J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
13 (1978) 145-162

NOMBRES CARACTERISTIQUES D'UNE VARIETE RIEMANNIENNE DE DIMENSION 4

ALBERT POLOMBO

INTRODUCTION

Soit M une variété riemannienne compacte orientée. Nous savons que si la dimension de M est $4k$, sa caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ et son k-ième nombre de Pontryagin $p_k(M)$ s'expriment comme intégrales de polynômes de degré $2k$ en la courbure. Ces expressions permettent en particulier d'énoncer, lorsque $k = 1$, les résultats suivants:

(a) Soit $\bar{R}$ la courbure sectionnelle de M. Alors si $\bar{R}$ est non négative, ou non positive, $\chi(M)$ est non négative.

Le théorème précédent est dû à S. S. Chern et J. W. Milnor (cf. [3]).

(b) Soit $\sigma(M)$ la signature de M. Si M est un espace d'Einstein (c'est-à-dire s'il existe un nombre réel λ tel que la métrique g et son tenseur de Ricci r soient liés par la relation $r = \lambda g$), alors $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ vérifient l'inégalité

$$|\sigma(M)| \leq \tfrac{2}{3}\chi(M) .$$

Le résultat précédent a été établi indépendamment par J. Thorpe (cf. [9]) puis par N. Hitchin (cf. [4]).

Les travaux que nous venons de citer ont en commun le fait d'être algébriques. Les calculs consistent à évaluer les intégrands de $\chi(M)$ et $p_1(M)$ en chaque point x de M.

On est ainsi amené à définir, sur un espace vectoriel réel euclidien V de dimension n, l'espace $\mathscr{C}^2(V)$ des 2-structures de courbure de V comme l'espace des endomorphismes autoadjoints de $\bigwedge^2 V$. Ce choix est dicté par les symétries du tenseur de Riemann-Christoffel.

Cet article comporte deux parties I et II. Dans I nous décomposons les formes quadratiques classiques sur $\mathscr{C}^2(V)$ invariantes sous les groupes $SO(V)$ ou $O(V)$ dans une base de formes quadratiques $SO(V)$- ou $O(V)$-invariantes, associées à la décomposition en sous-espaces $SO(V)$- ou $O(V)$-irréductibles.

Dans II, nous utilisons la décomposition précédente pour établir, en dimension 4, des résultats concernant $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ lorsque M est munie d'une métrique comportant des restrictions sur la courbure de Ricci (pincement Ricci, dispersion Ricci) ou sur la courbure sectionnelle. Nous déduisons des résultats

Received July 6, 1976, and, in revised form, March 18, 1977.

obtenus dans le cas où l'on impose des restrictions sur la courbure de Ricci les corollaires suivants:

Corollaire II.3. *Sur la somme connexe $n \# CP^2$ de n copies du projectif complexe CP^2, il n'existe pas de métrique à courbure de Ricci $\frac{2}{3}$-pincée dès que $n \geq 5$.*

Corollaire II.8. *Si M est une surface $K3$, il n'éxiste pas sur la somme connexe $n \# M$ de métrique à courbure de Ricci $\sqrt{3}/2$-dispersée dès que $n \geq 2$.*

Notre résultat essentiel est relatif à des restrictions sur la courbure sectionnelle et s'énonce de la façon suivante:

Théorème II.13. *Soit M une variété riemannienne compacte orientable de dimension 4 à courbure sectionnelle $\bar{R}$ k-pincée (i.e., il existe $k > 0$ et $A > 0$ tels que, ou bien $Ak \leq \bar{R} \leq A$, ou bien $-A \leq \bar{R} \leq -Ak$), alors la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M vérifient l'inégalité*

$$|\sigma(M)| \leq \tfrac{2}{3} b(k)\chi(M) ,$$

avec

$$b(k) = (5k^2 - 7k + 2)/(9k^2) , \qquad 0 < k \leq \tfrac{1}{4} .$$

Nous remercions vivement J. P. Bourguignon qui nous a proposé ce travail et nous a guidé et conseillé dans son élaboration.

I. DECOMPOSITION DES FORMES QUADRATIQUES CLASSIQUES

I.1. Structures de courbure d'ordre 2

Soit V un espace vectoriel réel euclidien de dimension n. On note $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit scalaire sur V. L'espace $\bigwedge^2 V$ des deux-vecteurs de V est muni d'une structure euclidienne canonique notée $\langle \cdot , \cdot \rangle$, qui se définit sur les éléments décomposés de V de la façon suivante, pour $x_1 \in V$, $y_1 \in V$, $x_2 \in V$, $y_2 \in V$,

$$\langle x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2 \rangle = \det (\langle x_i, y_j \rangle) .$$

L'espace $\mathscr{C}^2(V)$ des endomorphismes auto-adjoints de $\bigwedge^2 V$, qui s'identifie à $\bigcirc^2 (\bigwedge^2 V)$, est lui aussi muni d'une structure euclidienne notée encore $\langle \cdot , \cdot \rangle$, définie comme suit: pour $R, S \in \mathscr{C}^2(V)$,

$$\langle R, S \rangle = \operatorname{trace} (R \circ S) .$$

Sur $\mathscr{C}^2(V)$ sont définies les trois applications suivantes:

(a) *L'application de Bianchi* $b \colon \mathscr{C}^2(V) \to \mathscr{C}^2(V)$. Si x_1, x_2, x_3 appartiennent à V et si R appartient à $\mathscr{C}^2(V)$, alors

$$b(R)(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\alpha} R(x_{\alpha(1)} x_{\alpha(2)})(x_{\alpha(3)}) ,$$

où α parcourt les permutations circulaires de $(1, 2, 3)$ et $R(x_i \wedge x_j)$ s'interprète comme endomorphisme anti-autoadjoint de V (on utilise donc encore la structure euclidienne de V). Lorsque R est tel que $b(R) = 0$, on dit qu'il vérifie la *première identité de Bianchi.* Le sous-espace des éléments de $\mathscr{C}^2(V)$ qui vérifient cette identité sera noté $\mathscr{C}^2_b(V)$.

(b) *La contraction canonique* $c: \mathscr{C}^2(V) \to \mathscr{C}^1(V)$ où $\mathscr{C}^1(V)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes autoadjoints de V. Si x_1, x_2, x appartiennent à V et si R appartient à $\mathscr{C}^2(V)$, nous avons

$$\langle c(R)(x_1), x_2 \rangle = \operatorname{trace}\{x \mapsto R(x_1, x)x_2\} .$$

L'image $c(R)$ est appelée *tenseur de Ricci* de R et notée r.

(c) *L'application* $\tau: \mathscr{C}^2(V) \to \boldsymbol{R}$ qui, à un élément R de $\mathscr{C}^2(V)$, associe deux fois sa trace ($\tau(R)$ est la *courbure scalaire* de R). On a

$$\tau(R) = 2 \operatorname{trace}(R) = \operatorname{trace}(r) .$$

Nous noterons $\mathscr{G}$ la grassmannienne des deux-plans de V; elle s'identifie au sous-ensemble des éléments décomposés de norme 1 de $\bigwedge^2 V$. Si R est un élément de $\mathscr{C}^2(V)$, on lui associe sa courbure sectionnelle $\bar{R}$ définie pour P dans $\mathscr{G}$ par

$$\bar{R}(P) = \langle RP, P \rangle .$$

I.2. Sous-espaces irréductibles sous $O(V)$

Le groupe orthogonal $O(V)$ opère de façon isométrique respectivement dans $\bigwedge^2 V$ et dans $\mathscr{C}^2(V)$: pour $g \in O(V)$, $x, y \in \bigwedge^2 V$, $R \in \mathscr{C}^2(V)$,

$$g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y) , \qquad g(R) = g^{-1} \circ R \circ g .$$

La contraction c est une application équivariante pour $O(V)$ et permet, selon la théorie de H. Weyl [11], de décomposer $\mathscr{C}^2(V)$ en sous-espaces $O(V)$-invariants irréductibles. Notons respectivement $\mathscr{T} = (\ker b)^\perp$, $\mathscr{C}^2_b(V) = \ker b$, $\mathscr{U} = (\ker \tau)^\perp$, $\mathscr{S} = (\ker c)^\perp \cap (\ker \tau)$, $\mathscr{W} = (\ker c) \cap (\ker b)$.

Nous savons alors (cf. [8] et [6]) que si la dimension n de V est supérieure ou égale à 4, $\mathscr{C}^2(V)$ est la somme directe orthogonale de $\mathscr{T}, \mathscr{U}, \mathscr{S}, \mathscr{W}$, qui sont les sous-espaces $O(V)$-invariants irréductibles de $\mathscr{C}^2(V)$. Les éléments de $\mathscr{W}$ sont appelés *tenseurs de Weyl* et sont de plus invariants sous le groupe conforme. Les éléments de $\mathscr{U} \oplus \mathscr{W}$ sont appelés *tenseurs d'Einstein.*

D'autre part, (cf. [8]), si $n > 2$, la contraction c est un isomorphisme de $\mathscr{S} \oplus \mathscr{U}$ sur $\mathscr{C}^1(V)$. Cet isomorphisme applique $\mathscr{S}$ sur les éléments de trace nulle de $\mathscr{C}^1(V)$ et $\mathscr{U}$ sur les multiples scalaires de l'identité. L'isomorphisme inverse, noté s, vérifie donc $c \circ s = I_{\mathscr{C}^1(V)}$.

I.3. Formes quadratiques invariantes

Les formes quadratiques $R \mapsto \|R\|^2$, $R \mapsto \|r\|^2$, $R \mapsto (\tau(R))^2$, sont appelées *formes quadratiques classiques* sur $\mathscr{C}^2(V)$ (cf. [1]). La théorie de H. Weyl (vf. [11]) permet, soit en étudiant les invariants (cf. [1]), soit en considérant les sous-espaces irréductibles, de montrer que la dimension de l'espace des formes quadratiques invariantes est exactement le nombre de sous-espaces irréductibles. En particulier, sur un sous-espace irréductible, deux formes quadratiques invariantes sont nécessairement proportionnelles.

Soit alors R appartenant à $\mathscr{C}^2_b(V) = \mathscr{U} \oplus \mathscr{S} \oplus \mathscr{W}$. Nous avons

$$R = U + S + W .$$

Nous allons décomposer les formes quadratiques classiques dans la base des *formes quadratiques fondamentales* $R \mapsto \|U\|^2$, $R \mapsto \|S\|^2$, $R \mapsto \|W\|^2$.

Pour cela calculons les rapports

$$\|c(U)\|^2/\|U\|^2 , \quad \|c(S)\|^2/\|S\|^2 , \quad \|\tau(U)\|^2/\|U\|^2 .$$

Considérons l'élément $e_1 \bigcirc e_2$ appartenant à $\mathscr{C}^1(V)$, où (e_i) est une base orthonormée de V. Nous avons

$$s(e_1 \bigcirc e_2) = (1/(n-2)) \sum_{j=3}^{n} e_1 \wedge e_j \bigcirc e_2 \wedge e_j ,$$

d'où, si $T = e_1 \bigcirc e_2$,

$$\|s(T)\|^2 = 2/(n-2) , \qquad \|s(T)\|^2/\|T\|^2 = 1/(n-2) .$$

L'identité $I_{\wedge^2 V}$ de $\wedge^2 V$ appartient à $\mathscr{U}$. Nous avons

$$c(I_{\wedge^2 V}) = (n-1) I_V ,$$

d'où

$$\|c(I_{\wedge^2 V})\|^2/\|I_{\wedge^2 V}\|^2 = 2(n-1) .$$

D'autre part, pour $I = I_{\wedge^2(V)}$,

$$\tau(I) = 2 \text{ trace } (I) = n(n-1) ,$$

d'où

$$(\tau(I))^2/\|I\|^2 = 2n(n-1) .$$

Enfin, les sous-espaces irréductibles étant orthogonaux, on a

$$\|R\|^2 = \|U\|^2 + \|S\|^2 + \|W\|^2 .$$

D'où le résultat:

Proposition 1.1. *La décomposition des formes quadratiques classiques dans la base des formes quadratiques associées aux sous-espaces irréductibles $\mathscr{U}, \mathscr{S}, \mathscr{W}$, est donnée par les formules*

$$\begin{aligned}
&\|R\|^2 = \|U\|^2 + \|S\|^2 + \|W\|^2 , \\
&\|c(R)\|^2 = 2(n-1)\|U\|^2 + (n-2)\|S\|^2 , \\
&(\tau(R))^2 = 2n(n-1)\|U\|^2 .
\end{aligned}$$

I.4. Calcul des intégrands de $\chi(M)$ et $p_1(M)$ en dimension 4

Considérons maintenant le cas où V est un espace euclidien orienté de dimension 4. Si $*$ est l'opérateur de Hodge sur $\bigwedge^2 V$ et ω la 4-forme d'orientation de V, nous savons que, pour α, β dans $\bigwedge^2 V$,

$$\alpha \wedge \beta = \langle *\alpha, \beta \rangle \omega , \qquad *^2 = I .$$

Dans ce qui suit, aucune confusion n'étant possible, nous noterons RR', en place de $R \circ R'$, la composition des endomorphismes associés aux tenseurs de courbure. Nous utiliserons les résultats et formules suivants extraits respectivement de [8] et [9]:

$$\begin{aligned}
&(R \in \mathscr{S}) \Longleftrightarrow (*R = -R*) , \\
&(R \in \mathscr{W}) \Longleftrightarrow (*R = R*, \operatorname{trace}(R) = 0, \operatorname{trace}(*R) = 0) , \\
&(R \in \mathscr{T}) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbf{R}, R = \lambda *) .
\end{aligned}$$

Posons, pour R appartenant à $\mathscr{C}_0^2(V)$,

$$\chi(R) = \frac{1}{8\pi^2} \operatorname{trace}(*R)^2 , \qquad p_1(R) = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{trace}(R*R) .$$

Nous allons exprimer $\chi(R)$ et $p_1(R)$ en fonction des composantes de R sur les sous-espaces irréductibles de $\mathscr{C}_0^2(V)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace}(*R)^2 &= \operatorname{trace}[*(U+S+W)*(U+S+W)] \\
&= \|U\|^2 - \|S\|^2 + \|W\|^2 .
\end{aligned}$$

D'où

$$\chi(R) = \tfrac{1}{8}(\|U\|^2 - \|S\|^2 + \|W\|^2)/\pi^2 .$$

Pour évaluer $p_1(R)$, calculons trace $(R*R)$ en fonction des composantes sur les sous-espaces irréductibles de $\mathscr{C}^2(V)$. Nous avons

$$\operatorname{trace}(R*R) = \operatorname{trace}[(U+S+W)*(U+S+W)] .$$

L'orthogonalité des sous-espaces $\mathscr{T}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{W}$ d'une part et les propriétés de commutation de $*$ par rapport aux éléments de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{W}$ d'autre part entrainent

$$\operatorname{trace}(R * R) = \operatorname{trace}(W * W) .$$

Les sous-espaces $\mathscr{T}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{S}$ sont encore irréductibles pour l'action du groupe spécial orthogonal $SO(V)$ dans $\mathscr{C}^2(V)$. Par contre $\mathscr{W}$ se décompose en deux sous-espaces $SO(V)$-irréductibles $\mathscr{W}^+$ et $\mathscr{W}^-$. Ces sous-espaces sont caractérisés par les relations (cf. [8])

$$(W \in \mathscr{W}^+) \Longleftrightarrow (W \in \mathscr{W} \text{ et } *W = W) ,$$
$$(W \in \mathscr{W}^-) \Longleftrightarrow (W \in \mathscr{W} \text{ et } *W = -W) .$$

Il s'ensuit l'expression suivante de $p_1(R)$

$$p_1(R) = \tfrac{1}{4}(\langle W^+ + W, *(W^+ + W^-)\rangle)/\pi^2 ,$$

soit

$$p_1(R) = \tfrac{1}{4}(\| W^+ \|^2 - \| W^- \|^2)/\pi^2 .$$

Remarque 1.2. Ce résultat était attendu car $p_1(R)$ est invariant sous le groupe spécial conforme.

Rapprochant les expressions de $\chi(R)$ et $p_1(R)$ nous obtenons, si $S = 0$ (c'est-à-dire si R est un tenseur d'Einstein), l'inégalité

$$p_1(R) \leq 2\chi(R) .$$

Munissons V de l'orientation opposée. Le tenseur R est encore un tenseur d'Einstein, d'où l'inégalité

$$|p_1(R)| \leq 2\chi(R) .$$

Nous savons que pour une variété riemannienne compacte M de dimension 4 orientable on a

$$\chi(M) = \int_M \chi(R) v_g , \qquad p_1(M) = \int_M p_1(M) v_g ,$$

où v_g désigne la mesure canonique sur M associée à g. D'autre part

$$\sigma(M) = \tfrac{1}{3} p_1(M) .$$

Nous retrouvons ainsi, pour une variété d'Einstein compacte orientable de dimension 4, le résultat (cf. [9] et [4])

$$|\sigma(M)| \leq \tfrac{2}{3}\chi(M) .$$

Remarque I.3. Soit M une variété riemannienne compacte de dimension n. Soit $Sp(M, g) = \{0 < \lambda_1, \cdots, \lambda_1 < \lambda_2, \cdots, \lambda_2 < \cdots\}$ le spectre du laplacien de M. Le développement de Minakshisudaram-Pleijel (cf. [1]) s'écrit

$$\sum_i e^{-\lambda_i t} \underset{t\to 0+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots) .$$

Le coefficient a_2 du développement est donné par la formule (cf. [1])

$$a_2 = \frac{1}{360}\int (8\,\|R\|^2 - 2\,\|c(R)\|^2 + 5(\tau(R))^2)v_g .$$

Utilisant la décomposition du paragraphe I.3. on obtient

$$a_2 = \frac{1}{180}\int (5n^2 - 7n + 6)\,\|U\|^2 + (6 - n)\,\|S\|^2 + 4\,\|W\|^2)v_g .$$

Proposition 1.4. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension n inférieure ou égale à 6. Alors le coefficient a_2 du dévelopment de Minakshisudaram-Pleijel relatif au spectre du laplacien de M est positif.*

II. APPLICATION AUX VARIETES PINCEES DE DIMENSION 4

Nous allons utiliser les résultats précédents pour établir des inégalités entre χ et σ dans le cas de variétés pincées. Lorsqu'une variété est munie de deux métriques riemanniennes homothétiques g et $g' = \lambda g$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, les courbures sectionnelles $\bar{R}$ et $\bar{R}'$ correspondantes vérifient $\bar{R}' = \bar{R}/\lambda$. Utilisant cette relation nous normalisons, pour les calculs, nos conditions de façon que la borne supérieure du pincement soit égale à 1. Nous étudierons deux types de pincement portant respectivement sur la courbure de Ricci et sur la courbure sectionnelle.

II.1. Conditions portant sur la courbure de Ricci

(a) Soit R appartenant à $\mathscr{C}_0^2(V)$ un tenseur de courbure. Nous notons $r = c(R)$ son tenseur de Ricci. Supposons que les valeurs propres a_i de l'endomorphisme de V associé à r vérifient l'une des inégalités $k \leq a_i \leq 1$, ou $-1 \leq a_i \leq k$, avec $0 < k \leq 1$. On dit alors que la courbure de Ricci est soumise à une condition de *pincement*. La condition de pincement s'exprime naturellement par

$$kg \leq r \leq g \qquad \text{ou } -g \leq r \leq -kg ,$$

avec $0 < k \leq 1$ et où g est le tenseur métrique de V. La courbure scalaire, qui est la trace de r, vérifie alors les inégalités

$$kg \leq \tfrac{1}{4}\tau g \leq g \qquad \text{ou } -g \leq \tfrac{1}{4}\tau g \leq -kg\ .$$

Dans les deux cas nous avons

$$(k-1)g \leq r - \tfrac{1}{4}\tau(R)g \leq (1-k)g\ ,$$

d'où

$$\|r - \tfrac{1}{4}\tau(R)g\|^2 \leq 4(1-k)^2\ .$$

On a par ailleurs

$$\langle r, g\rangle = \text{trace}\,(r \circ g) = \tau(R)\ ,$$

et

$$\|r - \tfrac{1}{4}\tau(R)g\|^2 = \|r\|^2 - \tfrac{1}{4}(\tau(R))^2\ ,$$

d'où

$$(\tau(R))^2 \leq 4\,\|r\|^2 \leq 16(1-k)^2 + (\tau(R))^2\ .$$

La différence $2\chi - p_1$ s'exprime pour un certain choix de l'orientation de V par la formule

$$(4\pi^2)(2\chi(R) - p_1(R)) = 2\,\|W^-\|^2 + \|U\|^2 - \|S\|^2\ .$$

La condition

$$\|S\|^2 \leq \|U\|^2$$

est équivalente à

$$3\,\|r\|^2 \leq (\tau(R))^2\ .$$

Le coefficient k étant strictement positif, nous avons

$$4k^2 \leq \|r\|^2 \leq 4\ ,$$

d'où

$$(16(1-k)^2 \leq \|r\|^2) \Longrightarrow (\|S\|^2 \leq \|U\|^2)\ ,$$

soit

$$(16(1-k)^2 \leq 4k^2) \Longrightarrow (\|S\|^2 \leq \|U\|^2)\ .$$

L'inegalité de droite est vérifiée dés que $\frac{2}{3} \leq k \leq 1$.

Proposition II.1. *Soit M une variété riemannienne compacte orientable de di-*

mension 4. *Si la courbure de Ricci $\bar{r}$ de M est $\frac{2}{3}$-pincée* (i.e., *pour un nombre réel A positif, ou bien $\frac{2}{3}Ag \leq r \leq Ag$, ou bien $-Ag \leq r \leq -\frac{2}{3}Ag$*), *alors la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ et la signature $\sigma(M)$ vérifient l'inégalité*

$$|\sigma(M)| \leq \tfrac{2}{3}\chi(M) .$$

Remarque II.2. Une variété de dimension 4 admettant une structure spinorielle (i.e., telle que sa deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ soit nulle), dont la signature est non nulle, n'admet pas de métrique à courbure scalaire positive, cf. [7] (en dimension $4k$ l'obstuction est le $\hat{A}$-genre qui en dimension 4 est égal à $-p_1/24$). Ceci rend l'inégalité précédente moins intéressante en pincement positif. Cependant pour le projectif complexe CP^2, on a

$$w_2(CP^2) \neq 0 .$$

Nous savons d'autre part que pour un choix convenable de l'orientation, la somme connexe $M_1 \sharp M_2$ de deux variétés M_1 et M_2 possède les propriétés suivantes

$$\chi(M_1 \sharp M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2 , \qquad \sigma(M_1 \sharp M_2) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2) .$$

Appliquons la proposition précédente à la somme connexe $n \sharp CP^2$ de n copies du projectif complexe (on a choisi sur chaque copie une orientation telle que la somme connexe soit orientable),

$$\chi(n \sharp CP^2) = n + 2 , \qquad \sigma(n \sharp CP^2) = n .$$

D'où le

Corollaire II.3. *Sur $n \sharp CP^2$ il n'existe pas de métrique à courbure de Ricci $\frac{2}{3}$-pincée dès que $n \geq 5$.*

(b) On peut aussi considérer un autre type de restriction sur la courbure de Ricci en demandant que la *dispersion* des valeurs propres a_i de r autour de leur valeur moyenne vérifie la condition suivante:

$$\text{pour } a = \max_i |a_i| , \quad 1 \leq i \leq 4 , \quad ka \leq \tfrac{1}{4}|\tau(R)| , \quad 0 < k \leq 1 .$$

Le nombre k est appelé *coefficient de dispersion.*

Nous avons

$$\tfrac{1}{4}k^2 \|r\|^2 = \tfrac{1}{4}k^2 \sum_i a_i^2 \leq k^2 a^2 , \qquad k^2 \|r\|^2 \leq \tfrac{1}{4}(\tau(R))^2 .$$

La condition

$$3 \|r\|^2 \leq (\tau(R))^2$$

est vérifiée dès que $\frac{3}{4} \leq k^2$.

Proposition II.4. *Soit M une variété riemannienne compacte orientable de dimension* 4 *dont la courbure de Ricci est* $\sqrt{3}/2$*-dispersée; alors*

$$|\sigma(M)| \leq \tfrac{2}{3}\chi(M)\ .$$

Remarque II.5. Ce type d'hypothèse sur r a déjà été considéré par *S. T. Y*au (cf. [12]). Son résultat est contenu dans le résultat précédent.

Un raisonnement analogue à celui du corollaire II.3 permet d'énoncer:

Corollaire II.6. *Sur* $n \sharp CP^2$*, il n'existe pas de métrique à courbure de Ricci* $\sqrt{3}/2$*-dispersée dès que* $n \geq 5$.

Remarque II.7. La condition portant sur r, que nous venons de considérer, s'applique aux variétés dont la courbure de Ricci prend des valeurs positives et des valeurs négatives. Un exemple de telles variétés est constitué par les surfaces $K3$, quartiques de CP^3 dont la première classe de Chern c_1 et le premier nombre de Betti b_1 sont nuls. Les $K3$ admettent donc des structures spinorielles et sont d'autre part candidates à posséder une métrique à courbure de Ricci nulle. Si M est une surface $K3$, nous avons

$$\chi(M) = 24\ ,$$

et pour l'orientation canonique

$$\sigma(M) = -16\ .$$

Pour la somme connexe $n \sharp M$ nous obtenons

$$\chi(n \sharp M) - \tfrac{3}{2}|\sigma(n \sharp M)| = 2(1-n)\ .$$

D'où le

Corollaire II.8. *Si M est une surface* $K3$*, il n'existe pas, sur la somme connexe* $n \sharp M$*, de métrique à courbure de Ricci* $\sqrt{3}/2$*-dispersée dès que* $n \geq 2$.

II.2. Pincement sur la courbure sectionnelle

Nous nous proposons maintenant d'établir une inégalité entre χ et p_1 lorsque la courbure sectionnelle $\bar{R}$ de R est k-pincée (i.e., lorsque, ou $k \leq \bar{R} \leq 1$, ou $-1 \leq \bar{R} \leq -k$). Pour ce faire nous allons donner des expressions des normes des composantes irréductibles U, S, W de R en fonction des courbures sectionnelles. Les notations $\bar{R}$, $\bar{U}$, $\bar{S}$, $\bar{W}$ désigneront respectivement les courbures sectionnelles de R, U, S, W.

(a) *Etude de S.* Soit (e_i), $1 \leq i \leq 4$, une base de V diagonalisant le tenseur de Ricci r de R; nous écrivons

$$r = r_1 + r_0\ , \quad r_1 = r - \tfrac{1}{4}\tau I_V\ , \quad r_0 = \tfrac{1}{4}\tau I_V\ .$$

La base (e_i) diagonalise r_1. Soit λ_i la valeur propre de r_1 correspondant au vecteur propre e_i. Utilisant l'expression de l'application s, inverse de la restriction à $\mathscr{U} \oplus \mathscr{S}$ de la contraction c(cf. [8]), nous avons pour $S = s(r)$

$$\langle Se_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l \rangle = \tfrac{1}{4}(\lambda_i + \lambda_j)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) .$$

Ceci montre que la base $(e_i \wedge e_j)$, $1 \leq i \leq j \leq 4$, diagonalise S. D'autre part soit P un deux-plan de V. La décomposition $R = U + S + W$ permet d'écrire

$$\bar{R}(P) = \langle (U + S + W)P, P \rangle .$$

Pour le supplémentaire orthogonal $P^{\perp}$ de P nous avons

$$\bar{R}(P^{\perp}) = \bar{R}(*P) = \langle (U - S + W)P, P \rangle .$$

D'où

$$|\langle SP, P \rangle| = \tfrac{1}{2} |\bar{R}(P) - \bar{R}(P^{\perp})| = |\langle SP^{\perp}, P^{\perp} \rangle| .$$

En particulier si $P_1 = e_1 \wedge e_2, P_2 = e_1 \wedge e_3, P_3 = e_1 \wedge e_4$,

$$\|S\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} |\bar{R}(P_\alpha) - \bar{R}(P_\alpha^{\perp})|^2 .$$

(b) *Un premier résultat de pincement.* Nous avons vu dans le chapitre I que

$$\|U\|^2 = \frac{1}{24}(\tau(R))^2 = \frac{1}{6} \left[\sum_{\alpha=1}^{3} (\bar{R}(P_\alpha) + \bar{R}(P_\alpha^{\perp})) \right]^2 ,$$

où, pour une base orthonormée (e_i) de V, $P_1 = e_1 \wedge e_2$, $P_2 = e_1 \wedge e_3$, $P_3 = e_1 \wedge e_4$.

Supposons $\bar{R}$ positivement k-pincée (i.e., il existe $k > 0$ tel que $k \leq \bar{R} \leq 1$). La valeur 1, qui ne dépend que de la normalisation, est supposée atteinte. Alors, évaluant U dans une base dont un des vecteurs est un maximum absolu de $\bar{R}$, nous obtenons

$$\tfrac{1}{6}(1 + 5k)^2 \leq \|U\|^2 .$$

Si $\bar{R}$ vérifie $-1 \leq \bar{R} \leq -k$, $k > 0$, nous choisissons une base dont un des vecteurs est un minimum absolu de $\bar{R}$ et $\|U\|$ vérifie encore

$$\tfrac{1}{6}(1 + 5k)^2 \leq \|U\|^2 .$$

D'autre part, que $\bar{R}$ soit positive ou négative, l'hypothèse de pincement entraine que

$$\|S\|^2 \leq \tfrac{3}{2}(1 - k)^2 ,$$

la différence $\|U\|^2 - \|S\|^2$ est donc positive si $k \geq \frac{1}{4}$.

Proposition II.9. *Soit M une variété riemannienne compacte orientable de dimension 4, à courbure sectionnelle $\bar{R}$ $\frac{1}{4}$-pincée (i.e., telle que, pour un nombre réel A positif, ou $\frac{1}{4}A \leq \bar{R} \leq A$, ou $-A \leq \bar{R} \leq -\frac{1}{4}A$), alors*

$$|\sigma(M)| \leq \tfrac{2}{3}\chi(M) .$$

Remarque II.10. La proposition précédente n'est pas intéressante dans le cas $\bar{R} > 0$, car d'après le théorème de la sphère (cf. [5]), M est alors soit S^4, soit CP^2.

(c) *Etude de W.* Nous utiliserons plusieurs fois par la suite la remarque suivante:

Remarque II.11. Soit R appartenant à $\mathscr{C}^2(V)$. Soit (ω_i), $1 \leq i \leq 6$, une base orthonormée de vecteurs propres de R et (θ_i) les valeurs propres correspondantes. Alors

$$\langle R\omega_i, \omega_i\rangle^2 = \theta_i^2 = \langle R\omega_i, R\omega_i\rangle = \langle R^2\omega_i, \omega_i\rangle ,$$

d'où

$$\|R\|^2 = \sum_{i=1}^{6} \langle R\omega_i\, \omega_i\rangle^2 .$$

Nous extrayons de [8] les résultats suivants:

Proposition (*cf.* [8]). *Soit R appartenant à $\mathscr{C}^2(V)$. Soit P un élément de la grassmannienne $\mathscr{G}$ des deux-plans de V. Alors, pour que P soit un plan critique de la courbure sectionnelle $\bar{R}$ de R (considérée comme fonction sur $\mathscr{G}$), il faut et il suffit qu'il existe deux nombres réels λ, μ tels que*

$$RP = \lambda P + \mu P^{\perp} ;$$

λ est la valeur critique de $\bar{R}$ en P.

Théorème (*cf.* [8]). *Soit R un tenseur d'Einstein. Alors il existe une base orthonormée (e_i) de V telle que chaque paire de vecteurs (e_i, e_j) sous-tende un plan critique de la courbure sectionnelle $\bar{R}$ de R. Dans cette base la matrice de R s'écrit*

$$(R) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}, \text{ avec } A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix},$$

et $\sum_{\alpha=1}^{3} \mu_\alpha = 0$, cette dernière égalité exprimant l'identité de Bianchi. De plus, si R appartient à $\mathscr{W}$ nous avons

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha = 0 .$$

Une telle famille de plans (que nous utiliserons par la suite) est par exemple obtenue de la façon suivante: si R appartient à $\mathscr{W}$ nous prenons pour Π_1 un plan où $\bar{R}$ atteint son maximum λ_1, pour Π_2 un plan où $\bar{R}$ atteint son minimum λ_3, pour Π_3 un plan orthogonal aux deux précédents où $\bar{R}$ prend la valeur $-(\lambda_1 + \lambda_3) = \lambda_2$. Exprimons $p_1(R)$ dans la base orthonormée associée à la famille de plans critiques $(\Pi_\alpha, \Pi_\alpha^\perp)$

$$4\pi^2 p_1(R) = \| W^+ \|^2 - \| W^- \|^2 = \operatorname{trace}(W * W) .$$

Nous avons

$$W\Pi_\alpha = \lambda_\alpha \Pi_\alpha + \mu_\alpha \Pi_\alpha^\perp , \qquad W\Pi_\alpha^\perp = \lambda_\alpha \Pi_\alpha^\perp + \mu_\alpha \Pi_\alpha ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(W * W) &= \sum_{\alpha=1}^{3} (\langle W * W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha\rangle + \langle W * W\Pi_\alpha^\perp, \Pi_\alpha^\perp\rangle) \\ &= 2\sum_{\alpha=1}^{3} \langle W\Pi_\alpha, W\Pi_\alpha^\perp\rangle = 4\sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \mu_\alpha \\ &= 4\sum_{\alpha=1}^{3} \langle W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha\rangle\langle W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha^\perp\rangle .\end{aligned}$$

Et par suite

$$4\pi^2 |p_1(R)| = |\| W^+ \|^2 - \| W^- \|^2| \leq 2\sum_{\alpha=1}^{3} (\langle W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha\rangle^2 + \langle W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha^\perp\rangle^2) .$$

D'autre part

$$\| W\|^2 = \operatorname{trace}(WW) = 2\sum_{\alpha=1}^{3} (\langle W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha\rangle^2 + \langle W\Pi_\alpha^\perp, \Pi_\alpha\rangle^2) .$$

(d) **Théorème de pincement.** Nous allons établir une inégalité entre $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ dépendant du pincement k et valable pour $k \in]0, 1]$. Mais d'abord un lemme:

Lemma II.12. *Soit $(t_\alpha, t_\alpha^\perp)$, $1 \leq \alpha \leq 3$, une famille de deux-plans de V deux à deux orthogonaux. Alors, si $(\Pi_\alpha, \Pi_\alpha^\perp)$ désigne la famille de plans critiques de $\overline{W}$ construite ci-dessus, nous avons*

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \langle Wt_\alpha, t_\alpha\rangle^2 \leq \sum_{\alpha=1}^{3} \langle W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha\rangle^2 .$$

Posons $\langle Wt_1, t_1\rangle = a$, $\langle Wt_2, t_2\rangle = b$; donc $\langle Wt_3, t_3\rangle = -(a + b)$. Il faut montrer que si $\lambda_3 \leq a \leq \lambda_1$, $\lambda_3 \leq b \leq \lambda_1$, et $\lambda_3 \leq -(a + b) \leq \lambda_1$, alors

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 \leq \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)^2 .$$

Le choix de λ_1 et λ_3 entraîne sur $\lambda_2 = -\lambda_1 - \lambda_3$ la condition $\lambda_3 \leq -\lambda_1 - \lambda_3 \leq \lambda_1$.

Donc pour λ_1 fixé, λ_3 appartient à l'intervalle $[-2\lambda_1, -\frac{1}{2}\lambda_1]$. Considérons la fonction $h(a, b) = a^2 + b^2(a + b)^2$. Compte-tenu des inégalités que ses valeurs doivent satisfaire, h a pour domaine de définition D l'un des fermés du plan représentés figure 1. Ce domaine se réduit à un triangle dans les cas limites $\lambda_3 = -\frac{1}{2}\lambda_1$ et $\lambda_3 = -2\lambda_1$. La fonction h n'admet comme point critique que (0, 0) à l'intérieur de D. La valeur critique correspondante est 0, donc elle vérifie trivialement l'inégalité désirée. Sur la frontière ∂D de D la fonction h ne dépend que d'une variable; nous la notons: $f(t) = u^2 + t^2 + (u + t)^2$. Les restrictions de f aux divers segments qui composent ∂D atteignent leur maximum à l'une des extrémités du segment correspondant. Le calcul des maxima de f sur chaque segment établit l'inégalité cherchée.

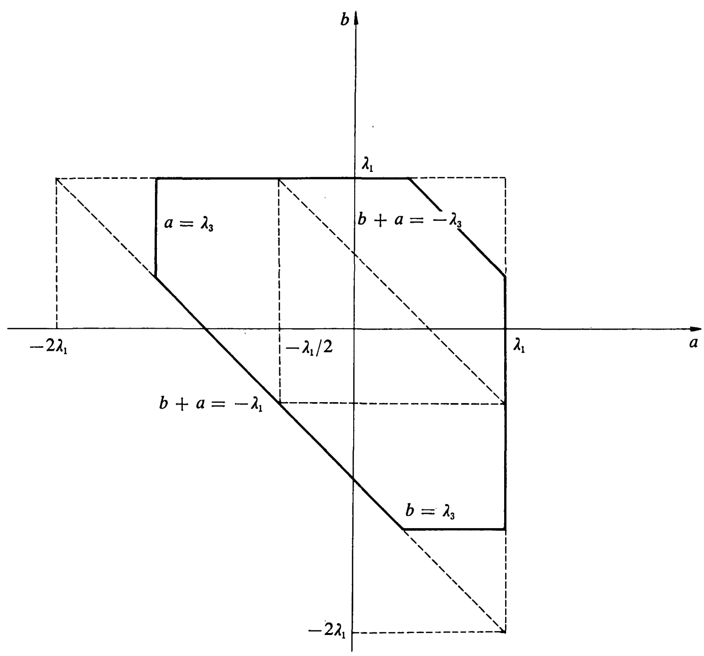

Fig. 1

Utilisons maintenant l'hypothèse de pincement. Il existe donc $k > 0$ tel que $k \leq \bar{R} \leq 1$, c'est-à-dire, pour tout P de $\mathscr{G}$,

$$k \leq \langle (U + S + W)P, P \rangle \leq 1 \, .$$

En particulier pour $P^{\perp} = *P$,

$$k \leq \langle (U + S + W)*P, *P \rangle \leq 1 \, .$$

Or nous avons les relations de commutation suivantes (cf. paragraphe I.2.)

$$*U = U* , \quad *S = -S* , \quad *W = W* ,$$

d'où

$$k \leq \langle (U - S + W)P, P\rangle \leq 1 ,$$

et comparant avec l'antépénultième inégalité nous obtenons

$$0 \leq k + |\langle SP, P\rangle| \leq \langle UP, P\rangle + \langle WP, P\rangle .$$

Comme $U = \beta I_{\wedge^2 V}$, $\beta \in \boldsymbol{R}$, et $\|I\| = \sqrt{6}$, nous en déduisons

$$U = \|U\| I/\sqrt{6} , \qquad \langle UP, P\rangle = \|U\|/\sqrt{6} ,$$

puis

$$k^2 + 2k|\langle SP, P\rangle| + \langle SP, P\rangle^2 \leq \tfrac{1}{6}\|U\|^2 + 2\|U\|\langle WP, P\rangle/\sqrt{6} + \langle WP, P\rangle^2 .$$

En sommant l'inégalité précédente sur la base $(P_\alpha, P_\alpha^\perp)$ du paragraphe II.2. (a), nous obtenons

$$\begin{aligned} 6k^2 + 4k \sum_{\alpha=1}^{3} \|SP_\alpha\| + \|S\|^2 \\ \leq \|U\|^2 + 4\|U\| \sum_{\alpha=1}^{3} \langle WP_\alpha, P_\alpha\rangle/\sqrt{6} + 2 \sum_{\alpha=1}^{3} \langle WP_\alpha, P_\alpha\rangle^2 . \end{aligned}$$

Utilisant le fait que $\sum_{\alpha=1}^{3} \langle WP_\alpha, P_\alpha\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\,(W) = 0$, ainsi que le lemme II.12., nous pouvons réécrire l'inégalité précédente

$$6k^2 + 4k \sum_{\alpha=1}^{3} \|SP_\alpha\| + \|S\|^2 \leq \|U\|^2 + 2 \sum_{\alpha=1}^{3} \langle W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha\rangle^2 .$$

Un calcul analogue montre que cette inégalité est encore valable pour le k-pincement négatif $(-1 \leq \bar{R} \leq -k)$. Soit $b > 0$. Posons $B = 2b\chi(R) - |p_1(R)|$, où

$$\chi(R) = \tfrac{1}{8}(\|U\|^2 - \|S\|^2 + \|W\|^2)/\pi^2 , \qquad p_1(R) = \tfrac{1}{4}(\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2)/\pi^2 .$$

Utilisant les inégalités que nous venons d'établir, nous obtenons

$$\begin{aligned} 2(b-1) \sum_{\alpha=1}^{3} \langle W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha\rangle^2 + 2(b-1) \sum_{\alpha=1}^{3} \langle W\Pi_\alpha, \Pi_\alpha^\perp\rangle^2 + b\|U\|^2 - b\|S\|^2 \\ \leq b[\|U\|^2 - \|S\|^2 + \|W\|^2] - |\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2| = 4\pi^2 B . \end{aligned}$$

Si $b > 1$,

$$6(b-1)k^2 + 4(b-1)k \sum_{\alpha=1}^{3} \|SP_\alpha\| + \|U\|^2 - \|S\|^2 \leq 4\pi^2 B ,$$

et

$$6(b-1)k^2 + \|U\|^2 - \|S\|^2 \leq 4\pi^2 B .$$

Utilisons les inégalités portant sur $\|U\|^2$ et $\|S\|^2$ établies au paragraphe II.2. (b)

$$6bk^2 - 6k^2 + \tfrac{1}{6}(1+5k)^2 - \tfrac{3}{2}(1-k)^2 \leq 4\pi^2 B ,$$
$$6bk^2 + \tfrac{2}{3}(-5k^2 + 7k - 2) \leq 4\pi^2 B .$$

Théorème II.13. *Soit M une variété riemannienne compacte orientable de dimension 4 à courbure sectionnelle $\bar{R}$ k-pincée (i.e., il existe $k > 0$ et $A > 0$ tels que, ou $Ak \leq \bar{R} \leq A$, ou $-A\,\bar{R} \leq -Ak$), alors la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M vérifient l'inégalité*

$$|\sigma(M)| \leq \tfrac{2}{3} b(k)\chi(M) ,$$

avec $b(k) = \frac{1}{9}(5k^2 - 7k + 2)/k^2$ et $0 < k \leq \frac{1}{4}$.

Remarque II.14. Considérons le cas où la courbure sectionnelle $\bar{R}$ de M est strictement positive. La courbure de Ricci de M est elle aussistrictement positive. D'après un théorème de S. Bochner (cf. [2]) l'espace des 1-formes harmoniques est alors réduit à $\{0\}$. D'après W. V. D. Hodge (cf. [10]) la dimension b_1 du premier groupe de cohomologie de M est dans ce cas égale à 0. La dualité de Poincaré entraîne alors la nullité de la dimension b_3 du troisième groupe de cohomologie de M. Or nous avons

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 .$$

La variété M étant supposée connexe, $b_0 = b_4 = 1$. Notons d'autre part respectivement $\mathscr{H}_2^+$ et $\mathscr{H}_2^-$ l'espace des deux-formes harmoniques positives et l'espace des deux-formes harmoniques négatives pour un choix d'orientation. Alors si $\dim \mathscr{H}_2^+ = b_2^+$ et $\dim \mathscr{H}_2^- = b_2^-$ noùs avons

$$b_2 = b_2^+ + b_2^- ,$$

et pour l'orientation choisie

$$\sigma(M) = b_2^+ - b_2^- ,$$

d'où

$$0 \leq 2 + 2b_2^+ = \chi(M) + \sigma(M) ,$$
$$0 \leq 2 + 2b_2^- = \chi(M) - \sigma(M) ,$$
$$|\sigma(M)| \leq \chi(M) - 2 .$$

Le théorème n'a donc d'intérêt, si $\bar{R} > 0$, que lorsque $b(k) < \frac{3}{2}(\chi(M) - 2)/\chi(M)$.

La restriction précédente étant liée à la nullité de b_1, il serait intéressant de savoir s'il existe des variétés dont la courbure $\bar{R}$ est négative et pour lesquelles $b_1 = 0$.

Remarque II.15. Lorsque k tend vers 0, $b(k)$ tend vers l'infini. Lorsque $k = \frac{1}{4}$, on retrouve la proposition II.9.

Corollaire II.16. *Sur la somme connexe $n \,\sharp CP^2$, il n'existe pas de métrique à courbure sectionnalle k-pincée,* $0,225 \leq k \leq 1$, *dès que*

$$n > \frac{20k^2 - 28k + 8}{17k^2 + 14k - 4} .$$

Donnons quelques valeurs numériques:

$$\chi(CP^2) = 3 , \qquad \chi(n \,\sharp CP^2) = n + 2 ,$$
$$\sigma(CP^2) = 1 , \qquad \sigma(n \,\sharp CP^2) = n .$$

En particulier

$$\chi(5 \,\sharp CP^2) = 7 , \qquad \sigma(5 \,\sharp CP^2) = 5 .$$

Lorsque k prend la valeur $0,245$ on a

$$\sigma(5 \,\sharp CP^2) \simeq \tfrac{2}{3} b(k) \chi(5 \,\sharp CP^2) .$$

Il n'existe donc pas de métrique 0, 245-pincée sur $5 \,\sharp CP^2$. Lorsque $b(k) = \frac{5}{4}$ (i.e., $k \simeq 0,236$) on obtient la condition

$$n > \tfrac{5}{6}(n + 2) .$$

Donc pour $n \geq 11$ il n'existe pas de métrique 0, 236-pincée sur $n \,\sharp CP^2$.

Références

[1] M. Berger, P. Gauduchon & E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne,* Lecture Notes in Math. Vol. 194, Springer, Berlin, 1971.

[2] S. Bochner, *Vectors fields and Ricci curvature,* Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946) 776–797.

[3] S. S. Chern, *On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20** (1955) 117–126.

[4] N. Hitchin, *On compact four-dimensional Einstein Manifolds,* J. Differential Geometry **9** (1974) 435–442.

[5] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* vol. II, Interscience, New York, 1969.

[6] R. S. Kulkarni, *On the Bianchi Identities,* Math. Ann. **199** (1972) 175–204.

[7] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **257** (1963) 7–9.

[8] I. M. Singer & J. A. Thorpe, *The curvature of four-dimensional Einstein-spaces,* Global Analysis Papers in Honor of K. Kodaira, Princeton University Press, Princeton, 1969, 335–365.

[9] J. A. Thorpe, *Some remarks on the Gauss-Bonnet integral,* J. Math. Mech. **18**

(1969) 779–786.
[10] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups,* Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.
[11] H. Weyl, *Classical groups,* Princeton University Press, Princeton, 1939.
[12] S. T. Yau, *Curvature restrictions on four manifolds,* preprint.

FACULTE DES SCIENCES
F 37200, TOURS;
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
F 91128, PALAISEAN CEDEX