J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
11 (1976) 547-571

TRANSFORMATIONS CONFORMES DES VARIETES PSEUDO-RIEMANNIENNES

Y. KERBRAT

0. INTRODUCTION

L'objet de cet article est de donner une généralisation aux variétés pseudo-riemanniennes de quelques résultats connus sur les champs de vecteurs conformes et les transformations conformes des variétés riemanniennes.

Dans le paragraphe 2, on étudie les champs de vecteurs conformes fermés non nuls d'une variété pseudo-riemannienne connexe et complète (M, g). En particulier, les théorèmes 1 et 2 établissent des propriétés de l'application exponentielle de (M, g) liées aux points critiques d'un tel champ de vecturs.

Cette étude est approfondie, dans les paragraphes 3 et 4, pour deux cas particuliers de champs de vecteurs conformes fermés:

On démontre que les seules variétés pseudo-riemanniennes connexes, complètes, de dimension supérieure ou égale à 2 et possédant un champ de vecteurs homothétique fermé non isométrique sont les espaces pseudo-euclidiens (théorème 3).

Si l'on note $A(M, g)$ l'espace des solutions f de l'équation:

$$Ddf = f \cdot g \ ,$$

il est clair que le gradient de toute fonction appartenant à $A(M, g)$ est un champ de vecteurs conforme fermé de (M, g). Le lemme 2 fournit une forme quadratique naturelle Φ sur $A(M, g)$ et l'existence de points critiques pour une fonction f appartenant à $A(M, g)$ est reliée, par la proposition 5, au signe de $\Phi(f)$.

Les théorèmes 5 et 6, généralisant des résultats d'Obata [9] et Tashiro [11], fournissent une classification des variétés pseudo-riemanniennes connexes, complètes, de dimension supérieure ou égale à 2 et pour lesquelles $A(M, g) \neq \{0\}$, sauf dans le cas où la forme quadratique Φ est dégénérée positive.

Les résultats des paragraphes 3 et 4 sont utilisés, dans le paragraphe 5, pour établir le théorème 8 qui fournit, à une homothétie près, les variétés pseudo-riemanniennes connexes, simplement connexes, complètes, régulières, fortement réductibles, de dimension supérieure ou égale à 3 pour lesquelles le plus grand groupe connexe de transformations conformes n'est pas un groupe d'homothéties. La démonstration utilise un théorème de Wu [13] généralisant le théorème

Communicated by A. Lichnerowicz, January 23, 1975.

de décomposition de De Rham [10] et assurant que toute variété pseudo-riemannienne satisfaisant aux hypothèses du théorème 8 est nécessairement une variété produit. Le théorème 8 contient le résultat suivant dû à Tashiro et Miyashita [12]: "Le plus grand groupe connexe de transformations conformes d'une variété riemannienne connexe complète et réductible est un groupe d'homothéties".

I. PRELIMINAIRES

1. Soit M une variété de classe C^∞, connexe et de dimension n. TM est le fibré tangent de M et T^*M son fibré cotangent. On note $C^\infty(M)$ l'anneau des fonctions réelles de classe C^∞ sur M et $C^\infty \otimes^p TM \otimes^q T^*M$ le $C^\infty(M)$-module des champs de tenseurs p fois contravariants et q fois covariants de classe C^∞ sur M. $X \in C^\infty TM$ étant un champ de vecteurs sur M, $L(X)$ désigne l'opérateur dérivation de Lie dans la direction de X.

Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on note $\mathrm{Cr}\,(f) = \{m \in M \,|\, d_m f = 0\}$ l'ensemble de ses point critiques. De même, pour tout champ de vecteurs $X \in C^\infty TM$, $\mathrm{Cr}\,(X) = \{m \in M \,|\, X(m) = 0\}$ est l'ensemble des points critiques de X.

Une métrique pseudo-riemannienne sur M est un champ de tenseurs $g \in C^\infty \otimes^2 T^*M$ tel que, pour tout point m de M, la forme bilinéaire $g(m)$ sur $T_m M$ soit symétrique et non dégénérée.

Le couple (M, g) est alors appelé variété pseudo-riemannienne. M étant connexe, la signature de $g(m)$ est indépendante de $m \in M$ et est appelée signature de (M, g).

2. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. On désigne par D l'opérateur de dérivation covariante associé à la connexion canonique de (M, g). Le tenseur de courbure et le tenseur de Ricci de (M, g) sont notés respectivement $R \in C^\infty TM \otimes^3 T^*M$ et $\mathrm{Ric} \in C^\infty \otimes^2 T^*M$.

Pour tout champ de vecteurs $X \in C^\infty TM$, on pose:

$$\delta X = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}\,(DX) \in C^\infty(M) .$$

La métrique pseudo-riemannienne g définit, de manière naturelle, un isomorphisme de $C^\infty TM$ sur $C^\infty T^*M$ noté: $X \in C^\infty TM \mapsto X^\flat \in C^\infty T^*M$. L'isomorphisme réciproque est noté: $\alpha \in C^\infty T^*M \mapsto \alpha^\# \in C^\infty TM$, [2]. La variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite complète si sa gerbe canonique est un champ de vecteurs complet sur TM.

3. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne complète. $\exp \in C^\infty(TM, M)$ désigne l'application exponentielle définie par la connexion canonique de (M, g) et l'on pose:

$$\exp_m = \exp / T_m M , \qquad \forall\, m \in M .$$

E étant un sous-ensemble de M, on dit que (M, g) est E-complète si $M = \bigcup_{m \in E} \exp(T_m M)$.

Un champ de vecteurs $X \in C^\infty TM$ est un champ de vecteurs conforme de (M, g) si $L(X)g = 2\delta X \cdot g$. Un champ de vecteurs conforme X de (M, g) est dit homothétique (resp. isométrique) si la fonction δX est constante (resp. nulle) sur M. On note $\mathscr{C}(M, g)$ (resp. $\mathscr{H}(M, g)$, resp. $\mathscr{I}(M, g)$) l'algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes (resp. homothétiques, resp. isométriques) de (M, g) et $\mathscr{C}_0(M, g) \subset \mathscr{C}(M, g)$ la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes complets de (M, g). (M, g) étant complète, il est bien connu [7] que $\mathscr{H}(M, g) \subset \mathscr{C}_0(M, g)$.

$C(M, g)$, $H(M, g)$, $I(M, g)$ désignent respectivement les groupes de Lie des transformations conformes, des homothéties, des isométries de (M, g) et leurs composantes neutres sont notées $C_0(M, g)$, $H_0(M, g)$, $I_0(M, g)$.

$\mathscr{C}_0(M, g)$ étant naturellement isomorphe à l'algèbre de Lie de $C(M, g)$, [1], la condition: $C_0(M, g) \neq H_0(M, g)$ est équivalente à: $\mathscr{C}_0(M, g) \neq \mathscr{H}(M, g)$.

Un champ de vecteurs conforme fermé de (M, g) est un champ de vecteurs conforme X tel que la 1-forme $X^\flat \in C^\infty T^*M$ soit fermée ($dX^\flat = 0$). L'ensemble $\mathscr{F}(M, g)$ des champs de vecteurs conformes fermés de (M, g) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(M, g)$ et il est immédiat de vérifier qu'un champ de vecteurs $X \in C^\infty TM$ est un champ de vecteurs conforme fermé de (M, g) si et seulement s'il vérifie:

$$(1) \qquad D_Y X = \delta X \cdot Y , \qquad \forall\, Y \in C^\infty TM .$$

II. PROPRIETES DES CHAMPS DE VECTEURS CONFORMES FERMES

1. Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe, de dimension $n \geq 2$ et $X \in \mathscr{F}(M, g)$ un champ de vecteurs conforme fermé non nul de (M, g). En dérivant (1) on obtient immédiatement

$$(2) \qquad R(Y, Z)X = Y(\delta X) \cdot Z - Z(\delta X) \cdot Y , \qquad \forall\, Y, Z \in C^\infty TM$$

et, par contraction,

$$(3) \qquad \operatorname{Ric}(X, Y) = (1 - n) Y(\delta X) , \qquad \forall\, Y \in C^\infty TM .$$

Proposition 1. *Soit $u: I \to M$ une géodésique de (M, g) telle que*

$$X \circ u(0) = k \frac{du}{dt}(0) , \qquad k \in \boldsymbol{R} .$$

Alors $X \circ u$: $(k + \theta)(du/dt)$ où $\theta \in C^\infty(I)$ est donnée par

$$(4) \qquad \theta(t) = \int_0^t (\delta X \circ u)(s)ds \ .$$

Preuve. Soit $(e_i)_{i=1,\cdots,n}$ une base de l'espace des champs de vecteurs parallèles le long de u. Alors

$$X \circ u = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot e_i \ , \quad \frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i \ , \quad f_i \in C^\infty(I) \ , \quad a_i \in \boldsymbol{R} \ , \quad f_i(0) = ka_i \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{df_i}{dt} \cdot e_i = \frac{D}{dt}(X \circ u) = (\delta X \circ u) \cdot \frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\delta X \circ u) a_i \cdot e_i \ ,$$

d'où:

$$f_i(t) = f_i(0) + \theta(t) a_i = (k + \theta(t)) a_i \ .$$

Corollaire 1. *Soit $u \colon I \to M$ une géodésique de (M, g) telle que $u(0) \in$ Cr (X). Alors*

$$X \circ u = \theta \cdot \frac{du}{dt} \ .$$

Proposition 2. (i) Cr $(X) \cap (\delta X)^{-1}(0) = \emptyset$.

(ii) Cr (X) *a tous ses points isolés dans M.*

(iii) $\dim \mathscr{F}(M, g) \leq n + 1$.

Cette proposition se démontre facilement au moyen de (1), (3) et du corollaire 1.

Proposition 3. *Soit u: $[0, a] \to M$ un lacet géodésique non dégénéré en un point $m_0 \in$ Cr (X). Il existe $b \in \,]0, a[$ tel que*

$$m_1 = u(b) \in \mathrm{Cr}\,(X) \ , \qquad \delta X(m_1) \cdot \delta X(m_0) < 0 \ .$$

Preuve. La fonction θ définie par (4) satisfait à

$$\theta(0) = \theta(a) = 0 \ , \qquad \frac{d\theta}{dt}(0) = \frac{d\theta}{dt}(a) = \delta X(m_0) \neq 0 \ .$$

Il existe donc $b \in \,]0, a[$ tel que $\theta(b) = 0$, $(d\theta/dt)(b) \cdot (d\theta/dt)(0) \leq 0$. Le résultat se déduit alors immédiatement du corollaire 1 et de la proposition 2.

2. Dans ce paragraphe, on supposera que la variété pseudo-riemannienne (M, g) est complète et que Cr $(X) \neq \emptyset$.

Le lemme suivant se vérifie par un calcul direct élémentaire.

Lemme 1. *Soient*

(i) *u: $\boldsymbol{R} \to M$ une géodésique de (M, g) telle que $X \circ u(0) = k(du/dt)(0)$, $k \in \boldsymbol{R}$,*

(ii) *Z un champ de vecteurs parallèle le long de u,*

(iii) $\theta \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ *la fonction définie par* (4),

(iv) $\psi \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ *la solution de*

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + d(\delta X) \circ Z = 0 , \qquad \psi(0) = \frac{d\psi}{dt}(0) = 0 .$$

Alors $J = (k + \theta)\cdot Z + \psi \cdot du/dt$ *est le champ de Jacobi le long de* u *de conditions initiales,* [6]:

$$J(0) = k\cdot Z(0) , \qquad \frac{D}{dt}J(0) = (\delta X \circ u)(0)\cdot Z(0) .$$

Théorème 1. $\forall\, m \in \mathrm{Cr}\,(X)$, $\forall\, \xi \in T_mM - \{0\}$, *si* $\exp_m(\xi) \in \mathrm{Cr}\,(X)$, $\mathrm{rg}_\xi \exp_m = 1$; *si* $\exp_m(\xi) \in M - \mathrm{Cr}\,(X)$, $\mathrm{rg}_\xi \exp_m = n$.

Preuve. Soient $u\colon t \in \boldsymbol{R} \mapsto \exp\,(t\cdot\xi) \in M$ la géodésique de condition initiale $(du/dt)(0) = \xi$, $\eta \in T_mM$ quelconque, Z le champ de vecteurs parallèle le long de u tel que

$$Z(0) = \frac{1}{\delta X(m)}\cdot\eta .$$

D'après le lemme 1,

$$T_\xi \exp_m(\eta) = \theta(1)\cdot Z(1) + \psi(1)\cdot\frac{du}{dt}(1) ,$$

où θ est la fonction définie par (4), et ψ est la fonction introduite dans l'énoncé du lemme 1.

Si $\exp\,(\xi) = u(1) \in \mathrm{Cr}\,(X)$, $\theta(1) = 0$ d'après le corollaire 1. On déduit alors immédiatement de la formule ci-dessus que $\mathrm{rg}_\xi \exp_m = 1$. Si $\exp\,(\xi) = u(1) \in M - \mathrm{Cr}\,(X)$, $\theta(1) \neq 0$. Par conséquent, $\forall\, \eta \in \operatorname{Ker} T_\xi \exp_m$,

$$Z(1) = -\frac{\psi(1)}{\theta(1)}\,\frac{du}{dt}(1), \text{ d'où, par transport parallèle ,}$$

$$\eta = \delta X(m)\cdot Z(0) = -\frac{\delta X(m)\cdot\psi(1)}{\theta(1)}\cdot\xi ,$$

$$0 = T_\xi \exp_m(\eta) = -\frac{\delta X(m)\psi(1)}{\theta(1)}T_\xi \exp_m(\xi) .$$

Il en résulte $\psi(1) = 0$ d'où $\eta = 0$.

Notations. Pour la suite, on pose, pour tout point $m \in \mathrm{Cr}\,(X)$,

$$W(m) = (\exp_m)^{-1}(M - \mathrm{Cr}\,(X)) \cup \{0\} \subset T_mM ,$$

$$S(m) = T_mM - W(m) = (\exp_m)^{-1}(\mathrm{Cr}\,(X)) - \{0\} .$$

On note également $W_0(m)$ le plus grand ouvert de T_mM étoilé en 0 et contenu dans $W(m)$, et l'on pose

$$D(m) = \exp(W_0(m)) .$$

Théorème 2. *Pour tout* $m \in \mathrm{Cr}(X)$,

(i) *$W(m)$ est un voisinage ouvert de 0 dans T_mM, et en particulier, $W_0(m)$ est non vide,*

(ii) *$D(m)$ est ouvert dans M et la restriction de $\exp_m$ à $W_0(m)$ est un difféomorphisme de $W_0(m)$ sur $D(m)$.*

Preuve. (i) D'après le théorème 1, $W(m) = \{\xi \in T_mM \mid \mathrm{rg}_\xi \exp_m = n\}$ et est donc ouvert dans T_mM.

(ii) Le théorème 1 affirme que $\exp_m$ est un difféomorphisme local en tout point de $W_0(m)$. Il suffit donc de montrer l'injectivité de $\exp_m / W_0(m)$. Soient

$\xi, \xi' \in W_0(m)$ tels que $\exp_m(\xi) = \exp_m(\xi')$.

$\xi = 0 \Rightarrow \xi' = 0 = \xi$. $\xi \neq 0 \Rightarrow \xi' \neq 0$ et considérons alors les géodésiques non dégénérées: $u\colon t \mapsto \exp(t \cdot \xi)$, $u'\colon t \mapsto \exp(t \cdot \xi')$.

$u(1) = u'(1) \in M - \mathrm{Cr}(X)$. Le vecteur $X \circ u(1)$ est donc non nul et, selon le corollaire 1, il est colinéaire à $(du/dt)(1)$ et $(du'/dt)(1)$. Donc

$$\frac{du'}{dt}(1) = \alpha \frac{du}{dt}(1) , \qquad \alpha \in \boldsymbol{R}^* .$$

Si $\alpha \neq 1$, posons $b = \mathrm{Inf}\{-1, -\alpha\}$, $c = \mathrm{Sup}\{-1, -\alpha\}$, $a = c - b > 0$. Comme $m = \exp(-(du/dt)(1)) = \exp(-(du'/dt)(1)) = \exp(-\alpha \cdot (du/dt)(1))$, $u''\colon t \in [0, a] \mapsto \exp((t + b) \cdot (du/dt)(1))$ est un lacet géodésique non dégénéré en m. Par construction, $u''([0, a]) \subset u([0, 1]) \cup u'([0, 1]) \subset D(m)$ et, par conséquent, $u''([0, a]) \cap \mathrm{Cr}(X) \subset D(m) \cap \mathrm{Cr}(X) = \{m\}$ ce qui contredit la proposition 3. On a donc nécessairement $\alpha = 1$, soit $(du'/dt)(1) = (du/dt)(1)$, d'où $u' = u$ et $\xi' = \xi$.

3. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe et de dimension $n \geq 2$.

Proposition 4. *Si* $\dim \mathscr{F}(M, g) \geq 2$, *il existe* $k \in \boldsymbol{R}$, *tel que, pour tout* $X \in \mathscr{F}(M, g)$, *l'on ait*

$$(d\delta X)^\# = k \cdot X .$$

Preuve. Soient $X, Y \in \mathscr{F}(M, g)$, $\boldsymbol{R}$-linéairement indépendants. Compte tenu des propriétés de symétrie du tenseur de courbure d'une variété pseudo-riemannienne, on déduit facilement de (2)

$$d\delta X \wedge X^\flat = d\delta Y \wedge Y^\flat = d\delta X \wedge Y^\flat + d\delta Y \wedge X^\flat = 0 .$$

Il existe donc une fonction $h \in C^\infty(M - \mathrm{Cr}(X))$ telle que

$$d\delta X = h\cdot X^b \qquad \text{sur } M - \mathrm{Cr}\,(X)$$

et une fonction $h' \in C^\infty(M - \mathrm{Cr}\,(X))$ telle que

$$d\delta Y = h'\cdot X^b + h\cdot Y^b \qquad \text{sur } M - \mathrm{Cr}\,(X)\ ,$$

cette dernière fonction satisfaisant à

$$h'\cdot X^b \wedge Y^b = 0 \qquad \text{sur } M - \mathrm{Cr}\,(X)\ .$$

L'ensemble $V(X, Y) = \{m \in M \mid X^b \wedge Y^b(m) = 0\}$ n'ayant pas de point intérieur [4], il en résulte $h' = 0$.

En différentiant, on obtient alors

$$dh \wedge X^b = dh \wedge Y^b \qquad \text{sur } M - \mathrm{Cr}\,(X)\ ,$$

d'où $dh = 0$.

Comme M est connexe de dimension $n \geq 2$ et que $\mathrm{Cr}\,(X)$ a tous ses points isolés dans M (Proposition 2), $M - \mathrm{Cr}\,(X)$ est connexe et, par conséquent, h est constante sur $M - \mathrm{Cr}\,(X)$.

Par continuité, on en déduit qu'il existe $k \in \boldsymbol{R}$ tel que

$$d\delta X = k\cdot X^b\ , \qquad d\delta Y = k\cdot Y^b\ .$$

Notation. Pour tout $k \in \boldsymbol{R}^*$, on note $A_k(M, g) \subset C^\infty(M)$ l'espace des solutions f de l'équation

$$Ddf = kf\cdot g\ . \tag{5}$$

Le corollaire suivant se déduit facilement de la proposition 4.

Corollaire 2. (i) *Si $\mathscr{F}(M, g) \cap \mathscr{H}(M, g) \neq \{0\}$, $\mathscr{F}(M, g) \subset \mathscr{H}(M, g)$.*

(ii) *S'il existe $k \in \boldsymbol{R}^*$ tel que $A_k(M, g) \neq \{0\}$, l'application $f \in A_k(M, g) \mapsto (df)^\#$ est un isomorphisme de $A_k(M, g)$ sur $\mathscr{F}(M, g)$.*

Corollaire 3. *S'il existe $k \in \boldsymbol{R}^*$ tel que $A_k(M, g) \neq \{0\}$, alors*

$$\mathscr{H}(M, g) = \mathscr{I}(M, g)\ .$$

Preuve. Soient $f \in A_k(M, g)$, $f \neq 0$, $X \in \mathscr{H}(M, g)$ quelconque. $L(X)g = 2\delta X\cdot g$ avec $\delta X = a \in \boldsymbol{R}$. On pose $h = X(f) \in C^\infty(M)$.

$$g(D_Y(dh)^\#, Z) = Y(Z(h)) - D_Y Z(h)\ , \qquad \forall\, Y, Z \in C^\infty TM\ .$$

Mais

$$Z(h) = kf\, g(X, Z) + g((df)^\#, D_Z X)\ ,$$
$$Y(Z(h)) = g(kY(f)\cdot X + akf\cdot Y, Z) + kfg(X, D_Y Z) + g((df)^\#, D_Y D_Z X)\ ,$$

d'où

$$g(D_Y(dh)^\#, Z) = g(kY(f)\cdot X + akf\cdot Y, Z) + g((df)^\#, D_Y D_Z X - D_{D_Y Z} X) .$$

X étant un champ de vecteurs homothétique est affine, soit

$$D_Y D_Z X - D_{D_Y Z} X + R(X, Y)Z = 0$$

et

$$D_Y(dh)^\# = kY(f)\cdot X + akf\cdot Y + R(X, Y)(df)^\# , \qquad \forall\, Y \in C^\infty TM ,$$

d'où il vient, compte tenu de (2),

$$D_Y(dh)^\# = k(h + af)\cdot Y , \qquad \forall\, Y \in C^\infty TM ,$$

ce qui, en raison du corollaire 2, implique $a = 0$ soit $X \in \mathscr{I}(M, g)$.

III. EXISTENCE DE CHAMPS DE VECTEURS HOMOTHETIQUES FERMES NON ISOMETRIQUES

Théorème 3. *Les seules variétés pseudo-riemanniennes connexes complètes, de dimension $n \geq 2$, possédant un champ de vecteurs homothétique fermé non isométrique sont les espaces pseudo-euclidiens.*

Ce théorème est une conséquence triviale du suivant.

Théorème 4. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe complète, de dimension $n \geq 2$, possédant un champ de vecteurs homothétique fermé non isométrique X. Alors*

(i) *X a un unique point critique m_0,*

(ii) $\exp_{m_0}$ *est une isométrie de l'espace pseudo-euclidien $(T_{m_0}M, g(m_0))$ sur (M, g).*

Preuve du théorème 4. Par hypothèse, $X \in \mathscr{F}(M, g)$ et $\delta X = a \in \boldsymbol{R}^*$.

(i) Soit $m \in M$ quelconque et soit $u: \boldsymbol{R} \to M$ une géodésique non dégénérée de (M, g) telle que $u(0) = m$, $X(m) = k\cdot(du/dt)(0)$, $k \in \boldsymbol{R}$. De la proposition 1, on déduit

$$X \circ u(t) = (k + at)\frac{du}{dt}(t) \qquad \forall\, t \in \boldsymbol{R} ,$$

d'où $u(-k/a) \in \mathrm{Cr}\,(X)$.

Par conséquent, $\mathrm{Cr}\,(X)$ est non vide et (M, g) est $\mathrm{Cr}\,(X)$-complète. Il est clair également que

$$S(m) = \emptyset , \qquad \forall\, m \in \mathrm{Cr}\,(X) ,$$

donc $W(m) = T_m M = W_0(m)$, et $M = \bigcup_{m \in \mathrm{Cr}\,(X)} D(m)$.

(ii) Soient $m_0, m_1 \in \mathrm{Cr}(X)$ tels que $D(m_0) \cap D(m_1) \neq \emptyset$. Alors, m étant un point fixé de $D(m_0) \cap D(m_1)$, il existe $\xi_0 \in T_{m_0}M$ et $\xi_1 \in T_{m_1}M$ tels que $m = \exp_{m_0}(\xi_0) = \exp_{m_1}(\xi_1)$. Le long des géodésiques

$$u_0 : t \mapsto u_0(t) = \exp_{m_0}(t \cdot \xi_0) ,$$
$$u_1 : t \mapsto u_1(t) = \exp_{m_1}(t \cdot \xi_1) ,$$

on a, d'après le corollaire 1,

$$X \circ u_0(t) = at \cdot \frac{du_0}{dt}(t) , \qquad X \circ u_1(t) = at \cdot \frac{du_1}{dt}(t) .$$

Pour $t = 1$,

$$X(m) = X \circ u_0(1) = X \circ u_1(1) = a \cdot (du_0/dt)(1) = a \cdot (du_1/dt)(1) ,$$

d'où ($a \neq 0$),

$$\frac{du_0}{dt}(1) = \frac{du_1}{dt}(1) ,$$

$$m_0 = \exp_m \left(-\frac{du_0}{dt}(1) \right) = \exp_m \left(-\frac{du_1}{dt}(1) \right) = m_1 .$$

Donc, pour $m_0, m_1 \in \mathrm{Cr}(X)$,

$$m_0 \neq m_1 \Rightarrow D(m_0) \cap D(m_1) = \emptyset .$$

$(D(m))_{m \in \mathrm{Cr}(X)}$ est un recouvrement de M, paramétré par $\mathrm{Cr}(X)$, par des ouverts deux à deux disjoints. Comme M est connexe, $\mathrm{Cr}(X)$ possède un unique élément m_0 et, d'après le théorème 2, $\exp_{m_0}$ est un difféomorphisme de $T_{m_0}M$ $(=W_0(m_0))$ sur M $(=D(m_0))$.

(iii) Soient $\xi, \eta, \zeta \in T_{m_0}M$ arbitraires, $u : t \mapsto \exp_{m_0}(t \cdot \xi)$ la géodésique de condition initiale ξ.

$$T_\xi \exp_{m_0}(\eta) = J(1) , \qquad T_\xi \exp_{m_0}(\zeta) = J'(1) ,$$

où J et J' sont les champs de Jacobi le long de u de conditions initiales

$$J(0) = J'(0) = 0 , \quad \frac{D}{dt}J(0) = \eta , \quad \frac{D}{dt}J'(0) = \zeta .$$

Notons Z et Z' les champs de vecteurs parallèles le long de u de conditions initiales $Z(0) = \eta$, $Z'(0) = \zeta$. Le lemme 1 exprime alors que

$$J(t) = t \cdot Z(t) , \quad J'(t) = t \cdot Z'(t) , \qquad \forall\, t \in \boldsymbol{R} ,$$

d'où

$$\begin{aligned} g(T_\xi \exp_{m_0}(\eta), T_\xi \exp_{m_0}(\zeta)) &= g(J(1), J'(1)) = g(Z(1), Z'(1)) \\ &= g(Z(0), Z'(0)) = g(\eta, \zeta) . \end{aligned}$$

IV. EXISTENCE DE SOLUTIONS NON NULLES DE L'EQUATION $Ddf = kf \cdot g$, $k \in R^*$

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe, complète et de dimension $n \geq 2$. Rappelons (cf. II, 3) que nous notons $A_k(M, g)$ l'espace des solutions de l'équation

$$(5) \qquad Ddf = kf \cdot g \ , \qquad k \in \boldsymbol{R}^* \ .$$

Posons $A_1(M, g) = A(M, g)$ et remarquons que

$$A_k(M, g) = A(M, k \cdot g) \ , \qquad \forall\, k \in \boldsymbol{R}^* \ .$$

Dans ce chapitre, on supposera que $A(M, g) \neq \{0\}$ et l'on pourra ne pas considérer la situation où la signature de (M, g) est égale à $(n, 0)$ ou à $(0, n)$ (en effet, pour chacun de ces deux cas particuliers, une étude complète est déjà connue [9], [11]).

1. Lemme 2. (i) *Pour toutes fonctions $f, h \in A(M, g)$, la fonction*

$$\varphi(f, h) = g((df)^\#, (dh)^\#) - fh$$

est constante sur M.

(ii) *L'application φ: $(f, h) \in A(M, g) \times A(M, g) \mapsto \varphi(f, h) \in \boldsymbol{R}$ est une forme bilinéaire symétrique sur $A(M, g)$.*

La preuve de ce lemme est élémentaire.

Definition. La forme quadratique $\Phi: f \in A(M, g) \mapsto \Phi(f) = \varphi(f, f)$ est appelée *forme quadratique fondamentale* de $A(M, g)$.

Proposition 5. *Pour toute fonction $f \in A(M, g)$;*

(i) *si* $\mathrm{Cr}\,(f) \neq \emptyset$, $\Phi(f) \leq 0$, *l'égalité n'ayant lieu que pour $f = 0$,*

(ii) *si $\Phi(f) < 0$,* $\mathrm{Cr}\,(f) \neq \emptyset$ *et (M, g) est* $\mathrm{Cr}\,(f)$*-complète.*

Preuve. (i) Soit $m \in \mathrm{Cr}\,(f)$ quelconque. Comme $d_m f = 0$,

$$\Phi(f) = -(f(m))^2 \leq 0 \ .$$

Si $\Phi(f) = 0$, $\mathrm{Cr}\,(f) \cap f^{-1}(0) = \mathrm{Cr}\,(f) \neq \emptyset$. f est donc nulle d'après la proposition 2.

(ii) Si $\Phi(f) < 0$, on pose $\Phi(f) = -a^2$, $a > 0$. La fonction f n'étant pas constante sur M, soit $m \in M - \mathrm{Cr}\,(f)$ un point régulier quelconque de f. Notons $u: \boldsymbol{R} \to M$ la géodésique de (M, g) de condition initiale $(du/dt)(0) = (df)^\#(m)$ $(\neq 0)$. Un calcul simple utilisant la proposition 1 montre que si $|f(m)| = a$, alors $(df)^\# \circ u(t) = (1 + tf(m)) \cdot (du/dt)(t)$; si $(f(m))^2 = a^2 - b^2$, $b > 0$, alors $(df)^\# \circ u(t) = (a/b) \sin (bt + \alpha) \cdot (du/dt)(t)$ où $\alpha = \mathrm{Arc}\cos\,(f(m)/a)$; si $(f(m))^2 = a^2 + c^2$, $c > 0$, alors $(df)^\# \circ u(t) = (\varepsilon a/c)\,\mathrm{sh}\,(ct + \varepsilon\beta) \cdot (du/dt)(t)$ où $\beta = \arg\mathrm{sh}\,(c/a)$ et $\varepsilon = f(m)/|f(m)|$. La conclusion annoncée en découle immédiatement.

2. Cas de forme quadratique fondamentale Φ définie positive

Notations. On note $(x, y) \mapsto x \cdot y$ le produit scalaire euclidien naturel sur $\boldsymbol{R}^p$ et l'on pose $|x|^2 = x \cdot x$, $\forall\, x \in \boldsymbol{R}^p$. On désigne par $\bar{g}$ la métrique riemannienne sur $\boldsymbol{R}^p$ dont la courbure sectionnelle est constante et égale à -1 ; en coordonnées naturelles (x^i):

$$(6) \qquad \bar{g}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{1 + |x|^2} \qquad (i, j = 1, \cdots, p) .$$

Théorème 5. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe, complète, de dimension $n \geq 2$ et telle que*

(i) $\dim A(M, g) = p > 0$,

(ii) *la forme quadratique fondamentale Φ de $A(M, g)$ est définie positive. Alors (M, g) est isométrique à $(\boldsymbol{R}^p \times \tilde{M}, \bar{g} + \rho\tilde{g})$ où $\bar{g}$ est la métrique riemannienne définie par (6) sur $\boldsymbol{R}^p$, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ est une variété pseudo-riemannienne connexe complète de dimension $n - p$ telle que $A(\tilde{M}, \tilde{g}) = \{0\}$, et $\rho \in C^\infty(\boldsymbol{R}^p)$ est la fonction définie par*

$$\rho(x) = 1 + |x|^2 , \qquad \forall\, x \in \boldsymbol{R}^p .$$

Preuve. L'hypothèse (ii) implique, en raison de la proposition 5, que, pour tout $m \in M$, l'application linéaire $f \in A(M, g) \mapsto d_m f \in T_m^* M$ est injective. En particulier, $\dim A(M, g) = p \leq n$. Pour toute la suite du paragraphe, on fixe une base $\{f_i\}_{i=1,\cdots,p}$ de $A(M, g)$, orthonormée pour le produit scalaire φ et l'on note $F \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^p)$ l'application $m \in M \mapsto F(m) = (f_1(m), \cdots, f_p(m)) \in \boldsymbol{R}^p$ qui, d'après ce qui précède est une submersion.

On pose également, pour tout $x = (x^1, \cdots, x^p) \in \boldsymbol{R}^p$.

$$X_x = \sum_{i=1}^{p} x^i (df_i)^\# = x^i (df_i)^\# = (d(x^i f_i))^\# \in \mathscr{F}(M, g) .$$

Lemme 3. *Pour tout couple $(x, m) \in (\boldsymbol{R}^p - \{0\}) \times M$,*

(i) $F \circ \exp (X_x(m)) = \left(\operatorname{ch} \alpha + \dfrac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} x \cdot F(m)\right) F(m) + \dfrac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} x$,

(ii) $X_x \circ \exp (X_x(m)) = \left(\operatorname{ch} \alpha + \dfrac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} x \cdot F(m)\right) T_{X_x(m)} \exp_m (X_x(m))$,

où $\alpha = [|x|^2 + (x \cdot F(m))^2]^{1/2} > 0$.

Ce lemme s'établit facilement par un calcul direct, en utilisant la proposition 1.

Soient $\lambda \colon \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^p$ et $\mu \colon \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^p$ les applications définies par

$$\lambda(x) = \frac{\operatorname{arg\,sh} |x|}{|x|} \cdot x , \quad \text{si } x \neq 0 , \quad \lambda(0) = 0 ,$$

$$\mu(x) = \frac{-1}{(1 + |x|^2)^{1/2}} \lambda(x) .$$

λ et μ sont clairement des difféomorphismes de $\boldsymbol{R}^p$ et l'on vérifie immédiatement que, pour tout point $m \in M$,

$$\exp (X_{\mu \circ F(m)}(m)) \in F^{-1}(0) .$$

En particulier, $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ et, comme F est une submersion, $\tilde{M} = F^{-1}(0)$ est une sous-variété de codimension p de M. Introduisons les deux applications de classe C^∞:

$$i: M \to \boldsymbol{R}^p \times \tilde{M} , \qquad j: \boldsymbol{R}^p \times \tilde{M} \to M$$

définies par

$$i(m) = (F(m), \exp (X_{\mu \circ F(m)}(m)) , \qquad m \in M ,$$
$$j(x, m) = \exp (X_{\lambda(x)}(m)) , \qquad (x, m) \in \boldsymbol{R}^p \times \tilde{M} .$$

On déduit facilement du lemme 3:

(i) Pour tout $x \in M$,

$$X_{\lambda \circ F(m)} \circ \exp (X_{\mu \circ F(m)}(m)) = -T_{X_{\mu \circ F(m)}(m)} \exp_m (X_{\mu \circ F(m)}(m)) ,$$

d'où $j \circ i = \mathrm{Id}_M$.

(ii) Pour tout couple $(x, m) \in \boldsymbol{R}^p \times \tilde{M}$:

$$F \circ j(x, m) = x , \tag{7}$$

$$X_{\mu \circ F \circ j(x,m)} \circ j(x, m) = -T_{X_{\lambda(x)}(m)} \exp_m (X_{\lambda(x)}(m)) ,$$

d'où $i \circ j = \mathrm{Id}_{\boldsymbol{R}^p \times \tilde{M}}$.

Par conséquent, j est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\boldsymbol{R}^p \times \tilde{M}$ sur M et $j^{-1} = i$. Calculons l'application tangente à j. Soit $(x, m) \in \boldsymbol{R}^p \times \tilde{M}$ quelconque. Pour tout $(y, \xi) \in \boldsymbol{R}^p \times T_m\tilde{M} = \boldsymbol{R}^p \times \operatorname{Ker} d_m F$, introduisons une application $(v, w) \in C^\infty(I, \boldsymbol{R}^p \times \tilde{M})$ vérifiant

$$v(0) = x , \quad \frac{dv}{ds}(0) = y , \quad w(0) = m , \quad \frac{dw}{ds}(0) = \xi .$$

Alors

$$T_{(x,m)}j(y, \xi) = \frac{d}{ds}(j \circ (v, w))(0) = \frac{d}{ds} \exp (X_{\lambda \circ v(s)} \circ w(s))\Big|_{s=0}$$
$$= \frac{\partial}{\partial s} \exp (t \cdot X_{\lambda \circ v(s)} \circ w(s))\Big|_{\substack{s=0\\t=1}} = J(1) ,$$

où J est le champ de Jacobi le long de la géodésique $u: t \mapsto \exp(t \cdot X_{\lambda(x)}(m))$ défini par

$$J(t) = \frac{\partial}{\partial s} \exp(t \cdot X_{\lambda \circ v(s)} \circ w(s))\Big|_{s=0} \qquad \forall\, t \in \boldsymbol{R} .$$

On a $J(0) = (dw/ds)(0)$ soit $J(0) = \xi$.

$$\frac{D}{dt} J(0) = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \exp(t \cdot X_{\lambda \circ v(s)} \circ w(s))\Big|_{s=t=0}$$
$$= \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \exp(t \cdot X_{\lambda \circ v(s)} \circ w(s))\Big|_{t=s=0} = \frac{D}{ds}(X_{\lambda \circ v(s)} \circ w(s))\Big|_{s=0} ,$$

soit, compte tenu de $F(m) = 0$, $(D/dt)J(0) = X_{d_x\lambda(y)}(m)$.

Si $x = 0$, la géodésique u est dégénérée et, compte tenu de $d_0\lambda(y) = y$, il vient immédiatement

$$T_{(0,m)}j(y, \xi) = X_y(m) + \xi \in T_m M .$$

Supposons $x \neq 0$ et notons Y_y et Z_ξ les champs de vecteurs parallèles le long de u de conditions initiales $Y_y(0) = X_y(m)$, $Z_\xi(0) = \xi$.

Un calcul direct utilisant (2) et le lemme 3 permet de montrer sans difficulté que le champ de Jacobi J introduit ci-dessus s'exprime par

$$J = \alpha\, Y_y + x \cdot y\, \gamma \frac{du}{dt} + \beta\, Z_\xi ,$$

où α, β, γ sont les fonctions sur $\boldsymbol{R}$ définies par

$$\alpha(t) = \frac{1}{|x|} \operatorname{sh}(t \operatorname{arg\,sh} |x|) , \qquad \beta(t) = \operatorname{ch}(t \operatorname{arg\,sh} |x|) ,$$
$$\gamma(t) = \frac{1}{|x| \operatorname{arg\,sh} |x|} \left[\frac{t}{(1 + |x|^2)^{1/2}} - \frac{\operatorname{sh}(t \operatorname{arg\,sh} |x|)}{|x|} \right] .$$

On a alors

$$T_{(x,m)}j(y, \xi) = Y_y(1) - \frac{x \cdot y}{|x| \operatorname{arg\,sh} |x|} \left[1 - \frac{1}{(1 + |x|^2)^{1/2}} \right] \frac{du}{dt}(1)$$
$$+ (1 + |x|^2)^{1/2} Z_\xi(1) ,$$

et l'on en déduit, compte tenu de $F(m) = 0$,

$$g(T_{(x,m)}j(y, \xi), T_{(x,m)}j(z, \eta)) = y \cdot z - \frac{(x \cdot y)(x \cdot z)}{1 + |x|^2} + (1 + |x|^2) g(\xi, \eta) ,$$

c'est-à-dire que,

$$j^*g = \bar{g} + \rho\cdot\tilde{g}\ ,$$

où $\tilde{g}$ est la métrique pseudo-riemannienne induite par g sur la sous-variété $\tilde{M}$ de M.

M étant connexe et difféomorphe à $\boldsymbol{R}^p \times \tilde{M}$, $\tilde{M}$ est nécessairement connexe. D'autre part, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ est une sous-variété totalement géodésique de (M, g) et est donc complète.

Enfin, $\{j^*f_i\}_{i=1,\cdots,p}$ est une base de $A(\boldsymbol{R}^p \times \tilde{M},\ \bar{g} + \rho\cdot\tilde{g})$. Si $h \in A(\tilde{M}, \tilde{g})$, on montre facilement que la fonction $(x, m) \in \boldsymbol{R}^p \times \tilde{M} \mapsto [\rho(x)]^{1/2}h(m)$ appartient à $A(\boldsymbol{R}^p \times \tilde{M},\ \bar{g} + \rho\cdot\tilde{g})$ ce qui, compte tenu de (7), implique $h = 0$. On a donc bien $A(\tilde{M}, \tilde{g}) = \{0\}$.

3. Cas de forme quadratique fondamentale Φ non-positive

(a) $p > 0$ et $q > 0$ étant deux entiers, on note $\theta_{p,q}$ la forme bilinéaire, symétrique non dégénérée, définie sur $\boldsymbol{R}^{p+q+1}$ par

$$\theta_{p,q}(x, y) = \sum_{i=1}^{p} x^i y^i - \sum_{i=p+1}^{p+q+1} x^i y^i \ (x = x^1, \cdots, x^{p+q+1}) \in \boldsymbol{R}^{p+q+1}\ ,$$
$$y = (y^1, \cdots, y^{p+q+1}) \in \boldsymbol{R}^{p+q+1}\ .$$

$H_{p,q} = \{x \in \boldsymbol{R}^{p+q+1} \mid \theta_{p,q}(x, x) = -1\}$ est une hypersurface connexe de $\boldsymbol{R}^{p+q+1}$. Désignons par $g_{p,q}$ le champ de tenseurs induit par $\theta_{p,q}$ sur $H_{p,q}$.

$(H_{p,q}, g_{p,q})$ est une variété pseudo-riemannienne complète de signature (p, q). On démontre facilement que $A(H_{p,q}, g_{p,q}) = \{h \mid H_{p,q}/h \in \operatorname{Hom}(\boldsymbol{R}^{p+q+1}, \boldsymbol{R})\}$, et que la forme quadratique fondamentale Φ de $A(H_{p,q}, g_{p,q})$ est de signature $(p, q + 1)$.

En particulier, la fonction

$$h_0\colon x = (x^1, \cdots, x^{p+q+1}) \in H_{p,q} \mapsto x^{p+q+1} \in \boldsymbol{R} \tag{8}$$

appartient à $A(H_{p,q}, g_{p,q})$, est telle que $\Phi(h_0) < 0$ et

$$\operatorname{Cr}(h_0) = \{x_0 = (0, \cdots, 0, 1),\ x_1 = -x_0 = (0, \cdots, 0, -1)\}\ . \tag{9}$$

Théorème 6. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe, complète, de dimension $n \geq 2$, de signature $(n - q, q)$, $1 \leq q \leq n - 1$, pour laquelle $A(M, g) \neq \{0\}$ et la forme quadratique Φ de $A(M, g)$ n'est pas positive. Si $q > 1$, (M, g) est isométrique à $(H_{n-q,q}, g_{n-q,q})$. Si $q = 1$, (M, g) est un revêtement (localement) isométrique de $(H_{n-1,1}, g_{n-1,1})$.*

La démonstration de ce théorème, donnée dans (c), utilisera les lemmes établis en (b).

(b) Dans l'énoncé des lemmes 4, 5 et 6 on supposera données une variété pseudo-riemannienne (M, g) satisfaisant aux hypothèses du théorème 6 et une fonction $f \in A(M, g)$ telle que $\Phi(f) < 0$.

Il résulte de la proposition 5 que $\mathrm{Cr}(f) \neq \emptyset$ et $M = \bigcup_{m \in \mathrm{Cr}(f)} \exp(T_m M)$. Pour tout point m de M et tout réel $a \neq 0$, on pose

$$H(m, a) = \{\xi \in T_m M \mid g(\xi, \xi) = a\} \subset T_m M .$$

Comme $1 \leq q \leq n-1$, $H(m, a) \neq \emptyset$, $\forall a \in \boldsymbol{R}^*$.

Lemme 4. (i) *Pour tout* $m \in \mathrm{Cr}(f)$,

$$S(m) = \bigcup_{k \in \boldsymbol{N}^*} H(m, -k^2\Pi^2) , \qquad W_0(m) = \{\xi \in T_m M \mid g(\xi, \xi) > -\Pi^2\} .$$

(ii) $\mathrm{Cr}(f)$ *possède au moins deux points distincts.*

Preuve. Soient $m \in \mathrm{Cr}(f)$, $\xi \in T_m M - \{0\}$. En utilisant le corollaire 1, on obtient aisément:

Si $g(\xi, \xi) = 0$, alors $(df)^\# \circ \exp(\xi) = f(m) \cdot T_\xi \exp_m(\xi)$, $f \circ \exp(\xi) = f(m)$; si $g(\xi, \xi) = c^2 > 0$, alors

$$(df)^\# \circ \exp(\xi) = \frac{f(m)}{c} \operatorname{sh} c \cdot T_\xi \exp_m(\xi) , \qquad f \circ \exp(\xi) = f(m) \operatorname{ch} c ;$$

si $g(\xi, \xi) = -c^2 < 0$, alors

$$(df)^\# \circ \exp(\xi) = \frac{f(m)}{c} \sin c \cdot T_\xi \exp_m(\xi) , \qquad f \circ \exp(\xi) = f(m) \cos c ;$$

et le lemme se déduit immédiatement de ces formules.

Lemme 5. (i) $M = \bigcup_{m \in \mathrm{Cr}(f)} D(m)$.

(ii) *Pour tout couple* (m, m') *de points critiques distincts de* f, $\exp_m^{-1}(m') \neq \emptyset$, *et*

$$D(m) \cap D(m') \neq \emptyset \Leftrightarrow \exp_m^{-1}(m') \cap H(m, -\Pi^2) \neq \emptyset .$$

Preuve. (i) Soit $m \in M - \mathrm{Cr}(f)$ arbitraire. On sait qu'il existe $m_0 \in \mathrm{Cr}(f)$ et $\xi \in T_{m_0} M$ tels que $m = \exp(\xi)$. Si $m \in M - D(m_0)$, il resulte du lemme 4 qu'il existe $k \in N^*$ tel que

$$-(k+1)^2\Pi^2 < g(\xi, \xi) \subset -k^2\Pi^2 .$$

Posons $a = k\Pi\,(-g(\xi, \xi))^{-1/2} \in]k/(k+1), 1[$, $m_1 = \exp(a \cdot \xi)$. $m_1 \in \mathrm{Cr}(f)$ et $m = \exp(\eta)$ où $\eta = a(1-a) \cdot T_{a \cdot \xi} \exp_{m_0}(\xi) \in T_{m_1} M$.

$$g(\eta, \eta) = -k^2\Pi^2(1-a)^2 \in \left] -\frac{k^2\Pi^2}{(1+k)^2}, 0 \right[\subset]-\pi^2, +\infty[,$$

d'où $\eta \in W_0(m_1)$ et $m \in D(m_1)$.

(ii) En utilisant la proposition 2 et le lemme 4, on démontre que la relation binaire $\mathscr{R}$ définit sur $\mathrm{Cr}(f)$ par

$$m\mathcal{R}m' \Leftrightarrow \exp_m^{-1}(m') \neq \emptyset$$

est une relation d'équivalence. On note $\Pi: \mathrm{Cr}(f) \to \mathrm{Cr}(f)/\mathcal{R} = A$ la surjection canonique. Pour tout $\alpha \in A$, on pose $E(\alpha) = \bigcup_{m \in \Pi^{-1}(\alpha)} D(m)$. Alors $M = \bigcup_{\alpha \in A} E(\alpha)$. Il résulte du corollaire 1 que $\alpha \neq \beta \Rightarrow E(\alpha) \cap E(\beta) = \emptyset$ ce qui, compte tenu du théorème 2 et de la connexité de M, entraîne que A possède un unique élément et, donc, que

$$\exp_m^{-1}(m') \neq \emptyset\ , \quad \forall\, m \in \mathrm{Cr}(f)\ , \quad \forall\, m' \in \mathrm{Cr}(f)\ .$$

La dernière partie du lemme se prouve facilement en remarquant que, pour tout $m \in D(m_0) \cap D(m_1) \subset M - \mathrm{Cr}(f)$, $(m_0 \in \mathrm{Cr}(f),\ m_1 \in \mathrm{Cr}(f),\ m_0 \neq m_1)$, on a $g((df)^\#(m), (df)^\#(m)) < 0$ (cf. les formules écrites dans la démonstration de la proposition 5).

Il découle des lemmes 4 et 5 et de la proposition 2 que, pour tout couple (m, m') de points critiques de f, $\exp_m^{-1}(m')$ est une hypersurface fermée de T_mM. En notant encore $g(m)$ le champ de tenseurs induit sur $\exp_m^{-1}(m')$ par $g(m)$, $(\exp_m^{-1}(m'), g(m))$ est une variété pseudo-riemannienne.

De plus

Lemme 6. *Pour tout couple (m, m') de points critiques distincts de f, l'application*

$$\lambda_m^{m'}: \xi \in \exp_m^{-1}(m') \mapsto -T_\xi \exp_m(\xi) \in T_{m'}M$$

est une isométrie de $(\exp_m^{-1}(m'), g(m))$ *sur* $(\exp_{m'}^{-1}(m), g(m'))$.

Preuve. Il est clair que $\lambda_m^{m'}$ est un difféomorphisme de $\exp_m^{-1}(m')$ sur $\exp_{m'}^{-1}(m)$. Soient $\xi \in \exp_m^{-1}(m')$, $\eta \in T_\xi(\exp_m^{-1}(m')) \subset T_mM$, $v \in C^\infty(I \subset \boldsymbol{R}, \exp_m^{-1}(m'))$ tel que $v(0) = \xi$, $(dv/ds)(0) = \eta$. Alors

$$\lambda_m^{m'} \circ v(s) = -\frac{\partial}{\partial t} \exp(t \cdot v(s))\Big|_{t=1}$$

et

$$T_{u(s)}\lambda_m^{m'} \circ \frac{dv}{ds}(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial t} \exp(t \cdot v(s))\Big|_{t=1}\right)$$
$$= -\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} \exp(t \cdot v(s))\Big|_{t=1}\ ,$$

d'où

$$T_\xi \lambda_m^{m'}(\eta) = -\frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} \exp(t \cdot v(s))\Big|_{\substack{s=0\\t=1}} = -\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial s} \exp(t \cdot v(s))\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=1}\ .$$

Mais l'application $t \mapsto (\partial/\partial s) \exp(t \cdot v(s))|_{s=0}$ est le champ de Jacobi J le long de la géodésique $u: t \mapsto \exp(t \cdot \xi)$, de condition initiale

$$J(0) = 0 \,, \qquad \frac{D}{dt} J(0) = \eta \,.$$

Il résulte alors du lemme 1 et de $g(\xi, \eta) = 0$ que $T_\xi \lambda_m^{m'}(\eta) = -f(m')/f(m)$. $Z(1)$ où Z est le champ de vecteurs parallèle le long de la géodésique u tel que $Z(0) = \eta$. Comme $|f(m')/f(m)| = 1$, $\lambda_m^{m'}$ est bien une isométrie.

(c) *Preuve du théorème* 6. Soit $f \in A(M, g)$ telle que $\Phi(f) < 0$. On fixe $m_0 \in \mathrm{Cr}\,(f)$.

x_0 et x_1 étant les points de $H_{n-q,q}$ définis par (9), on se donne un isomorphisme orthogonal ψ_0 de $(T_{m_0}M, g(m_0))$ sur $(T_{x_0}H_{n-q,q}, g_{n-q,q}(x_0))$.

$m \in \mathrm{Cr}\,(f)$ étant un point critique quelconque de f, on déduit du lemme 6 que $\lambda_m^{m_0}$ est la restriction à $\exp_m^{-1}(m_0)$ d'un unique isomorphisme orthogonal φ_m de $(T_m M, g(m))$ sur $(T_{m_0}M, g(m_0))$.

De même, en appliquant le lemme 6 à la fonction $h_0 \in A(H_{n-q,q}, g_{n-q,q})$ définie par (8), $\lambda_{x_0}^{x_1}$ est la restriction à $\exp_{x_0}^{-1}(x_1)$ d'un unique isomorphisme orthogonal σ de $(T_{x_0}H_{n-q,q}, g_{n-q,q}(x_0))$ sur $(T_{x_1}H_{n-q,q}, g_{n-q,q}(x_1))$. Pour tout $m \in \mathrm{Cr}\,(f)$, si $f(m) = f(m_0)$ on pose

$$j_m = \exp_{x_0} \circ \psi_0 \circ \varphi_m \circ (\exp_m / W_0(m))^{-1} \colon D(m) \to D(x_0) \,,$$

si $f(m) = -f(m_0)$ on pose

$$j_m = \exp_{x_1} \circ \sigma \circ \psi_0 \circ \varphi_m \circ (\exp_m / W_0(m))^{-1} \colon D(m) \to D(x_1) \,.$$

Par définition, chacune des applications j_m est un difféomorphisme et, en appliquant le lemme 1, on vérifie facilement que c'est une isométrie de $(D(m), g)$ sur $(D(x_0), g_{n-q,q})$ ou $(D(x_1), g_{n-q,q})$.

En outre, il résulte du lemme 5 que chaque application j_m est la restriction à l'ouvert $D(m)$ d'une application $j \colon M \to H_{n-q,q}$ et que j est un revêtement.

Si $q > 1$, la variété $H_{n-q,q}$, difféomorphe à $\boldsymbol{R}^{n-q} \times S^q$ est simplement connexe. Dans ce cas, j est nécessairement un difféomorphisme.

V. TRANSFORMATIONS CONFORMES DES VARIETES PSEUDO-RIEMANNIENNES REDUCTIBLES

1. Variétés pseudo-riemanniennes fortement réductibles

Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe, m un point de M et $\sigma_m \subset O(T_m M, g(m))$ le groupe d'holonomie restreint [7] de (M, g). Nous disons que (M, g) est *régulière* si le sous-espace

$$T_m^0 M = \{\xi \in T_m M \,|\, \theta(\xi) = \xi, \ \forall\, \theta \in \sigma_m\}$$

est, soit nul, soit non isotrope (c'est-à-dire que la restriction de $g(m)$ à T^0_mM est non dégénérée).

La variété pseudo-riemannienne (M, g) est *fortement réductible* si σ_m laisse invariant au moins un sous-espace non trivial et non isotrope de T_mM. Si (M, g) n'est pas fortement réductible, elle est dite *faiblement irréductible*.

Remarque. Un champ de vecteurs parallèle d'une variété faiblement irréductible et régulière, est identiquement nul.

H. Wu a établi [13] le théorème suivant, généralisation d'un résultat classique de G. de Rham [10].

Théorème de décomposition de De Rham-Wu. *Toute variété pseudo-riemannienne connexe, simplement connexe, complète, régulière, fortement réductible et de dimension $n \geq 3$ peut s'écrire sous la forme*

$$(M, g) = \mathop{\times}_{\alpha=0}^{q} (M_\alpha, g_\alpha) , \tag{10}$$

où (M_0, g_0) est un espace pseudo-euclidien de dimension $n_0 \geq 0$ et, pour $\alpha \geq 1$, (M_α, g_α) est une variété pseudo-riemannienne connexe, simplement connexe, complète, régulière et faiblement irréductible de dimension $n_\alpha \geq 2$. De plus, la décomposition (10) *est unique à l'ordre près.*

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne admettant la décomposition (10). Pour tout $\alpha = 0, \cdots, q$, on note $P_\alpha \in C^\infty TM \otimes T^*M$ le champ de tenseurs tel que, $\forall\, m = (m_0, \cdots, m_q) \in M$, $P_\alpha(m)$ soit le projecteur orthogonal de T_mM sur $T_{m_\alpha}M_\alpha$.

Pour tout $f \in C^\infty(M)$, on pose

$$d^\alpha f = (P_\alpha(df)^\sharp)^\flat , \qquad \alpha = 0, \cdots, q .$$

On pose également

$$D^\alpha_X = D_{P_\alpha X} , \quad X \in C^\infty TM , \quad \alpha = 0, \cdots, q .$$

Les champs de tenseurs P_α vérifient

$$DP_\alpha = 0 , \qquad \forall\, \alpha = 0, \cdots, q , \tag{11}$$

$$g \circ (P_\alpha \times P_\beta) = 0 \qquad \text{pour } \alpha \neq \beta , \tag{12}$$

dont on déduit, par dérivation

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow P_\beta \circ L(X)R(P_\alpha Y, P_\beta Z) \circ P_\alpha = 0 \qquad (X, Y, Z \in C^\infty TM) , \tag{13}$$

et, pour tout $\alpha = 0, \cdots, q$,

$$P_0 \circ L(X)R(P_0 Y, P_\alpha Z) \circ P_0 = 0 \qquad (X, Y, Z \in C^\infty TM) . \tag{14}$$

2. Champs de vecteurs conformes

Théorème 7. *Toute variété pseudo-riemannienne connexe, simplement connexe, complète, régulière, fortement réductible, de dimension $n \geq 3$ et possédant des champs de vecteurs conformes non homothétiques est soit un espace pseudo-euclidien, soit de la forme*

$$(M, g) = (M_1, g_1/k) \times (M_2, -g_2/k) ,$$

où $k \in \boldsymbol{R}^*$ et, pour $\alpha = 1, 2$, (M_α, g_α) est une variété pseuco-riemannienne connexe, simplement connexe, complète, régulière, faiblement irréductible et telle que $A(M_\alpha, g_\alpha) \neq \{0\}$. De plus, dans ce cas

$$\delta X \in A(M_1, g_1) \otimes A(M_2, g_2) , \qquad \forall X \in \mathscr{C}(M, g) .$$

Preuve. Soit $(M, g) = \times_{\alpha=0}^{q} (M_\alpha, g_\alpha)$ une variété pseudo-riemannienne connexe, simplement connexe, complète, régulière, fortement réductible et de dimension $n \geq 3$ et soit $X \in \mathscr{C}(M, g)$ arbitraire.

Il est bien connu [8] que, $\forall\, Y, Z, T \in C^\infty TM$

$$\begin{aligned} DDX(Y, Z) = &-R(X, Z)Y + Z(\delta X)\cdot Y \\ &+ Y(\delta X)\cdot Z - g(Y, Z)\cdot(d\delta X)^\sharp , \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} L(X)R(Y, Z)T = &\, Dd\delta X(Y, T)\cdot Z - Dd\delta X(Z, T)\cdot Y \\ &+ g(Y, T)\cdot D_Z(d\delta X)^\sharp - g(Z, T)\cdot D_Y(d\delta X)^\sharp . \end{aligned} \tag{16}$$

En comparant (13) et (16), on obtient, pour $\alpha \neq \beta$,

$$D^\alpha d^\alpha \delta X \otimes g_\beta + g_\alpha \otimes D^\beta d^\beta \delta X = 0 .$$

Pour toute valeur de $\alpha = 0, \cdots, q$, il existe donc une fonction $f_\alpha \in C^\infty(M)$ telle que

$$D^\alpha d^\alpha \delta X = f_\alpha \cdot g_\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow f_\alpha + f_\beta = 0 . \tag{17}$$

(a) *Supposons* $n_0 = \dim M_0 = 0$: $(M, g) = \times_{\alpha=1}^{q} (M_\alpha, g_\alpha)$, $q \geq 2$.

(i) Si $q \geq 3$, le système (17) s'écrit

$$D^\alpha d^\alpha \delta X = 0 \qquad \forall\, \alpha = 1, \cdots, q .$$

Chacune des variétés (M_α, g_α) étant régulière et faiblement irréductible, il en résulte $\delta X = \text{Cte}$ soit $X \in \mathscr{H}(M, g)$.

(ii) Si $q = 2$, on a

$$D^1 d^1 \delta X = f\cdot g_1 , \quad D^2 d^2 \delta X = -f\cdot g_2 , \quad f \in C^\infty(M) . \tag{18}$$

Remarquons que $\mathscr{F}(M_1, g_1) \cap \mathscr{H}(M_1, g_1) = \{0\}$ en raison du théorème 3.

Supposons que $A_k(M_1, g_1) = \{0\}$, $\forall\, k \in \boldsymbol{R}^*$. Il résulte alors de la proposition 4 que $\dim \mathscr{F}(M_1, g_1) \leq 1$. Si $\mathscr{F}(M_1, g_1) = \{0\}$, $d^1\delta X = 0$, $f = 0$, d'où $X \in \mathscr{H}(M, g)$. Si $\dim \mathscr{F}(M_1, g_1) = 1$, soit $Y \in \mathscr{F}(M_1, g_1)$, $Y \neq 0$. On déduit de (18) qu'il existe $\mu \in C^\infty(M_2)$ telle que

$$(d^1\delta X)^\# = \mu \cdot Y \ , \qquad f = \mu\, \delta Y \ .$$

En dérivant deux fois, il vient

$$D^2 d^2 \mu \otimes Y = -\mu g_2 \otimes (d^1\delta X)^\# \ ,$$

d'où, compte tenu des hypothèses, $\mu = 0$, donc $\delta X =$ Cte et $X \in \mathscr{H}(M, g)$.

Supposons qu'il existe $k \in \boldsymbol{R}^*$ tel que $A_k(M_1, g_1) \neq \{0\}$, et soit $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ une base de $A_k(M_1, g_1)$. Il découle de (18) et du corollaire 2 que

$$\delta X = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mu_i + \nu \ ,$$

où $\mu_i, \nu \in C^\infty(M_2)$, et $f = k \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mu_i$. En reportant dans (18),

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (D^2 d^2 \mu_i + k\mu_i \cdot g_2) + D^2 d^2 \nu = 0 \ ,$$

d'où

$$\mu_i \in A_{-k}(M_2, g_2) = A(M_2, -kg_2) \ , \qquad \nu = a \in \boldsymbol{R} \ .$$

Fixons $m_2 \in M_2$ et considérons, sur M_1, le champ de vecteurs

$$Z \colon m_1 \in M_1 \mapsto Z(m_1) = P^1\Big(X - \frac{1}{k}(d\delta X)^\#\Big)(m_1, m_2) \ .$$

On vérifie facilement que $L(Z)g_1 = 2ag_1$ et il résulte alors du corollaire 3 que $a = 0$ donc $\delta X \in A(M_1, kg_1) \otimes A(M_2, -kg_2)$.

(b) *Supposons* $n_0 = \dim M_0 \geq 1$.

(i) Pour $q \geq 2$, le raisonnement fait en (a)(i) montre que $\delta X \in C^\infty(M_0)$ et $D^0 d^0 \delta X = 0$.

(ii) Pour $q = 1$ et $n_0 = \dim M_0 \geq 2$, on déduit de (14) et (16)

$$D^1 d^0 \delta X = D^0 d^1 \delta X = 0 \ ,$$

et le système (17) devient

$$D^0 d^0 \delta X = c \cdot g_0 \ , \quad D^1 d^1 \delta X = -c \cdot g_1 \ , \quad c \in \boldsymbol{R} \ .$$

Le théorème 3 implique alors que $c = 0$ et $\delta X \in C^\infty(M_0)$, $D^0 d^0 \delta X = 0$.

(iii) Pour $q = 1$ et $n_0 = \dim M_0 = 1$, en raisonnant comme en (a)(ii), on obtient que si $A_k(M_1, g_1) = \{0\}$, $\forall\, k \in \boldsymbol{R}^*$, alors $\delta X \in C^\infty(M_0)$ et $D^0 d^0 \delta X = 0$, et que s'il existe $k \in \boldsymbol{R}^*$ tel que $A_k(M_1, g_1) \neq \{0\}$, $\delta X \in A(M_1, kg_1) \otimes A(M_0, -kg_0)$ (Remarquons que si $n_0 = 1$, $\dim A_k(M_0, g_0) = 2$, $\forall\, k \in \boldsymbol{R}^*$).

(iv) Supposons que $q \geq 1$ et que $X \in \mathscr{C}(M, g)$ satisfait à

$$\delta X \in C^\infty(M_0)\ , \qquad D^0 d^0 \delta X = 0\ .$$

Nous posons $(M', g') = \times_{\alpha=1}^{q} (M_\alpha, g_\alpha)$, $P' = \sum_{\alpha=1}^{q} P_\alpha$, $D' = \sum_{\alpha=1}^{q} D^\alpha$. A tout $m_0 \in M_0$ et à tout vecteur $\xi_0 \in T_{m_0}M_0$ associons la fonction

$$\psi_{m_0, \xi_0} \colon m' \in M' \mapsto g_0(P_0 X(m_0, m'), \xi_0)\ .$$

Il résulte de (15) que

$$D' d' \psi_{m_0, \xi_0} = -g_0((d^0 \delta X)^\sharp(m_0), \xi_0) \cdot g'\ .$$

En appliquant une nouvelle fois le théorème 3, il vient $d^0 \delta X = 0$ et, comme $\delta X \in C^\infty(M_0)$, $\delta X = \mathrm{Cte}$ et donc, $X \in \mathscr{H}(M, g)$.

3. Champs de vecteurs conformes purs

Soit $(M, g) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ une variété pseudo-riemannienne telle que (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont des variétés pseudo-riemanniennes connexes, complètes, régulières, faiblement irréductibles, de dimensions respectives $n_1 \geq 2$ et $n_2 \geq 1$ et telles que $A(M_1, g_1) \neq \{0\}$, $A(M_2, -g_2) \neq \{0\}$.

Nous désignons par Φ_1 et Φ_2 les formes quadratiques fondamentales de $A(M_1, g_1)$ et $A(M_2, -g_2)$ et par φ_1 et φ_2 leurs formes polaires respectives. Posons $B(M, g) = A(M_1, g_1) \otimes A(M_2, -g_2) \subset C^\infty(M)$ et notons $\mathscr{C}^p(M, g)$ le sous-espace de $C^\infty TM$ des champs de vecteurs de la forme

$$Y_f = (d^1 f - d^2 f)^\sharp\ , \qquad f \in B(M, g)\ . \tag{19}$$

Il est immédiat de vérifier que $L(Y_f)g = 2f \cdot g$. Par conséquent, $\mathscr{C}^p(M, g) \subset \mathscr{C}(M, g)$. Il résulte du théorème 7 que, pour tout $X \in \mathscr{C}(M, g)$, $\delta X \in B(M, g)$. Alors $X - Y_{\delta X} \in \mathscr{I}(M, g)$. Comme $\mathscr{I}(M, g) \cap \mathscr{C}^p(M, g) = \{0\}$, $\mathscr{C}(M, g)$ admet la décomposition en somme directe

$$\mathscr{C}(M, g) = \mathscr{I}(M, g) \oplus \mathscr{C}^p(M, g)\ .$$

Les éléments de $\mathscr{C}^p(M, g)$ sont appelés *champs de vecteurs conformes purs* de (M, g). En tenant compte de $\mathscr{I}(M, g) \subset \mathscr{C}_0(M, g)$ on peut écrire également

$$\mathscr{C}_0(M, g) = \mathscr{I}(M, g) \oplus \mathscr{C}_0^p(M, g)\ ,$$

où $\mathscr{C}_0^p(M, g) = \mathscr{C}_0(M, g) \cap \mathscr{C}^p(M, g)$ est l'espace des champs de vecteurs conformes purs complets de (M, g).

Le corollaire 3 impliquant, d'autre part, que $H_0(M, g) = I_0(M, g)$, on a

(20) $$C_0(M, g) \neq H_0(M, g) \Leftrightarrow \mathscr{C}_0^p(M, g) \neq \{0\} .$$

La proposition suivante se démontre par un calcul direct élémentaire.

Proposition 6. *Soient* $\alpha \in A(M_1, g_1)$, $\beta \in A(M_1, g_1)$,

$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mu_i \in B(M, g) \qquad (\lambda_i \in A(M_1, g_1),\ \mu_i \in A(M_2, -g_2)) .$$

(i) $[(d\alpha)^\#, (d\beta)^\#] \in \mathscr{I}(M, g)$.

(ii) $[[(d\alpha)^\#, (d\beta)^\#], Y_f] = Y_{f'} \in \mathscr{C}^p(M, g)$ *avec*

$$f' = \beta \sum_{i=1}^{p} \varphi_1(\alpha, \lambda_i)\mu_i - \alpha \sum_{i=1}^{p} \varphi_1(\beta, \lambda_i)\mu_i \in B(M, g) .$$

Nous appelons *champ de vecteurs conforme pur réduit* de (M, g) un champ de vecteurs $Y_f \in \mathscr{C}^p(M, g)$ associé par (19) à une fonction f de la forme

$$f = \lambda\mu , \quad \lambda \in A(M_1, g_1) , \quad \mu \in A(M_2, -g_2) .$$

Proposition 7. *Pour que la variété pseudo-riemannienne produit* $(M, g) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ *considérée ci-dessus possède un champ de vecteurs conforme pur réduit complet et non nul, il faut et il suffit que* (M_1, g_1) *soit isométrique à* $(S^{n_1}, -g_0)$ *et que* (M_2, g_2) *soit isométrique à* (S^{n_2}, g_0) *si* $n_2 \geq 2$ *ou à* $(\boldsymbol{R}, \delta_0)$ *si* $n_2 = 1$.

(Dans cet énoncé, ainsi que dans celui du théorème 8, g_0 désigne la métrique riemannienne standard sur la sphère S^n et δ_0 la métrique euclidienne naturelle sur $\boldsymbol{R}$).

Preuve. Soit $Y_f = (d^1 f - d^2 f)^\#$ un champ de vecteurs conforme pur réduit non nul de (M, g): $f = \lambda\mu$, $\lambda \in A(M_1, g_1)$, $\mu \in A(M_2, -g_2)$. $u = (u_1, u_2)$ étant une courbe intégrale de Y_f, on a, pour les fonctions $\tilde{\lambda} = \lambda \circ u_1$ et $\tilde{\mu} = \mu \circ u_2$, le système différentiel

(21) $$\frac{d\tilde{\lambda}}{dt} = \tilde{\mu}(\tilde{\lambda}^2 + \Phi_1(\lambda)) , \qquad \frac{d\tilde{\mu}}{dt} = \tilde{\lambda}(\tilde{\mu}^2 + \Phi_2(\mu)) .$$

(i) Si $\Phi_1(\lambda) = a^2 > 0$ et $\Phi_2(\mu) = b^2 > 0$, les fonctions λ et μ prennent toutes les valeurs réelles. On peut donc choisir u de manière que $\tilde{\mu}(0) = (b/a)\tilde{\lambda}(0) \neq 0$. Alors $\tilde{\mu} = (b/a)\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\lambda}$, solution de l'équation

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{dt} = \frac{b}{a}\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}^2 + a^2)$$

n'est pas définie sur $\boldsymbol{R}$ tout entier. Le champ de vecteurs Y_f n'est donc pas complet.

(ii) Si $\Phi_1(\lambda) = a^2 > 0$ et $\Phi_2(\mu) = 0$, on choisit u de manière que $\tilde{\lambda}(0) = 0$, $\tilde{\mu}(0) \neq 0$. Alors $\tilde{\lambda}(t) = a^2 t\tilde{\mu}(t)$ et $\tilde{\mu}$ est solution de l'équation $d\tilde{\mu}/dt = a^2 t\tilde{\mu}^3$. On en déduit que Y_f n'est pas complet.

(iii) Si $\Phi_1(\lambda) = \Phi_2(\mu) = 0$, la fonction $\tilde{f} = f \circ u$ vérifie $d\tilde{f}/dt = 2\tilde{f}^2$ et, par conséquent, Y_f n'est pas un champ de vecteurs complet.

(iv) Si $\Phi_1(\lambda) < 0$, $\mathrm{Cr}\,(\lambda) \neq \emptyset$ d'après la proposition 5. Si $u_1(0) \in \mathrm{Cr}\,(\lambda)$, u_2 est courbe intégrale du champ de vecteurs $-\tilde{\lambda}(0)(d^2\mu)^\# \in \mathscr{F}(M_2, g_2)$. Comme $\tilde{\lambda}(0) \neq 0$, si Y_f est complet, il en est de même de $(d^2\mu)^\# \neq 0$. En adaptant un raisonnement de [14], il est alors facile de vérifier que $(d^2\mu)^\#$ n'est complet sur M_2 que si g_2 est définie positive et il vient alors de [9] que (M_2, g_2) est isométrique à (S^{n_2}, g_0) si $n_2 \geq 2$ ou à $(\boldsymbol{R}, \delta_0)$ si $n^2 = 1$. On a alors $\Phi_2(\mu) < 0$ et, en recommençant le même raisonnement, on obtient que, pour que Y_f soit complet, il est également nécessaire que (M_1, g_1) soit isométrique à $(S^{n_1}, -g_0)$.

(v) Si (M, g) est isométrique à $(S^{n_1}, -g_0) \times (S^{n_2}, g_0) \geq n_2$, 2, ou à $(S^{n_1}, -g_0) \times (\boldsymbol{R}, \delta_0)$, il est immédiat que $\mathscr{C}_0^p(M, g) = \mathscr{C}^p(M, g) \cdot (M, g)$ possède donc des champs de vecteurs conformes purs réduits complets non nuls.

4. Le théorème principal

Théorème 8. *Pour une variété pseudo-riemannienne* (M, g) *connexe, simplement connexe, complète, régulière, fortement réductible et de dimension* $n \geq 3$, *ou bien* $C_0(M, g) = H_0(M, g)$, *ou bien* (M, g) *est homothétique à* $(S^{n_1}, -g_0) \times (S^{n-n_1}, g_0)$, $2 \leq n_1 \leq n-2$, *ou à* $(S^{n-1}, -g_0) \times (\boldsymbol{R}, \delta_0)$. *Dans le second cas*, $\dim C(M, g) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Preuve. Il est bien connu [1] que, pour une variété pseudo-euclidienne (M, g) de dimension $n \geq 2$, $C_0(M, g) = H_0(M, g)$.

En raison du théorème 7, il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas où $(M, kg) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$, $k \in \boldsymbol{R}^*$, (M_1, g_1) et (M_2, g_2) étant des variétés pseudo-riemanniennes connexes, simplement connexes, régulières, faiblement irréductibles, de dimensions respectives $n_1 \geq 2$, et $n_2 \geq 1$ et telles que $A(M_1, g_1) \neq \{0\}$, $A(M_2, -g_2) \neq \{0\}$.

(i) Si $\dim A(M_1, g_1) = 1$, tout champ de vecteurs conforme pur est réduit et il découle de (20) et de la proposition 7 que $C_0(M, g) = H_0(M, g)$.

(ii) Si $p = \dim A(M_1, g_1) \geq 3$ et si Φ_1 est non dégénérée, fixons une base $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,p}$ de $A(M_1, g_1)$ orthogonale pour φ_1. Alors, pour tout $Y_f = (d^1 f - d^2 f)^\# \in \mathscr{C}^p(M, g)$, $f = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mu_i \neq 0$, $\mu_i \in A(M_2, -g_2)$, on peut se donner 3 entiers positifs $i_0, j_0, k_0 \leq p$ distincts deux à deux et tels que $\mu_{i_0} \neq 0$. En appliquant la proposition 6, il vient

$$[[(d\lambda_{i_0})^\#, (d\lambda_{j_0})^\#], Y_f] = Y_{f'}\,,$$
$$[[(d\lambda_{j_0})^\#, (d\lambda_{k_0})^\#], Y_{f'}] = Y_{f''}\,,$$

où

$$f' = \Phi_1(\lambda_{i_0})\lambda_{j_0}\mu_{i_0} - \Phi_1(\lambda_{j_0})\lambda_{i_0}\mu_{j_0} ,$$
$$f'' = \Phi_1(\lambda_{i_0})\Phi_1(\lambda_{j_0})\lambda_{k_0}\mu_{i_0} \neq 0 .$$

Si $Y_f \in \mathscr{C}_0^p(M, g)$, il résulte de la proposition 6 que $Y_{f''}$ est un champ de vecteurs conforme pur réduit complet non nul ce qui, avec la proposition 7, démontre le théorème dans le cas particulier où $\dim A(M_1, g_1) \geq 3$ et Φ_1 est non dégénérée.

(iii) Si la forme quadratique fondamentale Φ_1 n'est pas positive, il résulte du théorème 6 que les hypothèses faites en (ii) sont satisfaites.

Si Φ_1 est définie positive et $\dim A(M_1, g_1) = 2$, on sait (théorème 5) que (M_1, g_1) est isométrique à $(\boldsymbol{R}^2 \times \tilde{M}, \bar{g} + \rho\tilde{g})$ et $A(\boldsymbol{R}^2 \times \tilde{M}, \bar{g} + \rho\tilde{g}) \subset A(\boldsymbol{R}^2, \bar{g})$. Il en résulte que $\dim \mathscr{C}_0^p(M, g) \leq \dim \mathscr{C}_0^p(M', g')$ où $(M', g') = (\boldsymbol{R}^2, \bar{g}) \times (M_2, g_2)$. $\dim A(\boldsymbol{R}^2, \bar{g}) = 3$. Le raisonnement fait en (ii) et la proposition 7 impliquent $C_0(M, g) = H_0(M, g)$.

(iv) Il reste à démonstrer que $C_0(M, g) = H_0(M, g)$ si Φ_1 est dégénérée et $p = \dim A(M_1, g_1) \geq 2$.

Sous ces hypothèses, on se donne une base $\{\lambda_i\}_{i=1,\cdots,p}$ de $A(M_1, g_1)$, orthogonale pour φ_1 et telle que $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_q\}$ soit une base de $\operatorname{Ker} \varphi_1$ ($q = \dim \operatorname{Ker} \varphi_1 \leq p$). Soit $Y_f \in \mathscr{C}^p(M, g)$, $f = \sum_{i=1}^p \lambda_i\mu_i \neq 0$, $\mu_i \in A(M_2, -g_2)$.

Nous distinguerons deux cas.

Premier cas. $f \notin \operatorname{Ker} \varphi_1 \otimes A(M_2, -g_2)$.

Alors il existe $i_0 > q$ tel que $\mu_{i_0} \neq 0$. Fixons un entier positif $j_0 \leq q$. On a

$$[[(d\lambda_{i_0})^\#, (d\lambda_{j_0})^\#], Y_f] = Y_{f'} ,$$

où $f' = \phi_1(\lambda_{i_0})\lambda_{j_0}\mu_{i_0} \neq 0$. $Y_{f'}$ est un champ de vecteurs conforme pur réduit et non complet de (M, g) (proposition 7). Il résulte alors de la proposition 6 que Y_f n'est pas complet.

Second cas. $f \in \operatorname{Ker} \varphi_1 \otimes A(M_2, -g_2)$.

(a) Si $n_2 = \dim M_2 \geq 2$ et si Φ_2 est non dégénérée, le raisonnement fait en (ii) et (iii) montre que Y_f n'est pas complet.

(b) Si $n_2 = \dim M_2 = 1$, (M_2, g_2) est isométrique à $(\boldsymbol{R}, \pm\delta_0)$, $\dim A(M_2, g_2) = 2$ et Φ_2 est, soit définie négative, soit de signature $(1, 1)$.

$\{\mu_1, \mu_2\}$ étant une base de $A(M_2, g_2)$ orthonormée pour φ_2, la fonction f s'exprime par

$$f = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 ,$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \operatorname{Ker} \varphi_1$. Un calcul élémentaire montre que, pour toute courbe intégrale u de Y_f,

$$f \circ u(t) = \frac{t + a}{b - (t + a)^2} ,$$

où

$$a = \frac{f \circ u(0)}{h \circ u(0)}, \qquad b = \frac{(f \circ u(0))^2 + h \circ u(0)}{(h \circ u(0))^2}, \qquad h = \Phi_2(\mu_1)\lambda_1^2 + \Phi_2(\mu_2)\lambda_2^2 .$$

Il est facile de vérifier que l'on peut choisir $u(0) \in M$ de manière que $b \geq 0$. Il en résulte que le champ de vecteurs Y_f n'est pas complet.

(c) Si Φ_2 est dégénérée, dans le cas où $f \notin \operatorname{Ker} \varphi_1 \otimes \operatorname{Ker} \varphi_2$, le raisonnement fait plus haut prouve que Y_f n'est pas complet; dans le cas où $f \in \operatorname{Ker} \varphi_1 \otimes \operatorname{Ker} \varphi_2$, pour toute courbe intégrale u de Y_f, la fonction $\tilde{f} = f \circ u$ vérifie $d\tilde{f}/dt = 2\tilde{f}^2$. Le champ de vecteurs Y_f n'est donc pas complet.

(v) Si $(M, g) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ satisfait aux hypothèses du théorème et est telle que $C_0(M, g) \neq H_0(M, g)$,

$$\begin{aligned}
\dim C(M, g) &= \dim \mathscr{C}_0(M, g) = \dim \mathscr{I}(M, g) + \dim \mathscr{C}_0^p(M, g) \\
&= \dim \mathscr{I}(M_1, g_1) + \dim \mathscr{I}(M_2, g_2) + \dim \mathscr{C}^p(M, g) \\
&= \tfrac{1}{2}n_1(n_1 + 1) + \tfrac{1}{2}(n - n_1)(n - n_1 + 1) \\
&\quad + \dim A(M_1, g_1) \cdot \dim A(M_2, -g_2) \\
&= \tfrac{1}{2}n_1(n_1 + 1) + \tfrac{1}{2}(n - n_1)(n - n_1 + 1) + (n_1 + 1)(n - n_1 + 1) \\
&= \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2) .
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] C. Barbance, *Conjecture de Lichnerowicz sur les transformations conformes d'une variété riemannienne*, Thèse Sciences Math., Paris, 1969.

[2] M. Berger, *Lectures on geodesics in Riemannian manifolds*, Tata Institute, Bombay, 1965.

[3] J. I. Hano, *On affine transformations of a Riemannian manifold*, Nagoya Math. J. **9** (1955) 99–109.

[4] Y. Kerbrat, *Transformations infinitesimales conformes fermées des variétés riemanniennes connexes complètes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, **270** (1970) 462–465.

[5] ——, *Sur les transformations conformes des variétés riemanniennes*, Thèse Sciences Math., Paris, 1971.

[6] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*. Vols. 1, 2, Interscience, New York, 1963, 1969.

[7] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ed. Cremonese, Roma, 1955.

[8] ——, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.

[9] M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962) 333–340.

[10] G. de Rham, *Sur la réducibilité d'un espace de Riemann*, Comment. Math. Helv. **26** (1952) 328–344.

[11] Y. Tashiro, *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965) 251–275.

[12] Y. Tashiro & K. Miyashita, *Conformal transformations in complete product Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967) 328–346.

[13] H. Wu, H*olonomy groups of infinite metrics*, Pacific J. Math. **20** (1967) 351–392.

[14] K. Yano & T. Nagano, *Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations*, Ann. of Math. **69** (1959) 451–461.

UNIVERSITÉ DE LYON I