{\sigma}$ hat. Die Gleichheit $\bar{\sigma} = \sigma$ folgt aus $\bar{R} = R$ unmittelbar.

Folgerung 4. *Seien X^n eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung, und $\bar{X}^n$ eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit. Sind die Spektren der Operatoren Δ und D^2 auf X^n und $\bar{X}^n$ gleich, so sind X^n und $\bar{X}^n$ lokal isometrisch.*

Bekanntlicherweise sind die Sphären S^2, S^3, S^4 und die reell-projektiven Räume $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$, $\mathbf{P}^4(\mathbf{R})$ durch das Spektrum des Laplace-Operators als Riemannsche Mannigfaltigkeit bestimmt (vgl. [2]). Wir zeigen nun

Folgerung 5. *Ist X^n eine geschlossene zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeit mit* $\mathrm{Spec}^{\Delta}(X^n) = \mathrm{Spec}^{\Delta}(S^n)$ *und* $\mathrm{Spec}^{D^2}(X^n) = \mathrm{Spec}^{D^2}(S^n)$, *so ist X^n isometrisch zu S^n.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen ergibt sich, daß X^n konstante positive Schnittkrümmung $\sigma > o$ hat. Ein solcher Raum wird dann von der Sphäre S^n überlagert: $X^n = S^n/\Gamma$ (vgl. [15]). Aus $\mathrm{Vol}(X^n) = \mathrm{Vol}(S^n)$ und $\mathrm{Vol}(X^n) = 1/\mathrm{card}(\Gamma)$. $\mathrm{Vol}(S^n)$ erhalten wir dann, daß Γ nur aus der Identität besteht und somit $S^n = X^n$ ist. q.e.d.

Mit dem gleichen Argument erhält man

Folgerung 6. *Ist $X^{4(k+3)}$ eine geschlossene, zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeit und* $\mathrm{Spec}^{\Delta}(X^{4(k+3)}) = \mathrm{Spec}^{\Delta}(\mathbf{P}^{4(k+3)}(\mathbf{R}))$, $\mathrm{Spec}^{D^2}(X^{4(k+3)}) = \mathrm{Spec}^{D^2}(\mathbf{P}^{4(k+3)}(\mathbf{R}))$, *so ist $X^{4(k+3)}$ isometrisch zum reell-projektiven Raum* $\mathbf{P}^{4(k+3)}(\mathbf{R})$.

7. Berechnung der Koeffizienten d_0, d_1, d_2 nach einer Methode von P. B. Gilkey

P. B. Gilkey (vgl. [6]) hat in Auswertung der Seeley-Formeln die Koeffizienten $a_k(PP^*) = \int_X \mu_k$ in der Asymptotenentwicklung der Zeta-Funktion des Operators PP^* für den Fall angegeben, daß PP^* ein Operator 2. Ordnung mit dem Symbol $\sigma(x, v) = -\|v\|$ ist. Dann nämlich können die μ_k in der Form

$$\mu_k(x) = \mathrm{trace}\, E_k(x)$$

dargestellt werden, wobei E_k ein Schnitt im Bündel $\mathrm{Hom}(E, E)$ ist. Die ersten Homomorphismen E_0, E_1, E_2 sind durch die Formeln

$$E_0 = (4\pi)^{-n/2}\,\mathrm{Id}_E,$$
$$E_1 = (4\pi)^{-n/2}\big(H + \tfrac{1}{6}R\cdot \mathrm{Id}_E\big),$$
$$E_2 = (4\pi)^{-n/2}\Big\{\Big(\frac{1}{30}\Delta R + \frac{1}{72}R^2 - \frac{1}{180}\rho^2 + \frac{1}{180}\|\mathfrak{R}\|^2\Big)\cdot \mathrm{Id}_E + \tfrac{1}{6}RH + \tfrac{1}{2}H^2 + \frac{1}{12}W_{ij}W_{ij} + \tfrac{1}{6}\Delta H\Big\}$$

gegeben. Die Homomorphismen H, W_{ij} aus $\mathrm{Hom}(E, E)$ sind dabei folgendermaßen zu bestimmen; Dem Operator PP^* wird eine kovariante Ableitung ∇^E im Vektorbündel E so zugeordnet, daß

$$PP^* = -H - \sum_i \nabla^E_{s_i}\nabla^E_{s_i} - \sum_i \mathrm{div}(s_i)\nabla^E_{s_i}$$

ist. W_{ij} ergibt sich dann aus

$$W_{ij} = \nabla^E_{s_i}\nabla^E_{s_j} - \nabla^E_{s_j}\nabla^E_{s_i} - \nabla^E_{[s_i,s_j]}.$$

Sei nun $E = \mathbb{S}$ das Spinorbündel und $\nabla^{\mathbb{S}}$ die kovariante Ableitung in diesem. Aus

$$D^2 = \tfrac{1}{4}R - \sum_i \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i}\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} - \sum_i \mathrm{div}(s_i)\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i}$$

ergibt sich dann, daß die kovariante Ableitung $\nabla^{\mathbb{S}}$ zur Auswertung dieser Gilkey-Formeln benutzt werden kann und $H = -\frac{1}{4}R$ gilt. Die Koeffizienten d_0 und d_1 in der Asymptotenentwicklung der Zeta-Funktion des Operators D^2 erhalten wir dann aus

$$d_0 = (4\pi)^{n/2}\int_X \mu_0 = \int_X \mathrm{Tr}\, I\, dy = \dim \mathbb{S}\cdot \mathrm{Vol}(X),$$
$$d_1 = (4\pi)^{n/2}\int_X \mu_1 = \int_X \big(H + \tfrac{1}{6}R\big)\cdot \mathrm{Tr}\, I\, dy = -\frac{\dim \mathbb{S}}{12}\int_X R(x)\, dx.$$

Für die Berechnung des Koeffizienten d_2 benötigen wir die Spuren der Homomorphismen $W_{ij}\cdot W_{ij}$. Nun gilt

$$W_{ij} = \nabla^{\mathbb{S}}_{s_i}\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} - \nabla^{\mathbb{S}}_{s_j}\nabla^{\mathbb{S}}_{s_i} - \nabla^{\mathbb{S}}_{[s_i,s_j]} = \tfrac{1}{2}\sum_{l<m} R_{ijlm}s_l s_m,$$

wobei wir s_l, s_m mittels der Clifford-Multiplikation als einen Homomorphismus im Spinorbündel auffassen, woraus unter Verwendung einer orthonormierten Basis $e_i \in \mathbf{R}^n$ mit $s_i = [s_i, e_i]$

$$\mathrm{Trace}(W_{ij}W_{ij}) = \tfrac{1}{4}\sum_{l<m}\sum_{p<q} R_{ijlm}R_{ijpq}\,\mathrm{Trace}(e_l e_m e_p e_q)$$

folgt. Die Wirkung der Produkte e_1e_m auf dem Spin-Modul Δ_n wurde in [4] beschrieben. In Δ_n führt man eine Basis $u(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ mit $n = 2k$, $2k+1$ und $\varepsilon_i = \pm 1$ ein, für welche mit

$$\alpha(j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \text{ ungerade,} \\ 2 & \text{falls } j \text{ gerade} \end{cases}$$

die nachstehenden Formeln abgeleitet wurden:

1. Ist $[l - 1/2] < [m - 1/2]$ und $m < 2k + 1$:

$$(e_l e_m) \cdot u(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) = C_{lm} \varepsilon_{k-[m-1/2]}^{\alpha(m+1)} \cdot \varepsilon_{k-[l-1/2]}^{\alpha(1)} \cdot \varepsilon_{k-[m-1/2]+1} \cdots \cdot \varepsilon_{k-[l-1/2]-1} \cdot u(\varepsilon_1, \cdots, -\varepsilon_{k-[m-1/2]}, \cdots, -\varepsilon_{k-[l-1/2]}, \cdots, \varepsilon_k).$$

2. Ist $l < m < 2k + 1$ und $[l - 1/2] = [m - 1/2]$:

$$(e_l e_m) \cdot u(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) = i \cdot \varepsilon_{k-[l-1/2]} \cdot u(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k).$$

3. Ist $l < 2k + 1$, $m = 2k + 1$:

$$(e_l e_m) \cdot u(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k) = (-1)^{n-[l+1/2]+l} i^{\alpha(l)+1} \cdot \varepsilon_1 \cdots \cdot \varepsilon_{k-[l+1/2]} \cdot \varepsilon_{k-[l-1/2]}^{\alpha(l)} \cdot u(\varepsilon_1, \cdots, -\varepsilon_{k-[l-1/2]}, \cdots, \varepsilon_k).$$

Aus diesen Formeln ergibt sich:

$$\mathrm{Tr}(e_i e_j) = 0, \quad i < j,$$
$$\mathrm{Tr}(e_i e_j e_l e_m) = 0, \quad i < j < l < m,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{Trace}(W_{ij} W_{ij}) &= \tfrac{1}{4} \sum_{l<m} R_{ijlm} R_{ijlm} \,\mathrm{Trace}(e_l e_m e_l e_m) \\ &= -\frac{\dim \mathbb{S}}{4} \sum_{l<m} R_{ijlm}^2 = -\frac{\dim \mathbb{S}}{8} \sum_{l,m} R_{ijlm}^2, \end{aligned}$$

$$\mathrm{Trace}(W_{ij} W_{ij}) = -\frac{\dim \mathbb{S}}{8} \|\mathfrak{R}\|^2.$$

Setzen wir diesen Wert in die Formel für E_2 ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} d_2 &= (4\pi)^{n/2} \int_X \mu_2 = \int_X \mathrm{Tr}\, E_2 \\ &= \frac{\dim \mathbb{S}}{4320} \int_X \left(15 R(x)^2 - 21 \|\mathfrak{R}(x)\|^2 - 24 \rho(x)^2\right) dx. \end{aligned}$$

Literatur

[1] M. F. Atiyah, R. Bott & V. K. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Invent. Math. **19** (1973) 279–330.

[2] M. Berger, P. Gauduchon & E. Mazet, *Le spectre d'une varieté Riemannienne*, Lecture Notes in Math. Vol. 194, Springer, Berlin, 1971.

[3] H. Donnelly, *Topology and Einstein Kaehler metrics*, J. Differential Geometry **11** (1976) 259–264.

[4] Th. Friedrich & S. Sulanke, *Ein Kriterium für die formale Selbstadjungiertheit des Dirac-Operators*, Colloq. Math. **40** (1979) 239–247.

[5] M. P. Gaffney, *Asymptotic distributions associated with the Laplacian for forms*, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958) 535–545.

[6] B. P. Gilkey, *The spectral geometry of real and complex manifolds*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 27, Amer. Math. Soc. 1975, 265–280.

[7] N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Advances in Math. **14** (1974) 1–55.

[8] H. P. McKean & I. M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geometry **1** (1967) 43–69.

[9] J. Milnor, *Spin Structures on manifolds*, Enseignement Math. **9** (1963) 198–203.

[10] R. Parthasarathy, *Dirac-Operator and discrete series*, Ann. of Math. **96** (1972) 1–30.

[11] T. Sakai, *On eigenvalues of Laplacian and curvature of Riemannian manifolds*, Tôhoku Math. J. **23** (1971) 589–603.

[12] R. T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 10, Amer. Math. Soc. 1967, 288–307.

[13] R. Sulankel & R. Wintgen, *Differentialgeometrie und Faserbündel*, Berlin, 1972.

[14] J. A. Wolf, *Essential self adjointnes for the Dirac-operator and its square*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1973) 611–640.

[15] ______, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill, New York, 1967.

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN