J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
12 (1977) 301-317

VARIETES DE TYPE SURJECTIF ET VARIETES PARTIELLEMENT PARALLELISABLES

PAUL GAUDUCHON

INTRODUCTION

Au paragraphe 13 de [7], A. Lichnerowicz démontre qu'une "*variété kählérienne compacte à première classe de chern non-négative est fibrée analytiquement au-dessus de sa variéte d'Albanese.*"

Un des buts du présent article est d'étendre ce résultat en supprimant l'hypothèse *kählérienne*. Plus précisément, nous attachons à une variété hermitienne compacte (M, g) sa connexion canonique ou connexion de chern, á partir de laquelle est construite le tenseur de Ricci hermitien. Ceci étant posé, l'extension proposée est possible (*Théorème de fibration* du § 6) au prix des pertes suivantes:

(a) Le groupe structural de la fibration analytique ne peut plus, en général, être réduit à un sous-groupe discret de la composante connexe de l'identité du groupe des automorphismes analytiques de M.

(b) L'hypothèse: "*à première classe de chern non-négative*" doit être remplacée par celle-ci: "*la variété admet une métrique hermitienne à tenseur de Ricci hermitien non-négatif*". Si (M, g) est kählérienne, le tenseur de Ricci hermitien coïncide avec le tenseur de Ricci usuel (riemannien); la seconde hypothèse dans ce cas implique la première, mais l'inverse n'est pas vrai car un représentant de la premiére classe de chern peut être nonnégatif qui n'est le tenseur de Ricci d'aucune métrique hermitienne sur M.

Ainsi, sur ces deux points, la situation kählérienne reste plus riche que le cas hermitien général.

Par ailleurs, les variétés hermitiennes (compactes) à tenseur de Ricci non-négatif appartiennent à une famille de variétés plus vaste pour lesquelles le *théorème de fibration analytique* reste vrai; c'est d'ailleurs dans ce cadre que nous le démontrerons au § 6. Ces variétés que nous appelerons *variétés de type surjectif*, comptent dans leur rang, outre celles que nous avons déjà mentionnées, les variétés complexes compactes homogènes.

A leur tour, les variétés de type surjectif entrent dans le cadre plus vaste des *variétés partiellement parallèlisables*, qui sont des variétés M dont le fibré tangent holomorphe est partiellement trivialisé par des champs de vecteurs à dérivée covariante nulle pour une certaine structure hermitienne sur M; la

Communicated by A. Lichnerowicz, May 24, 1975, and, in revised form, July 8, 1976.

situation est décrite par le *théorème de parallèlisme partiel* du § 8. Les variétés compactes complètement parallèlisables analytiquement sont des cas-limites dans cette famille et quelques unes de leurs propriétés sont redémontrées de façon nouvelle aux paragraphes 7 et 8 comme applications des théorèmes généraux portant sur les variétés partiellement parallélisées ou sur les variétés de type surjectif.

Dans tout le texte, *M est une variété complexe, compacte, connexe, de dimension (complexe) n, munie d'un point-base* z_0 fixé une fois pour toute.

Le *fibré tangent holomorphe* est noté $\mathscr{T}(M)$ (ou $\mathscr{T}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité), de fibre $\mathscr{T}_z(M)$ ou $\mathscr{T}_z$ au point z de M ; $\mathscr{T}_z$ est l'espace vectoriel complexe des vecteurs de type $(1,0)$ en z.

Le *fibré cotangent holomorphe* et ses éléments sont notés de façon analogue en remplaçant $\mathscr{T}$ par T ; T_z est l'espace vectoriel (complexe) des 1-formes de type $(1,0)$ en z.

Un *champ de vecteurs holomorphe* est une section holomorphe globale de $\mathscr{T}$, une 1-*forme holomorphe* une section holomorphe globale de T.

Les deux adjectifs "holomorphes" et "analytique" sont synonymes.

I. LES FORMES D'ALBANESE D'UNE VARIÉTÉ COMPLEXE COMPACTE

1. Rappels concernant la construction du tore d'Albanese

Nous rappelons brièvement la construction du tore (ou variété) d'Albanese de M ; cf. [1] ou [7].

Dans toute la suite du texte, H désigne l'espace des 1-formes holomorphes de M, B celui des 1-formes holomorphes *fermées*, de dimension complexe p.

A tout chemin γ (que nous pouvons supposer C^∞ par morceaux) de M, d'origine z_0 et d'extrémité z, nous associons l'élément $\tilde{\gamma}$ de B^*, dual complexe de B, défini par

$$(1) \qquad \tilde{\gamma}(\beta) = \int_\gamma \beta \qquad \forall \beta \in B\ .$$

Comme β est fermée, $\tilde{\gamma}$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ (à extrémités liées) ; en particulier, nous définissons un homomorphisme ρ du premier groupe d'homotopie $\pi_1(M, z_0)$ dans B^*, d'image Δ ; comme B^* est commutatif, ρ induit un homomorphisme j du premier groupe d'homologie entière $H_1(M, Z)$ dans B^*, de même image Δ.

Deux chemins quelconques de z_0 à z induisent le même élément de B^*/Δ ; nous notons J_1 l'application ainsi construite de M dans B^*/Δ.

L'espace vectoriel réel engendré par Δ dans B coïncide avec B luimême ;

pour la démonstration de ce fait nous renvoyons à [1]: il revient à dire pour l'essentiel que la partie réelle d'une 1-forme holomorphe fermée, bien que non harmonique, en général, au sens riemannien, est néanmoins caractérisée pour ses périodes; il en résulte aisément la propriété qui vient d'être dite ainsi que l'inégalité

$$2p \leq b_1 ,$$

où b_1 est le premier nombre de Betti de M, i.e., la dimension réelle de $H_1(M, R)$

Suivant [1, p. 165] nous écrivons $\bar{\Delta}$ le plus petit sous-groupe de B^*, contenant Δ et dont la composante connexe de zéro est un sous-espace vectoriel complexe de B. Le quotient $B^*/\bar{\Delta}$ est un tore complexe, le *tore* (ou la *variété*) *d'Albanese* de M, que nous noterons $A(M)$, de dimension complexe m, le *nombre d'Albanese* de M. Bien entendu

$$m \leq p .$$

L'application J de M dans $A(M)$ définie à partir de J_1 est appelée *l'application de Jacobi* [7]; elle jouit de la propriété universelle suivante: *si* $\mu: M \to T$ *est une application analytique de* M *dans un tore complexe* T, *il existe une application affine-unique-de* $A(M)$ *dans* T *qui factorise* μ *par* J.

2. Les formes d'Albanese

La composante connexe de zéro dans $\bar{\Delta}$ est un sous-espace vectoriel complexe D de B^*, défini de façon intrinsèque par la construction précédente. Son annulateur dans B est lui-même défini de façon intrinsèque; nous noterons F ce sous-espace de B et ses éléments seront appelés les *formes d'Albanese* de M.

Soit P la projection de B^* sur F^* correspondant à l'inclusion naturelle de F dans B; par définition de F, D se projette par P sur $0 \in F^*$ et $P(\bar{\Delta}) = P(\Delta)$ est un sous-groupe discret de rang maximum de F; le quotient de F par ce sous-groupe est $A(M)$ *ce qui donne canoniquement* F *comme revêtement universel du tore d'Albanese*; en particulier *la dimension complexe de* F *est égale au nombre d'Albanese* m *de* M.

Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M, π la projection de M sur M, $\tilde{z}_0$ un point-base de $\tilde{M}$ au-dessus de z_0; un élément β de B se relève sur $\tilde{M}$ en une 1-forme holomorphe fermée, égale, par conséquent, à df, où f est holomorphe sur $\tilde{M}$ et définie par β si on lui impose d'être nulle en $\tilde{z}_0$; nous posons alors

$$(2) \qquad \tilde{J}(\tilde{z})(\beta) = f(\tilde{z}) \qquad \forall \beta \in B .$$

Cette application $\tilde{J}$ de $\tilde{M}$ dans B relève J et nous obtenons le diagramme suivant, entièrement commutatif;

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{J}} & B^* & \xrightarrow{P} & F^* \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle p} & \swarrow{\scriptstyle q} & \\ M & \xrightarrow{J} & A(M) & & \end{array}$$

où p et q sont les projections naturelles respectives de B et F sur $A(M)$.

L'introduction de J nous permet d'établir le lemme suivant qui reproduit la formule [7, (5.10)] à condition de substituer F à B.

Lemme. *Soit $\{b^A\}$, $A = 1, \cdots, m$ une base de F, on a*

$$(3) \qquad J_*(X_z) = (b^A(X_z)) \qquad \forall X_z \in \mathscr{T}_z(M) \ ,$$

où le m-uple $(b^A(X_z))$ exprime les composantes de $\bar{q}^1_*(J_*(X_z))$ pour la base duale de F^*.

Démonstration. Cherchons l'image, par $\tilde{J}_*$, d'un vecteur *réel* $\tilde{x}_{\tilde{z}}$ de $\tilde{M}$ en $\tilde{z}$, déterminé par une courbe $\gamma\colon [0, 1] \to \tilde{M}$ telle que $\gamma(0) = \tilde{z}$ et $\dot{\gamma}(0) = \tilde{x}_{\tilde{z}}$; (2) s'écrit

$$\tilde{J}[\gamma(t)](\beta) = f[\gamma(t)] \qquad \forall \beta \in B \ , \ \forall t \in [0, 1] \ ,$$

d'où il résulte, pour l'application tangente $\tilde{J}_*$, en identifiant l'espace tangent (réel) de B^* en $\tilde{J}(\tilde{z})$ à B^* lui-même:

$$\tilde{J}_*(\tilde{x}_{\tilde{z}})(\beta) = df(\tilde{x}_{\tilde{z}}) = \beta(x_z) \qquad \forall \beta \in B \ ,$$

où x_z est la projection de $\tilde{x}_{\tilde{z}}$ par l'isomorphisme ponctuel $(\pi_*)_{\tilde{z}}$. Cette relation s'étend sans modifications de forme aux vecteurs de type $(1, 0)$; pour un tel vecteur $\tilde{X}_{\tilde{z}}$ en $\tilde{z} \in \tilde{M}$, $(P \circ \tilde{J})_*(\tilde{X}_{\tilde{z}})$ est donc defini par

$$(P \circ \tilde{J})_*(\tilde{X}_{\tilde{z}})(\beta) = \beta(X_z) \qquad \forall \beta \in F$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Du lemme résulte la proposition suivante.

Proposition 1. *Les formes d'Albanese de M sont les images réciproques par l'application de Jacobi des* 1*-formes holomorphes de $A(M)$.*

Démonstration. La base duale de $\{b^A\}$ dans F^* induit, par q_*, un système $\{t_A\}$ de m champs de vecteurs holomorphes sur $A(M)$, qui parallèlisent analytiquement le tore complexe et déterminent ainsi un système $\{f^A\}$ de m 1-formes holomorphes, libre en tout point de $A(M)$; une 1-forme holomorphe α sur $A(M)$ s'écrit

$$\alpha = \sum_{A=1}^{m} \alpha_A \cdot f^A \ ,$$

où les α_A sont des nombres complexes. Pour tout $X_z \in \mathscr{T}_z$ on a, compte-tenu de (3),

$$J^*(\alpha)(X_z) = \alpha[J_*(X_z)] = \sum_{A,B=1}^{m} \alpha_A \cdot f^A[b^B(X_z) \cdot t_B] = \sum_{A=1}^{m} \alpha_A \cdot b^A(X_z) ,$$

soit

$$J^*\alpha = \sum_{A=1}^{m} \alpha_A \cdot b^A ,$$

qui démontre la proposition.

3. Le groupe des automorphismes analytiques de M

Nous noterons G' le groupe des automorphismes analytiques de M, G la composante connexe de l'identité e de G'; l'action de G' sur M est notée multiplicativement $g \cdot z \in M$, pour $g \in G'$ et $z \in M$. G' et G sont des groupes de Lie complexes et *l'algèbre de Lie (complexe) de G s'identifie à L, algèbre des champs de vecteurs holomorphes sur M.*

Nous noterons de même G'_A le groupe des automorphismes analytiques de $A(M)$ et G_A la composante connexe de l'élément nul; G_A est isomorphe à $A(M)$: chaque élément γ de G_A est une translation et le résultat de son action sur un point $\xi \in A(M)$ s'écrira additivement $\gamma + \xi \in A(M)$. L'algèbre de Lie L_A de G_A s'identifie à celle des champs de vecteurs holomorphes sur $A(M)$, qui sont les projections par q_* des champs uniformes sur F^*. L'image ζ_0 de z_0 par J est l'élément nul de $A(M)$ identifiée à G_A. L'algèbre de Lie L_A est abélienne.

On déduit aisément de la propriété universelle de J l'existence d'un homomorphisme de groupes $\hat{J}$ de G' dans G'_A uniquement défini par la relation

$$(4) \qquad \hat{J}(g) + J(z) = J(g \cdot z) \qquad \forall g \in G' , \forall z \in M .$$

Nous avons

Proposition 2. *$\hat{J}$ est un morphisme de groupes de Lie complexes de G' dans G'_A.*

Démonstration. Soit X un élément de L; $b^A(X)$ est holomorphe sur M, pour tout $A = 1, \cdots, m$, donc *constant*. Il résulte alors de (3) que $J_*(X)$ *induit* sur $A(M)$ un champ uniforme, i.e., un élément de L_A que nous écrivons encore $J_*(X)$. Nous obtenons ainsi une application J_* de L dans L_A qui s'écrit, avec les notations du paragraphe précédent,

$$(5) \qquad J_*(X) = \sum_{A=1}^{m} b^A(X) \cdot t_A \qquad \forall X \in L .$$

Comme les formes b^A sont fermées, l'image par J_* du crochet $[X, Y]$ de deux éléments quelconques de L est nulle, ce qui revient à dire que J_* *est un morphisme d'algèbres de Lie complexes.*

A J_* est attaché un morphisme local de groupes de Lie complexes : il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de $e \in G$, isomorphe par l'application exponentielle $\exp : L \to G$ à un voisinage $\mathscr{V}$ de $0 \in L$, et une application analytique $\hat{J}_v$ unique de $\mathscr{V}$ dans G_A telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{V} & \xrightarrow{J_*} & L_A \\ \big\downarrow \exp & & \big\downarrow \exp_A \\ V & \xrightarrow{\hat{J}_V} & G_A \end{array}$$

soit commutatif.

Le groupe à 1-paramètre g_t engendré par un champ X de L est égal à $\exp(tX)$; il en résulte l'égalité

$$\exp_A [J_*(X)] + J(z) = J[\exp(X)\cdot z] , \qquad \forall X \in L , \ \forall z \in M ,$$

qui exprime simplement le fait que le groupe à 1-paramètre attaché à $J_*(X)$ est l'image, par J, de celui attaché à $X \in L$. Si X est choisi dans $\mathscr{V}$, nous avons donc, en vertu du diagramme précédent,

$$\hat{J}_V[\exp(X)] + J(z) = J[\exp(X)\cdot z] , \qquad \forall X \in \mathscr{V} , \ \forall z \in M ,$$

ce qui implique, à cause de l'unicité de l'élément $\hat{J}(g)$ défini par (4) :

$$\hat{J}_V(g) = \hat{J}(g) \qquad \forall g \in V .$$

$\hat{J}$ est donc analytique sur un voisinage de l'identité de G', ce qui achève de démontrer prop. 2.

Remarque importante. Il résulte de la démonstration qui vient d'être faite que le morphisme d'algèbres de Lie complexes J_* s'identifie au morphisme $\hat{J}_*$ induit par le morphisme de groupes de Lie complexes $\hat{J}$.

II. LE THÉORÈME DE FIBRATION ANALYTIQUE

4. Les variétés de type surjectif

Soit X un élément de L ; pour tout $\beta \in H$, $\beta(X)$ est un scalaire, holomorphe sur M compacte, donc *constant*. Nous définissons ainsi une application C-linéaire h de L dans le dual complexe de H, et, plus généralement, dans le dual complexe de tout sous-espace complexe, en particulier F, l'espace des formes d'Albanese de M.

Le noyau de $h : L \to F^*$ sera noté K, c'est *aussi l'annulateur de F dans L*, i.e., l'ensemble des champs X de L tels que $\beta(X) = 0$, $\forall \beta \in F$.

Le dual complexe du co-noyau de h est le noyau de l'application transposée $h^* : F \to L^*$, i.e., *l'annulateur* F_0 *de* L *dans* F.

Definition. Une variété complexe, compacte M telle que $F_0 = \{0\}$, i.e., telle qu'aucune forme d'Albanese, en dehors de la forme nulle, n'annule l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes de M, est dite *variété de type surjectif*.

Note. Au lieu de "variété de type surjectif", nous disions, dans [4], "variété vérifiant la conditition (A)".

M est de type surjectif si et seulement si $h: L \to F^*$ est surjective. Dans ce cas, l'application induite de L/K sur F^* est un C-isomorphisme et *il existe un C-isomorphisme naturel de tout supplémentaire complexe L_1 de K dans L sur* F^*. Plus précisément, nous avons

Proposition 3. *Soit $\{b^A\}$, $A = 1, \cdots, m$, une base de l'espace F de formes d'Albanese de M; si celle-ci est de type surjectif, il existe sur elle un système dual (non uniquement déterminé) du m champs de vecteurs holomorphes $\{X_A\}$, tel qu'en tout point de M, on ait*

$$(6) \qquad b^A(X_B) = \delta^A_B \qquad \forall A, B = 1, \cdots, m ,$$

où δ^A_B est l'indice de Kronecker égal à 1 si $A = B$, et nul dans le cas contraire.

Un tel système détermine un supplémentaire complexe L_1 de K dans L, et inversement, tout supplémentaire complexe L_1 de K dans L possède une et une seule base duale de $\{b^A\}$.

Remarque 1. Une forme d'Albanese non nulle d'une variété M de type surjectif *ne peut s'annuler sur M*, faute de quoi elle devrait appartenir à F_0; de la même façon, *aucun élément de L_1 ne peut s'annuler sur M* comme on le voit immédiatement à partir de la proposition 3; c'est dire, de façon équivalente, que, *pour tout point z de M*, Les $\{b^A\}(z)$ et les $\{X_A(z)\}$ forment une *base* de $T_z(M)$ et $\mathscr{T}_z(M)$ respectivement; de façon équivalente encore: pour $z \in M$ fixé quelconque, les champs de L_1 et les formes d'Albanese sont uniquement déterminés par leur valeur en z.

Remarque 2. L'espace F ne joue encore dans ce paragraphe aucun rôle particulier; si Q est un sous-espace complexe quelconque de H, nous définissons de façon identique K_Q, l'annulateur de Q dans L (avec $K_F = K$) et Q_0, l'annulateur de L dans Q et nous avons l'égalité entre dimensions complexes, valable pour tout sous-espace Q:

$$(7) \qquad \dim L - \dim K_Q = \dim Q - \dim Q_0 .$$

Si $Q_0 = \{0\}$, la variété M sera dite *partiellement parallélisée relativement à* Q (cf. Chapitre III); *pour une telle variété la proposition* 3 *reste vraie mutatis mutandis*.

Remarque 3. Les formes d'Albanese sont fermées; K est donc un *idéal* de L, et, même, l'algèbre dérivée $[L, L]$ est inclue dans K. Dans certains cas, (cf. Remarque 1 du § 5), il est possible de faire choix d'un L_1 qui soit un sous-algèbre de Lie de L; L_1 est alors nécessairement abélienne, puisque $[L_1, L_1] \subset L_1 \cap K$. Un tel choix n'est pas possible en général comme nous pouvons le voir à partir de l'exemple suivant: M est le quotient du groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & z^1 & z^2 \\ 0 & 1 & z^3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{où } (z^1, z^2, z^3) \in C^3, \text{ par l'action, à droite },$$

du sous-groupe constitué de telles matrices dont les éléments sont des entiers de Gauss; cette variété est complètement parallélisée par trois 1-formes holomorphes [6, p. 115] $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ avec

$$d\theta^1 = d\theta^3 = 0 , \qquad d\theta^2 = \theta^1 \wedge \theta^2 .$$

En particulier, M n'est pas kählérienne. Par ailleurs il est facile de voir que le premier membre de Betti b_1 de M vaut 4, de sorte que, bien que M ne soit pas kählérienne, nous avons néanmoins l'égalité

$$b_1 = 2p ,$$

d'où il résulte que le nombre d'Albanese m est lui-même égal à $p = 2$; l'espace F coïncide avec B et est engendré par θ^1 et θ^3. Comme le fibré tangent holomorphe est trivial, F_0 est réduit à $\{0\}$; l'idéal K est de dimension complexe 1. Soit L_1 un supplémentaire *quelconque* de K dans L; θ^2 étant fixée, il est possible (proposition 3) de choisir Y en Z dans L_1 tels que $\theta^1(Y) = \theta^3(Z) = 1$ et $\theta^1(Z) = \theta^3(Y) = 0$; pour ces deux champs

$$\theta^2([Y, Z]) = -d\theta^2(Y, Z) = -1 .$$

Ce qui montre que $[L_1, L_1] \neq 0$; L_1 n'est donc pas une sous-algèbre de Lie de L.

5. Exemples de variétés de type surjectif

Une variété complexe compacte M complètement parallélisable analytiquement est de type surjectif: H_0 — et F_0 a fortiori—est réduit à $\{0\}$, car une forme $\beta \in H$ qui annule l'ensemble des $X \in L$, annule l'ensemble des $X_z \in \mathscr{T}_z(M)$, $\forall z \in M$.

Plus largement, les deux familles suivantes sont de type surjectif:

A. *Les variétés complexes homogènes compactes*. Ce sont les variétés M sur lesquelles G opère transitivement; l'algèbre de Lie L est alors ellemême transitive: pour $z \in M$ quelconque et tout $X_z \in \mathscr{T}_z(M)$, il existe $X \in L$, tel que $X(z) = X_z$. H_0 est donc réduit à $\{0\}$ et F_0 a fortiori:

Proposition 4. *Une variété complexe compacte homogène est de type surjectif (et même partiellement parallélisée relativement à H).*

B. *Les variétés admettant une structure hermitienne à tenseur de Ricci hermitien non-négatif.* Le tenseur de Ricci hermitien d'une variété hermitienne (M, g) est construit comme suit: la métrique riemannienne g, induit une métrique hermitienne fibrée h sur le fibré tangent holomorphe $\mathscr{T}(M)$; à h est attachée une connexion canonique (unique) sur $\mathscr{T}(M)$; cette connexion, étendue au fibré tangent complexifié de M, est la *connexion de Chern* de (M, g); elle est représentée localement par une matrice ω de 1-formes; relativement à un repère local *holomorphe* de $\mathscr{T}(M)$, par rapport auquel h est représenté par une matrice également notée h, ω s'écrit

$$\omega = d'h \cdot h^{-1} . \tag{8}$$

La courbure de la connexion de Chern est la 2-forme Ω de type $(1, 1)$ à valeurs dans le fibré $\mathscr{T}(M) \otimes T(M)$, qui s'écrit localement

$$\Omega = d''\omega .$$

Le tenseur de Ricci hermitien R de (M, g) est, *par définition, la trace relative à g de Ω*, soit

$$R_\alpha^\beta = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} g^{\lambda\bar{\mu}} \cdot \Omega_{\alpha\lambda\bar{\mu}}^\beta , \qquad \forall \alpha, \beta = 1, \cdots, n .$$

Ce tenseur de Ricci hermitien n'est autre que l'opérateur K'' de [3] lorsqu'à $\mathscr{T}(M)$ est substituée un fibré vectoriel holomorphe quelconque E sur M, muni d'une métrique fibrée hermitienne.

R est un endomorphisme hermitien de $\mathscr{T}(M)$, de sorte que $h(R(x_z), x_z)$ est réel pour tout $X_z \in \mathscr{T}_z(M)$ et tout $z \in M$; si ce scalaire défini sur $\mathscr{T}(M)$ est positif ou nul, nous dirons que *le tenseur de Ricci hermitien de (M, g) est non-négatif.*

En [3], nous avons montré ceci: *si le tenseur de Ricci hermitien de (M, g) est non-négatif, le champ de vecteur associé à toute 1-forme holomorphe sur M par dualité riemanienne est lui-même holomorphe*; *en outre, toutes les 1-formes holomorphes sur une telle variété sont à dérivée covariante nulle pour la connexion de Chern.*

Si $\beta \in H$ appartient à H_0, le champ de vecteur $\bar{\sigma}_g^1(\beta)$ dual par dualité riemanienne est orthogonal, dans l'espace vectoriel complexe $\mathscr{A}^0(\mathscr{T}(M))$ des sections C^∞ de $\mathscr{T}(M)$ muni du produit scalaire global $\langle \, , \, \rangle$ induit par g (cf. [3]), au sous-espace $L \subset \mathscr{A}^0(\mathscr{T}(M))$; comme $\bar{\sigma}_g^1(\beta) \in L$, dans la situation envisagée, il est nul, ainsi que β. Nous avons donc montré

Proposition 5. *Une variété complexe compacte admettant une structure hermitienne à tenseur de Ricci hermitien non-négatif est de type surjectif (et, même, partiellement parallélisé relativement à H).*

Remarque 1. Pour une telle variété (M, g) à R non-négatif, il est possible de choisir pour L_1, l'espace $\bar{\sigma}_g^1(F) \subset L$, dont tous les éléments sont, avons-nous rappelé, à dérivée covariante nulle pour la connexion de Chern. *Si* (M, g) *est kählérienne*, la connexion de Chern coïncide avec la connexion riemanienne, i.e., n'a pas de torsion; autrement dit le crochet de deux champs de vecteurs à dérivée covariante nulle est nul et L_1 *est une sousalgèbre de Lie abélienne* de L; le tenseur de Ricci hermitien coïncide ici avec le tenseur de Ricci usuel (riemannien): une variété kählérienne compacte à tenseur de Ricci non-négatif entre donc dans le cadre plus large des variétés kählérienne à première classe de Chern non-négative étudiées en [7]; pour ces variétés il est encore possible de faire choix d'un L_1 abélien qui ne peut toutefois s'écrire, en général, sous la forme $\bar{\sigma}_g^1(B)$ pour aucune métrique g, kählérienne ou non, de M.

Remarque 2. Si la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ d'une variété compacte M n'est pas nulle, M n'admet aucun champ de vecteur continu—et a fortiori, holomorphe—dépourvu de zéro sur M; dans ce cas, pour tout sous-espace Q de H, l'annulateur Q_0 de L dans Q coïncide avec Q lui-même; nous avons donc, compte-tenu des propositions 4 et 5,

Proposition 6. *Soit M une variété complexe, compacte, de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle.*

(a) *Si M est de type surjectif, l'unique forme d'Albanese sur M est la forme nulle.*

(b) *Si M est homogène ou si M admet une structure hermitienne à tenseur de Ricci non-négatif elle ne possède aucune* 1*-forme holomorphe en dehors de la forme nulle.*

Bien entendu le résultat est tout autre si $\chi(M)$ est nul; les tores complexes sont des exemples de variétés qui entrent à la fois dans la catégorie A et la catégorie B et pour qui les espaces F, B et H coïncident et diffèrent de $\{0\}$.

La proposition 6 montre a contrario qu'une surface de Riemann de genre supérieur à 1 *n'est pas* de type surjectif, contrairement á celles de genre 0 et 1.

6. Le théorème de fibration analytique

Théorème de fibration analytique. *Une variété de type surjectif M est fibrée analytiquement, par l'application de Jacobi, au-dessus de son tore d'Albanese. Le groupe structural de la fibration est un sous-groupe du noyau Γ de $\hat{J}$ dans G. La fibre est une sous-variété complexe, compacte, connexe, de M.*

La démonstration de ce théorème se fait au moyen de trois lemmes.

Lemme 1. *J est de rang constant $2m$.*

Nous rappelons que m est la dimension complexe du tore d'Albanese $A(M)$; comme M est de type surjectif il existe, sur tout supplémentaire L_1 de K, une base $\{X_A\}$ unique, duale d'une base donnée $\{b^A\}$ de F (proposition 3); l'espace L_1 et la base $\{X_A\}$, $A = 1, \cdots, m$, seront fixés une fois pour toute.

Pour $z \in M$ quelconque, le sous-espace $L_1(z)$ de $\mathscr{T}_z$ des valeurs en z des champs de L_1 est de dimension m et à tout $X_z \in L_1(z)$ correspond un champ *unique* X de L_1 tel que $X(z) = X_z$ (cf. remarque 1 du § 4); $J_*(X_z)$ est donc nul, dans le cas seul où le champ uniforme $J_*(X)$ sur $A(M)$ est nul, soit encore, en vertu de (5), si X est un élément de K; comme $K \cap L_1 = \{0\}$, X est alors nul, ainsi que $X_z = X(z)$. La restriction de J_* à $L_1(z)$ est donc injective; c'est donc, pour des raisons de dimension, un isomorphisme de $L_1(z)$ sur $\mathscr{T}_{J(z)}(A(M))$ ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Lemme 2. *J est surjective.*

De la démonstration du *lemme* 1 et de la *Remarque importante* du § 3, nous déduisons immédiatement que $\hat{J}_*: L \to L_A$ est surjective ainsi donc que $\hat{J}: G \to G_A$.

G_A est transitif sur $A(M)$: pour $\forall \zeta \in A(M)$, il existe un $\gamma \in G_A$ unique tel que $\zeta = \gamma + \zeta_0$; si $g \in G$ est tel que $J(g) = \gamma$, on a, grâce à (4)

$$J(g \cdot z_0) = \hat{J}(g) + J(z_0) = \gamma + \zeta_0 = \zeta\ ,$$

qui démontre le lemme 2.

Lemme 3. *$\hat{J}$ possède un relèvement analytique local σ au voisinage de* $0 \in G_A$.

Considèrons, dans G_A, un voisinage U de zéro, analytiquement isomorphe, par $\exp_A^{-1}$, à un voisinage $\mathscr{U}$ de zéro dans L_A; nous pouvons supposer $\mathscr{U}$ symétrique i.e., tel que $-\mathscr{U}$ coïncide avec $\mathscr{U}$ et donc $-U$ avec U.

La restriction de $\hat{J}_*$ à L_1 est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes de L_1 sur L_A que nous noterons I_1.

L'application $\sigma = \exp \circ I_1^{-1} \circ \exp_A^{-1}|_U$ de U dans G est analytique et vérifie

$$\hat{J} \circ \sigma(\gamma) = \gamma \qquad \forall \gamma \in U\ , \tag{9}$$

en raison de la relation de commutation

$$\hat{J} \circ \exp = \exp_A \circ \hat{J}_*\ ,$$

qui lie $\hat{J}$ et le morphisme d'algèbres de Lie $\hat{J}_*$ dérivé. Ceci achève la démonstration du lemme 3.

Dans le cas général où L_1 n'est pas une sous-algèbre de Lie complexe de L et où, par conséquent, $\exp(L_1) = G_1$ n'est pas un sous-groupe de Lie de G, le relèvement local σ ne respecte pas les structures de groupe, mais il vérifie néanmoins, comme on le voit immédiatement sur la formule de définition, la relation

$$\sigma(-\gamma) = \sigma^{-1}(\gamma) \qquad \forall \gamma \in U\ . \tag{10}$$

Démonstration du théorème. Soit ζ_I un point quelconque de $A(M)$, et considèrons le voisinage $U_I = U + \zeta_I$ de ζ_I où U est le voisinage de 0 dans G_A qui apparait dans la démonstration du lemme 3. Soit Φ_I l'application de $\bar{J}^1(U_I)$ dans $U_I \times \bar{J}(\zeta_I)^1$ construite de la façon suivante: pour $z \in \bar{J}^1(U_I)$ nous posons

$$\Phi_I(z) = (\zeta, \bar{\sigma}^1(\gamma)\cdot z) \qquad \forall z \in \bar{J}^1(U_I) ,$$

où $\zeta \in U_I$ est la projection $J(z)$ de z sur $U_I \subset A(M)$ et où γ est l'élément unique de U tel que

$$\zeta = \gamma + \zeta_I \tag{11}$$

Il résulte immédiatement de (9) et de (10) que $\bar{\sigma}^1(\gamma)\cdot z$ appartient effectivement à $\bar{J}^1(\zeta_I)$.

L'application Φ_I, produit de deux applications analytiques, est elle-même analytique, de même que l'application Ψ_I de $U_I \times \bar{J}^1(\zeta_I)$ dans $\bar{J}^1(U_I)$ définie par

$$\Psi_I(\zeta, z) = \sigma(\gamma)\cdot z \qquad \forall\zeta \in U_I \ , \ \forall z \in \bar{J}^1(\zeta_I) \ ,$$

où γ est l'élément unique de U défini par (11). On voit grâce à (9) que $\sigma(\gamma)\cdot z$ appartient à $\bar{J}^1(\zeta)$ et que Ψ_I est l'inverse de Φ_I. *Φ_I est ainsi un isomorphisme analytique de $\bar{J}^1(U_I)$ sur $U_I \times \bar{J}^1(\zeta_I)$.*

Comme $A(M)$ est compact, le recouvrement $\{U_I\}$, indexé sur $A(M)$ luimême, peut être ramené à un sous-recouvrement fini $\{U_i\}$, $i = 1, \cdots, N$. Par ailleurs, il résulte de (4) que tout élément $g \in G$ envoie une fibre de J sur une autre; comme J est surjectif, G opèrant de fibres à fibres est donc *transitif*: pour tout $i = 1, \cdots, N$, nous pouvons faire choix d'un $g_i \in G$, non uniquement déterminé, qui envoie $\bar{J}^1(\zeta_i)$ sur $M_0 = \bar{J}^1(\zeta_0)$. Nous obtenons ainsi un recouvrement fini de $A(M)$ par des ouverts U_i, $i = 1, \cdots, N$ avec, pour chaque ouvert, un isomorphisme analytique $h_i = (\mathrm{Id} \times g_i) \circ \Phi_I$ de $\bar{J}^1(U_i)$ sur $U_i \times M_0$; *J est donc une fibration analytique, de fibre type $M_0 = \bar{J}^1(\zeta_0)$.*

Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $h_j \circ \bar{h}_i^1$ est un automorphisme de M_0 induit par un élément de G qui respecte les fibres de J, c'est à dire un élément de Γ; *le groupe structural de la fibration analytique est donc un sous-groupe de Γ.*

La fibre-type M_0 est une sous-variété complexe de M, fermée dans M donc *compacte*; pour montrer qu'elle est *connexe* il suffit de reproduire le raisonnement de [7, p. 64]: comme M_0 est compacte, le nombre de ses composantes connexes est fini; la variété obtenue à partir de M en assimilant les points d'une même composante connexe d'une fibre de J est, en vertu de ce qui a déjà été démontré, un recouvrement analytique fini de $A(M)$, donc un tore complexe de même dimension m; la propriété universelle de J implique alors que ce revêtement fini ne peut être que l'identité.

Ceci achève la démonstration du théorème de fibration analytique.

Corollaire 1. *Une variété complexe compacte homogène est fibrée analyti-*

quement au-dessus de son tore d'Albanese par l'application de Jacobi.

Corollaire 2. *Une variété complexe compacte admettant une structure hermitienne à tenseur de Ricci non-négatif est fibrée analytiquement au-dessus de son tore d'Albanese par l'application de Jacobi.*

Remarque 1. Dans le corollaire 1, nous retrouvons un théorème connu, figurant dans [2].

Pour les rapports du corollaire 2 avec [7], voir la remarque 1 du § 3 et l'Introduction.

Remarque 2. Dans le cas où M est une variété kählérienne, à première classe de Chern non-négative, il est montré dans [7], que l'application de Jacobi est encore une fibration analytique et le groupe structural est réductible à un sous-groupe discret de G, admettant un nombre fini de générateurs. Une telle réduction semble impossible dans le cadre général des variétés de type surjectif et même dans celui des variétés hermitiennes à tenseur de Ricci hermitien non-négatif.

III. LE THÉORÈME DE PARALLÈLISME PARTIEL

7. Les variétés partiellement parallèlisables

Nous rappelons la définition de la Remarque 2 du § 4.

Définition. Soit Q un sous-espace complexe de H, l'espace des 1-formes d'une variété complexe, compacte, M; M sera dite *partiellement parallélisée relativement à Q*, si l'annulateur Q_0 de L dans Q est réduit à $\{0\}$.

Si $Q_0 = \{0\}$, aucune forme non-nulle de Q n'a de zéro sur M. *Supposons, inversement que l'espace Q possède cette dernière propriété*; sa dimension complexe q est alors inférieure ou égale à n et il induit sur M un sous-fibré holomorphe (trivial) de T, Q avec la suite exacte

$$0 \to Q \to T \to (T/Q) \to 0$$

et la suite exacte duale

$$(\mathrm{S}) \qquad 0 \to \mathscr{D}_Q \to \mathscr{T} \to \mathscr{M} \to 0$$

où $\mathscr{D}_Q = (T/Q)^*$ est le sous-fibré holomorphe de $\mathscr{T}$ dont la fibre en z est le sous-espace des vecteurs de $\mathscr{T}_z$ annulés par les éléments de Q_z; le fibré quotient $\mathscr{M}$, anti-isomorphe à Q est, de ce fait, analytiquement trivial.

Definition. Un sous-espace complex Q de H est dit *distributif* si aucun de ses éléments en dehors de zéro ne s'annule sur M.

Proposition 7. *Soit Q un sous-espace distributif de H, de dimension complexe q, sur une variété complexe, compacte M. La suite exacte associée de fibrés holomorphes*

$$(\mathrm{S}) \qquad 0 \to \mathscr{D}_Q \to \mathscr{T} \to \mathscr{M} \to 0$$

se scinde analytiquement si et seulement si M est partiellement parallèlisée relativement à Q.

Demonstration. Supposons que Q soit tel que $Q_0 = \{0\}$. La proposition 3 vaut aussi bien pour n'importe quel sous-espace Q de H (cf. remarque 2 du § 4) ; soit donc L_1 un sous-espace complexe supplémentaire de K_Q dans L ; L_1 induit un sous-fibré analytique $\mathscr{L}_1$ de $\mathscr{T}$, dont la fibre en $z \in M$ est l'espace $L_1(z)$ des valeurs en z des champs de L_1, de dimension complexe q, et qui possède q sections holomorphes globales, libres en tout point de M, qui sont les $\{X_A\}$ de la proposition 3 ; *$\mathscr{L}_1$ est donc analytiquement trivial.* Les deux sous-fibrés $\mathscr{D}_Q$ et $\mathscr{L}_1$ sont supplémentaires, car leur intersection se réduit à M et la somme de leurs dimensions fibrées est n; *la suite exacte* (*S*) *est donc analytiquement scindée.*

Inversement, soit Q un sous-espace distributif de H tel que la suite exacte (S) soit scindée analytiquement; il existe donc un sous-fibré holomorphe $\mathscr{L}_1$ de $\mathscr{T}$, supplémentaire de $\mathscr{D}_Q$ et isomorphe à $\mathscr{M}$, donc *analytiquement trivial* en vertu du lemme; l'espace L_1 des sections holomorphes de $\mathscr{L}_1$ est donc un sous-espace de L *de dimension* q, tel que

$$L_1 \cap K_Q = \{0\} \; .$$

De (7), nous concluons alors pour des raisons de dimension, que $Q_0 = \{0\}$.

Remarque 1. Supposons que F lui-même soit distributif, i.e., qu'aucune forme d'Albanese non nulle n'a de zéro sur M; il existe un systéme de m champs holomorphes locaux $\{X_A\}$, dual d'une base donnée $\{b^A\}$ de F, sur un voisinage U de tout point z de M; il résulte alors de (3) que *l'application de Jacobi est partout de rang maximum* $2m$. Le lemme 1 du § 6 est donc vrai avec la seule hypothèse: "*F* distributif"; mais l'hypothèse plus forte de surjectivité est nécessaire pour les lemmes 2 et 3.

Remarque 2. Si Q est distributif avec $q = n$, les fibrés $\mathscr{T}$ et T sont analytiquement triviaux, Q coïncide avec H et la suite (S) est trivialement scindée analytiquement.

Si une telle situation se produit avec $Q = F, M$ est alors de type surjectif, donc fibrée analytiquement, par J, au-dessus d'un tore complexe de même dimension, *à fibre connexe*: *l'application de Jacobi est donc un isomorphisme analytique de M sur son tore d'Albanese.*

Une telle conclusion ne vaut pas en général si nous supposons seulement que $\mathscr{T}$ (et $T = \mathscr{T}^*$) est analytiquement trivial, car m peut encore dans ce cas être inférieur à n (cf. exemple de la remarque 3 du § 4) ; toutefois, *si M est kählérienne* et *compacte*, *complètement parallélisée analytiquement, F* coïncide avec H et *J est alors un isomorphisme analytique de M sur son tore d'Albanese.* Nous retrouvons ainsi, comme corollaire de la proposition 7 et du théorème de fibration analytique un résultat connu de H. C. Wang [8]. Cf. aussi le corollaire 3 du *théorème de parallélisme partiel* du § 8.

8. Le théorème de parallélisme partiel

Le théorème que nous allons maintenant démontrer justifie a posteriori le terme "partiellement parallélisée" que nous avons adopté pour une variété à $Q_0 = \{0\}$.

Théorème de parallélisme partiel. *Sur une variété complexe compacte partiellement parallélisée relativement à un sous-espace Q de H, de dimension complexe q, il existe une famille de sous-espace L_1 de L, de dimension complexe q, dont aucun élément, en dehors du champ nul, n'est annulé par l'ensemble des formes de Q. Pour tout L_1 de cette famille, il existe une structure hermitienne g (non uniquement déterminée) telle que les champs de L_1 soient parallèles pour la connexion de chern associée à g.*

Démonstration. La première partie du théorème est une redite de la proposition 3, compte-tenu de la remarque 2 du § 4: la famille des L_1 est l'ensemble des supplémentaires complexes de K_Q dans L.

Un tel L_1, quelconque par ailleurs, détermine (cf. démonstration de la proposition 7), un sous-fibré holomorphe $\mathscr{L}_1$ de $\mathscr{T}$ qui scinde la suite exacte (S), i.e., tel que

$$\mathscr{T} = \mathscr{D}_Q \oplus \mathscr{L}_1 .$$

Soient p_1 et p_2 les projections de $\mathscr{T}$ sur $\mathscr{D}_Q$ et $\mathscr{L}_1$ respectivement, liées à cette décomposition.

A partir d'une structure hermitienne (M, g) quelconque sur M, nous construisons une nouvelle structure hermitienne $(M, \tilde{g})$ définie comme suit, par la donnée de la métrique fibrée hermitienne associée $\tilde{h}$ sur le fibré $\mathscr{T}$:

$$\tilde{h}(X_z, Y_z) = h[p_1(X_z), p_1(Y_z)] + H[p_2(X_z), p_2(Y_z)] , \qquad \forall X_z , Y_z \in \mathscr{T}_z . \tag{12}$$

Dans cette relation, h est la métrique hermitienne fibrée sur $\mathscr{T}$ associée à g et H est un produit scalaire hermitien quelconque sur L_1; le deuxième terme du second membre de (12) doit s'entendre comme le produit scalaire—par H—des deux champs de L_1 uniquement déterminés par leurs valeurs en z respectives X_z et Y_z.

Soient $\{X_i\}$, $i = 1, \cdots, (n - q)$ un repère holomorphe local, au voisinage de $z \in M$, du sous-fibré $\mathscr{D}_Q$ et $\{X_a\}$, $a = 1, \cdots, q$ une base de L_1; l'ensemble $\{X_i\}$, $\{X_a\}$, constitue, au voisinage de $z \in M$, un repère holomorphe local de $\mathscr{T}$. Dans ce repère, nous avons, avec des notations évidentes,

$$\tilde{h}_{i\bar{j}} = h_{i\bar{j}} , \quad \tilde{h}_{a\bar{b}} = H_{a\bar{b}} , \quad \tilde{h}_{i\bar{a}} = \tilde{h}_{a\bar{j}} = 0 ,$$

d'où il résulte pour les matrices ω et $\tilde{\omega}$ des connexions de Chern liées respectivement à h et $\tilde{h}$ par (8):

$$\tilde{\omega}_i^j = \omega_i^j , \quad \tilde{\omega}_a^b = 0 , \quad \tilde{\omega}_i^b = \tilde{\omega}_a^j = 0 .$$

Soit $\tilde{\nabla}$ l'opérateur "dérivée covariante" de la connexion de chern relative à $\tilde{g}$; un champ X de L_1 s'écrit $\sum_{a=1}^{q} A^a \cdot X_a$, où A^a sont des constantes complexes.

Nous avons donc, dans le même repère local que précédemment,

$$\tilde{\nabla} X = \sum_{a=1}^{q} A^a \cdot \tilde{\nabla} X_a = \sum_{a,b=1}^{q} A^a \cdot \omega_a^b \cdot X_b + \sum_{a=1}^{q} \sum_{i=1}^{n-q} A^a \cdot \omega_a^i \cdot X_i \,, \qquad \forall X \in L_1 \,,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Nous avons, *avec les mêmes hypothèses*,

Corollaire 1. *La restriction à $\mathscr{L}_1$ de la courbure de chern Ω liée à g est nulle*:

$$\tilde{\Omega}(X_z, \bar{Y}_z) \cdot Z_z = 0 \,, \qquad \forall Z_z \in \mathscr{L}_1(z) \,, \forall X_z, Y_z \in \mathscr{T}_z \,.$$

Autrement dit la variété est "partiellement plate" (à l'ordre q).

Corollaire 2. *Soit $\tilde{T}$ la torsion de connexion liée à $\tilde{g}$, si L_1 est une sous-algèbre de Lie abélienne de L, on a*

$$\tilde{T}(X_z, Y_z) = 0 \,, \qquad \forall X_z, Y_z \in \mathscr{L}_1(z) \,.$$

Autrement dit, la structure hermitienne g est, dans ce cas, "partiellement kählérienne" (à l'ordre q).

Le corollaire 1 résulte immédiatement de la définition de la courbure de chern $\tilde{\Omega} = d''\tilde{\omega}$; le corollaire 2 se déduit immédiatement de

$$\tilde{T}(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y] \,, \qquad \forall X, Y \in L \,.$$

Remarque. Si Q est de dimension $q = n$, nous retrouvons dans le cas compact, comme corollaire du *théorème de parallélisme partiel*, une propriété connue des variétés complexes analytiquement parallélisable: *sur une telle variété il existe une métrique hermitienne naturelle telle que les champs holomorphes qui trivialisent $\mathscr{T}$ soient à dérivée covariante nulle pour la connexion de chern associée.* (cf. par ex. [5, p. 217]).

Si une telle situation se produit pour $Q \subset B$, $L_1 = L$ est *une algèbre de Lie abélienne* puisque, dans ce cas, $[L, L] \subset K_Q = \{0\}$; il résulte alors du corollaire 2 que M est kählérienne, et donc, en vertu de la Remarque 2 du § 7,

Corollaire 3. *Si le fibré cotangent holomorphe de M peut être trivialisé par des* 1*-formes fermées, l'application de Jacobi est un isomorphisme analytique de M sur son tore d'Albanese. En particulier, M est kählérienne.*

Ce corollaire 3, précise quelque peu le théorème de H. C. Wang évoqué plus haut (remarque 2 du § 7); inversement, il peut être démontré aisément à l'aide seulement de ce dernier théorème et du résultat mentionné en début de remarque, tous résultats que nous pouvons déduire eux-mêmes des théorèmes plus généraux (*théorème de fibration analytique* et *théorème de parallélisme* *partiel*) appliqués au cas limite que constituent les variétés complexes compactes (complètement) parallélisables dans le cadre plus large des variétés de type surjectif et des variétés partiellement parallélisables.

Bibliographie

[1] A. Blanchard, *Sur les variétés analytiques complexes,* Ann. Sci. Ecole Normale Sup. **73** (1956) 157–202.

[2] A. Borel & R. Remmert, *Über kompacte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten,* Math. Ann. **145** (1962) 429–439.

[3] P. Gauduchon, *Tenseurs holomorphes et formes holomorphes sur une variété hermitienne compacte,* C. R. Acad. Sci. Paris **279** (1974) 17–20.

[4] ——, *Sur quelques problèmes concernant les variétés complexes compactes et les fibrés vectoriels holomorphes associés,* Thèse, Paris, 1975.

[5] S. I. Goldberg, *Curvature and homology,* Academic Press, New York, 1962.

[6] K. Kodaira & J. Morrow, *Complex manifolds,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

[7] A. Lichnerowicz, *Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variétés riemaniennes à courbure de Ricci généralisée non négative,* J. Differential Geometry **6** (1971) 47–94.

[8] H. C. Wang, *Complex parallelisable manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954) 771–776.

53, Rue de Lyon
75012 Paris