J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
11 (1976) 287-292

H-TRANSVERSALE AKTIONEN AUF RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN

P. STRANTZALOS

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage nach der "Verträglichkeit" einer eigentlichen Aktion (vgl. Def. 1.1) mit der Riemannschen Struktur einer (zusammenhängenden) Mannigfaltigkeit M der dimension $n > 1$ untersucht. Während die Existenz einer eigentlichen Aktion (G, M), wobei G eine nicht kompakte (zusammenhängende) Lie-Gruppe ist, hinreichend dafür ist, daß $M \underset{T}{=} \boldsymbol{R} \times N$ (: M ist zu $\boldsymbol{R} \times N$ topologisch-isomorph) für den topologischen Fall oder $M \underset{D}{=} \boldsymbol{R} \times N$ (: M ist zu $\boldsymbol{R} \times N$ diffeomorph) für der differentialen Fall gilt (vgl. Lemma 1.2), braucht $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times N$ (: M ist zu $\boldsymbol{R} \times N$ isomorph bezüglich der vorhandenen Riemannschen Strukturen) im allgemeinen nicht richtig zu sein, wenn die Aktion durch Riemannsche Isometrien (also eigentlich nach Hilfss. 1.4) geschieht; daraus erhebt sich die Frage, wann das der Fall sei. Notwendig dafür ist, daß G eine abgeschlossene, zu $\boldsymbol{R}$ isomorphe Untergruppe H enthält, die (*lokal-*) *H-transversal* auf M operiert (vgl. Def. 1.5). Es wird gezeigt, daß das auch hinreichend ist (vgl. Satz 1.6), und das entsprechende Resultat wird in § 2 für Spezialfälle angewendet.

1. H-transversale Aktionen

Definition 1.1. Sei G eine lokal-kompakte Gruppe und M eine Mannigfaltigkeit wie oben; eine Aktion (G, M) heißt *eigentlich*, wenn folgendes gilt: Für je zwei Punkte $x, y \in M$ gibt es Umgebungen U_x, U_y derart, daß

$$(U_x, U_y) =: \{g \in G : gU_x \cap U_y \neq \emptyset\} \subset G$$

relativ-kompakt ist. Ist $G = \boldsymbol{R}$ und (G, M) eigentlich, so heißt das entsprechende dynamische System *dispersiv* [2, Chap. IV, 1.7.2].

Lemma 1.2. *Sei M bzw. G eine C^∞-Mannigfaltigkeit bzw. eine Lie-Gruppe wie in der Einleitung; ferner operiere G eigentlich durch C^∞-Diffeomorphismen auf M; dann gilt $M \underset{D}{=} \boldsymbol{R} \times N$, wobei N eine normale Untermannigfaltigkeit von M ist.*

Communicated by W. P. A. Klingenberg, August 20, 1974.

Beweis. Nach dem Satz von Iwasawa [11, Chap. IV, § 4.13] gibt es 1-parameter Untergruppen H_i, $i = 1, \cdots, m$ von G, die zu $\boldsymbol{R}$ isomorph und derart sind, daß die Abbildung $H_1 \times \cdots \times H_m \times K \to G$ mit $(t_1, \cdots, t_m, k) \mapsto t_1 \cdots t_m k$ ein Homöomorphismus ist, wobei K eine maximale kompakte Untergruppe von G ist. Daraus folgt die Existenz einer Untergruppe H von G, die abgeschlossen und zu $\boldsymbol{R}$ isomorph ist. Sei (H, M) das dynamische System, das durch die Einschränkung der Aktion von G auf H definiert wird; nach [12, Prop. 1.3.1] und der Voraussetzung operiert H eigentlich auf M, womit (H, M) ein dispersives dynamisches System ist (vgl. Def. 1.1). M ist separabel und metrisierbar also sind die Voraussetzungen von [2, Chap. IV, Th. 2.6] erfüllt, d.h. (H, M) ist parallelisierbar, woraus folgt $M \underset{T}{=} \boldsymbol{R} \times N$, wobei N dem Orbitraum der Aktion (H, M) homöomorph ist. Da H eigentlich auf M operiert, ist der Kern der Aktion eine kompakte Gruppe, woraus folgt, daß die Aktion effektiv ist; daraus, aus der Voraussetzung und aus [9, Chap. I, Th. 4.6] folgt, daß die Aktionsabbildung $H \times M \to M$ und damit auch die Aktion differenzierbar ist; daher definiert die natürliche Projektion $p: M \to M/H$ ein, in diesem Fall separiertes, differenzierbares Faserbündel $(M, p, M/H)$ (vgl. [10, Th. 3]); darüber hinaus existiert ein globaler Schnitt $N \cong M/H$ dieses Bündels, das nach [10, Th. 3] durch einen Diffeomorphismus definiert ist. Die Behauptung folgt nun daraus und aus der Tatsache, daß $\boldsymbol{R}$ der Faser dieses Bündels ist.

Korollar 1.3. *Sei M wie im Lemma* 1.2 *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $I_0(M)$ die Einskomponente der Gruppe $I(M)$ der Isometrien von M bezüglich der kompakt-offenen Topologie. Falls $I_0(M)$ nicht kompakt ist, gilt $M \underset{D}{=} \boldsymbol{R} \times N$.*

Beweis. Nach [8, Chap. II, Th. 1.2] ist nämlich $I_0(M)$ eine zusammenhängende Lie-Gruppe, so daß die Behauptung aus dem Lemma 1.2 und aus dem nachfolgenden Hilfssatz folgt.

Hilfssatz 1.4. *$I(M)$ operiert eigentlich auf M.*

Der Beweis ist analog zum Beweis, daß $I(M)$ eine lokal-kompakte Gruppe ist (vgl. z.B. [9, Chap. I, Th. 4.7]).

Sei $(\boldsymbol{R}, M)$ ein dispersives dynamisches System; nach [12, Th. 2.3.3] gibt es dann eine Scheibe S_x in jedem $x \in M$; da die Isotropiegruppen wegen der Eigentlichkeit trivial sind, sieht eine Umgebung von x wie ein Produkt $I_x \times S_x$ aus, wobei I_x eine Umgebung von x in $\boldsymbol{R}x$ ist. Dasselbe gilt auch in dem Fall, in dem obiges System differenzierbar ist: Die Scheibe ist dann eine normale Untermannigfaltigkeit und das Produkt ist differenzierbar-isomorph zu einer Umgebung von x in M (vgl. z.B. [2, Chap. IV, § 2] oder [10, Th. 3]). Wenn M mit einer Riemannschen Struktur versehen ist, braucht "die lokale Produkt-Struktur" bezüglich dieser Riemannschen Struktur nicht vorhanden zu sein; daher kommt man zu der Untersuchung der dispersiven dynamischen Systeme, die der nachfolgenden Definition entsprechen:

Definition 1.5. Das dynamische System $(\boldsymbol{R}, M)$ heißt *Riemannsch-transversal*, wenn, für jedes $x \in M$, es eine Umgebung U_x von x derart gibt, daß $U_x \underset{R}{=} I_x \times S_x$ (obige Bezeichnung) gilt. Dabei wird der Orbitraum $M/\boldsymbol{R}$ mit der Riemannschen Struktur versehen, bezüglich deren $p_x = p \mid S_x : S_x \to p_x(S_x) =: P_x \subset M/\boldsymbol{R}$ eine Isometrie ist. Damit dieser Begriff auch $I(M)$ mit M in Verbindung setzt, wird noch die Aktion (G, M) als *H-transversal* definiert (G ist dabei eine zusammenhängende lokal-kompakte Gruppe), wenn die Untergruppe $H \cong \boldsymbol{R}$ von G Riemannsch-transversal auf M operiert (vgl. § 2).

Falls obiges dynamisches System (zusätzlich) dispersiv ist (was für den Fall $\boldsymbol{R} \subset I(M)$ immer zutrifft (vgl. Hilfss. 1.4)), ist jeder Orbit eine differenzierbare Kurve nach dem Lemma 1.2; darüber hinaus ist I_x nach der vorigen Definition "locally minimizing" [14, Chap. 2, Cor. 2.8.4], woraus folgt, *daß jeder Orbit eine Geodätische ist*, und die Situation entspricht nach [6, Def. 13–21, Th. 13–22] völlig der Parallelisierbarkeit [2, Chap. IV, § 2]. Nun es gilt der nachfolgende

Satz 1.6. *Sei M wie im Kor.* 1.3 *vollständig und die Gruppe G* (*wie in der Def.* 1.5) *operiere H-transvesal auf M*; *darüber hinaus sei die Aktion von H auf M eigentlich*; *dann gilt*:

(a) *Sei* $\bar{M}$ *die universelle Riemannsche Überlagerung von M* [14, S. 60]; *dann gilt* $\bar{M} \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times \bar{N}$, *wobei* $\bar{N}$ *die universelle Riemannsche Überlagerung des Orbitraumes* $M/H = N$ *ist.*

(b) *Zusätzlich zu den in* (a) *gestellten Voraussetzungen sei M einfach-zusammenhängend*; *dann gilt folgendes*: *M läßt eine H-transversale eigentliche Aktion einer nicht kompakten, zusammenhängenden Lie-Gruppe genau dann zu, wenn* $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times N$ *gilt.*

Beweis. (a) Sei $u : \bar{M} \to M$ die universelle Überlagerungsabbildung. Nach [3, Chap. I, § 9] kann die Aktion von H auf M zu einer Aktion von $\bar{H} \cong H$ auf $\bar{M}$ hochgehoben werden; diese Aktion auf $\bar{M}$ ist (wie jene auf M) eigentlich:

Seien U_x, U_y Umgebungen von $x, y \in M$ wie in der Def. 1.1; für $x = u(\bar{x})$, $y = u(\bar{y})$ seien $U_{\bar{x}}, U_{\bar{y}}$ die zu U_x, U_y entsprechenden Umgebungen von $\bar{x}$, $\bar{y} \in \bar{M}$; es gibt dann eine bijektive Zuordnung zwischen (U_x, U_y) und $(U_{\bar{x}}, U_{\bar{y}})$ (vgl. Def. 1.1), bei der $r \in H$ die Abbildung $\bar{r} \in H$ mit $\bar{r}(\bar{z}) = \bar{v} \in U_{\bar{y}}$ für $\bar{z} \in U_{\bar{x}}$ zugeordnet wird, die über r liegt; daraus folgt, daß $(U_{\bar{x}}, U_{\bar{y}})$ relativ-kompakt also daß die Aktion von H auf $\bar{M}$ eigentlich ist.

Nach dem Lemma 1.2 gilt $\bar{M} \underset{T}{=} \boldsymbol{R} \times \bar{N}$; andererseits sind die H-Orbits in $\bar{M}$ Hochhebungen der H-Orbits in M [3, Chap. I, § 9] und u ist nach Definition lokale Isometrie; daraus und aus der Tatsache, daß H Riemannsch-transversal auf M operiert, folgt, daß dasselbe für die Aktion von H auf $\bar{M}$ gilt. Es wird nun ein globaler "transversaler" Schnitt der Aktion von H auf $\bar{M}$ konstruiert, wobei der einfache Zusammenhang von M/H wesentlich benutzt wird:

Da $\bar{M}$ separabel und $p : \bar{M} \to \bar{M}/H$ offen ist, kann $\bar{M}/H$ durch abzählbar viele Umgebungen der Gestalt P_x (vgl. Def. 1.5) überdeckt werden, die derart numeriert werden, daß je zwei aneinander folgende Umgebungen nicht leeren Durchschnitt haben. Da H Riemannsch-transversal auf $\overline{M}$ operiert, kann jedes P_x zu einem S_x transversal zu I_x (und damit eindeutig) hochgehoben werden; dadurch kann man mit Hilfe der obigen Numerierung eine zusammenhängende, normale Untermannigfaltigkeit $Q = \bigcup S_x$ von $\overline{M}$ konstruieren, die lokal-isometrisch zu $\overline{M}/H$ ist; daraus, aus der Tatsache, daß Q lokal-abgeschlossen in M also vollständig nach [9, Chap. IV, Prop. 4.9] ist, und aus [9, Chap. IV, Th. 4.6] folgt, daß $(Q, p/Q, \overline{M}/H)$ eine Überlagerung und wegen des einfachen Zusammenhangs von $\overline{M}/H$ eine universelle Überlagerung ist; daher ist Q zu $\overline{M}/H$ isometrisch-isomorph und ein globaler "transversaler" Schnitt der Aktion von H auf $\overline{M}$.

Da $p(Q) = \overline{M}/H$ gilt, läßt sich jedes $\bar{x} \in \overline{M}$ in der Form $(t_{\bar{x}}, q_{\bar{x}}) \in \boldsymbol{R} \times \overline{N}$ (vgl. Lemma 1.2) schreiben, wobei $q_{\bar{x}} \in Q$. Die entsprechende Zuordnung $\bar{x} \mapsto (t_{\bar{x}}, q_{\bar{x}})$ ist eine lokale Isometrie, wie es aus dem nachfolgenden kommutativen Diagramm ersichtlich ist:

$$\begin{tikzcd}
\overline{M} & I_x \times S_x \arrow[l, hook'] \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "p_x"'] & & S_y \times I_y \\
& \overline{M}/H & P_x \arrow[l, hook'] \arrow[ur, "\text{Hochhebung}"'] &
\end{tikzcd}$$

Daraus und aus dem einfachen Zusammenhang von $\overline{M} \underset{T}{=} \boldsymbol{R} \times \overline{N}$ folgt die Behauptung (a).

(b) Diese Behauptung folgt sofort aus (a).

Bemerkung. Die Aussage (b) des vorigen Satzes ist das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit. Die Aussage (a) ist deshalb getrennt formuliert, weil man bekanntlich eine allgemeine Mothode hat, die Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit vorgegebener universeller Riemannscher Überlagerung zu konstruieren [14, Chap. 2, Lemma 2.3.10 und Th. 2.3.16].

2. Anwendungen

Satz 2.1. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit wie im Satz* 1.6; *ferner operiere $I_0(M)$ H-transversal auf M. Wenn dazu M als topologischer Raum genau* 2 *Enden hat* [1, § 2], *gilt folgendes*:

(a) $I_0(M) \cong \boldsymbol{R} \times K$ (*vgl. Satz von Hano, z.B. in* [9, Chap. VI, 3.5]), *wobei K eine zusammenhängende, kompakte Lie-Gruppe mit* $\dim K \leq \frac{1}{2}n(n-1)$ *ist* (*diese Behauptung gilt auch ohne die H-Transversalität*); *falls M darüber hinaus einfach-zusammenhängend ist, gilt $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times N$, wobei N eine einfach-zusammenhängende, kompakte, Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.*

(b) *Sei* $\dim K = \frac{1}{2}n(n-1)$ *und* M *einfach-zusammenhängend*; *dann ist* $n \neq 2$ *und gilt* $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times S^{n-1}$ *oder* $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times N$, *wobei* N *ein einfach-zusammenhängender*, *kompakter*, *hyperbolischer Raum ist.*

Beweis. (a) Wegen der Def. 1.5 enthält $I_0(M)$ eine zu $\boldsymbol{R}$ isomorphe Untergruppe H, die eigentlich auf M operiert; da die Punktweise-Konvergenz mit jener der kompakt-offenen Topologie in $I(M)$ übereinstimmt [9, Chap. I, Th. 4.7, Lemma 5] und der natürliche Homomorphismus

$$G \to \{\text{Gruppe der Homöomorphismen von } M\}$$

bei einer eigentlichen Aktion (G, M) offen bezüglich der Punktweisen-Konvergenz nach [12, Prop. 1.1.7] ist, ist $H \subset I_0(M)$ lokal-kompakt also abgeschlossen, womit $I_0(M)$ nicht kompakte Lie-Gruppe ist (vgl. z.B. [8, Chap. II, Th. 1.2]); daraus, aus dem Hilfss. 1.4 und aus [1, S. 459] folgt die Aussage über $I_0(M)$. Nach dem Lemma 1.2 gilt $M \underset{D}{=} \boldsymbol{R} \times N'$, wobei N' ein globaler Schnitt der Aktion von $H \subset I_0(M)$ ist, womit K auf N' nach [12, Prop. 1.3.2] operiert; diese Aktion ist effektiv also einer Aktion durch Isometrien äquivalent [3, S. 305]; daraus und aus [8, Chap. II, Th. 3.1] folgt die Behauptung über die Dimension von K. Die letzte Behauptung ist wie folgt zu zeigen: Nach dem Satz 1.6 (b) gilt $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times N$; da M genau 2 Enden (wie $\boldsymbol{R}$) hat, muß N nach [5, Kap. 1, § 3] kompakt sein.

(b) Wie in (a) gilt $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times N$. Der Fall $n = 2$ ist deshalb ausgeschlossen, weil dann N eine kompakte 1-dimensionale Mannigfaltigkeit also zu S^1 isomorph sein sollte, womit M nicht einfach-zusammenhängend wäre. Nun N ist $(n-1)$-dimensional und die Behauptung folgt aus [8, Chap. II, Th. 3.1].

Bemerkungen. (a) Der Satz 1.6 (b) in Verbindung mit [8, Chap. II, Th. 3.1] hat als Folgerung, daß $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R}^n$ oder $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times N$ gilt, wobei N ein einfach-zusammenhängender, hyperbolischer Raum ist, wenn M einfach-zusammenhängend ist und $I_0(M)$ einerseits maximale Dimension hat und andererseits H-transversal auf M operiert.

(b) Analog: Der Satz 1.6 (b) in Verbindung mit [8, Chap. II, Th. 3.3] klassifiziert diejenigen einfach-zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten M, für welche $I(M)$ eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe G der Dimension $1 + \frac{1}{2}n(n-1)$ enthält, die H-transversal auf M operiert. Dabei soll vorausgesetzt werden, daß $n > 4$ gilt. Während die Fälle $n = 1, 2$ einfach sind, gilt die nachfolgende

Proposition 2.2. *Voraussetzungen wie in* (b) *oben*; *dann gilt*:

(a) *Für* $n = 3$ *gilt* $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R}^3$ *oder* $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times S^2$.

(b) *Für* $n = 4$ *gilt* $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R}^4$ *oder* $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R} \times S^3$ *oder* $M \underset{R}{=} \boldsymbol{R}^2 \times S^2$.

Beweis. (a) In diesem Fall ist M homogen (: $I(M)$ operiert transitiv auf M) [8, S. 49] also vollständig [14, Chap. 2, Lemma 2.7.3]; daraus, aus dem Satz 1.6 (b) und aus [13, Chap. IV, Th. 12.3] folgt die Behauptung. (Für Einzelheiten bezüglich der Mannigfaltigkeit M, der Gruppe G und der Aktion von G auf M vgl. [4, Chap. XII, §§ 8 und 9]).

(b) Auch in diesem Fall ist M homogen, wie es aus einer Bemerkung von Ishihara [7, S. 364] hervorgeht, so daß die Behauptung aus dem Satz 1.6. (b) und aus dem Hauptsatz von [7] folgt (vgl. auch [13, Chap. IV, Th. 12.3]).

Added in proof. Satz 1.6 führt zu einer notwendingen und hinreichenden Bendingung für die Existenz (Riemannscher) $\boldsymbol{R}^k$-Faktoren in einer Mannigfaltigkeit; entsprechende Resultate werden demnächst veröffentlicht.

Literatur

[1] H. Abels, *Enden von Räumen mit eigentlichen Transformationsgruppen*, Comment Math. Helv. **47** (1972) 457–473.

[2] N. P. Bhatia & G. P. Szegö, *Stability theory of dynamical systems*, Springer, Berlin, 1970.

[3] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972.

[4] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.

[5] H. Freudenthal, *Über die Enden topologischer Räume und Gruppen*, Math. Z. **33** (1931) 692–713.

[6] H. W. Guggenheimer, *Differential geometry*, McGraw-Hill, New York, 1963.

[7] S. Ishihara, *Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions*, J. Math. Soc. Japan **7** (1955) 345–370.

[8] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer, Berlin, 1972.

[9] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. I, Interscience, New York, 1963.

[10] L. Markus, *Parallel dynamical systems*, Topology **8** (1969) 47–57.

[11] D. Montgomery & L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience, New York, 1966.

[12] R. S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. **73** (1961) 295–323.

[13] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, North-Holland, Amsterdam, 1955.

[14] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill, New York, 1967.

Universität Bielefeld