

## INVARIANTS DIFFERENTIELS D'UN PSEUDOGRUPE DE LIE. I

A. KUMPERA

Dans deux mémoires célèbres [41], [42] Sophus Lie a esquissé une théorie générale d'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles arbitraires, ses méthodes étant basées sur la structure du pseudogroupe des transformations locales qui laissent invariante l'équation donnée. Toute l'oeuvre de Sophus Lie est en fait dominée par le problème fondamental de l'intégration des équations différentielles, [44]. Très tôt Lie s'aperçoit que la plupart des équations pour lesquelles ont été développées des méthodes d'intégration jouissaient en commun d'une propriété fondamentale, celle d'être invariantes par les opérations d'un groupe ou groupe local de transformations, l'intégration de ces équations étant étroitement liée à la structure de ce groupe. C'est à propos des équations dont la solution générale ne dépend que d'un nombre fini de paramètres que Lie introduit la notion de groupe fini et continu à  $n$  paramètres, [39]. L'introduction des groupes continus infinis est motivée par les équations dont la solution générale dépend de fonctions arbitraires d'un certain nombre de variables. Non seulement il unifie et généralise les diverses méthodes d'intégration, [44], mais développe ensuite, après quinze ans de recherches, la théorie générale d'intégration qui s'appuie sur la structure des groupes continus finis ou infinis (pseudogroupes de Lie).

Soit  $\Phi$  une équation différentielle invariante par l'action d'un pseudogroupe de transformations locales  $\Gamma$  (en générale non transitif) et donnons nous une suite normale

$$(1) \quad \text{Id} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_n = \Gamma$$

de sous-pseudogroupes de  $\Gamma$ . Dans ces conditions, Lie ramène le problème de l'intégration de  $\Phi$  à celui de l'intégration de  $n + 1$  équations différentielles auxiliaires  $\Phi_i$  parmi lesquelles les  $n$  premières sont invariantes par l'action des pseudogroupes quotients  $\Gamma_{i+1}/\Gamma_i$  et sont automorphes, c'est-à-dire, l'intransitivité de l'action du pseudogroupe est en un sens minimale. Or, l'intégration de  $\Gamma$  sera accomplie par une méthode récurrente en intégrant de proche en proche les équations  $\Phi_i$ . Si  $\Phi$  est intégrable il en est de même de tous les  $\Phi_i$

---

Communicated by D. C. Spencer, January 12, 1974. Ce travail a été subventionné en partie par le Consiglio Nazionale delle Ricerche (Italie), le Conseil National de Recherches du Canada, octroi A-5604, et le Ministère de l'Éducation du Québec.

et réciproquement. Par conséquent, les obstructions à l'intégrabilité de  $\Phi$  se montreront être des obstructions à l'intégrabilité de certaines équations  $\Phi_i$ . Remarquons finalement que l'intégration d'une équation automorphe (e.g., l'équation  $\Phi_i$ ) est étroitement liée à la structure de son pseudogroupe d'opérateurs; en effet, une telle équation est essentiellement un quotient de l'équation différentielle définissant les transformations locales du pseudogroupe en question.

La situation la plus intéressante est celle où la suite (1) est une suite de Jordan-Hölder (les quotients sont simples). En effet, une fois connue la classification des pseudogroupes simples (non transitifs), le problème d'intégrer  $\Phi$  se ramènera à l'étude d'un nombre fini d'équations différentielles invariantes par des pseudogroupes connus, ces équations invariantes pouvant à leur tour être classifiées.

Les équations auxiliaires  $\Phi_i$  s'obtiennent comme quotients successifs de l'équation  $\Phi$ , le passage au quotient étant réalisé modulo les *invariants différentiels* du pseudogroupe  $\Gamma$  ainsi que des sous-pseudogroupes  $\Gamma_i$  qui apparaissent dans la suite (1). Ce passage au quotient est possible grâce à des propriétés de finitude de ces invariants, ce qui leur donne une structure particulièrement intéressante. La notion d'invariant différentiel attaché à des objets géométriques est très ancienne. Pourtant, ce n'est que dans ses travaux sur les équations différentielles invariantes par des transformations de contact, [36], que Lie est conduit à considérer la notion plus générale et plus adéquate d'invariant différentiel attaché à un pseudogroupe de transformations, notion qu'il dégage en toute sa généralité dans [38].

Pour aboutir à une telle théorie d'intégration il faudra donc au préalable

- a) étudier la structure des invariants différentiels attachés à un pseudogroupe de Lie,
- b) décrire, à l'aide des invariants différentiels, le procédé de réduction de l'équation  $\Phi$  permettant de construire les équations auxiliaires  $\Phi_i$ ,
- c) étudier la structure des pseudogroupes réels (non transitifs), en particulier l'existence de suites de Jordan-Hölder et la détermination des pseudogroupes simples,
- d) étudier et classifier les équations différentielles invariantes et automorphes par un pseudogroupe simple.

Dans cet article nous décrivons la structure des invariants différentiels c'est-à-dire la première étape ci-dessus. Quelques indications d'un début de (b) se trouvent dans [25]. Remarquons que Johnson [21] et Oliva [56] ont déjà étudié la réduction d'une équation différentielle  $\Phi$ . Pourtant ces auteurs n'attachent aucune importance à la structure des invariants différentiels qui semble au coeur de la question. Des exposés classiques se trouvent également dans Halphen [19], Tresse [65], Medolaghi [49], Vessiot [66], [67] et plus tard Amaldi [1]. Citons enfin les travaux de Buttin-Molino [4] et Molino [51], [52] où des méthodes de réduction semblables sont appliquées dans l'étude du problème

d'équivalence pour les presque  $\Gamma$ -structures.

En ce qui concerne (c) de nombreux travaux sont parus surtout dans le cas transitif (voir bibliographie). Contentons nous simplement à dire que l'existence, dans le cas transitif, de suites Jordan-Hölder *généralisées* a été démontrée par Guillemin [15]; voir aussi [3].

Le problème que nous traitons ici est le suivant. Etant donnée une famille  $\mathcal{L}$  de champs de vecteurs locaux sur une variété  $P$  (pseudogroupe infinitésimal) nous voulons étudier les propriétés des intégrales premières (invariants différentiels) des trajectoires définies par les prolongements de tous les ordres de  $\mathcal{L}$  aux variétés de jets. En général nous obtenons ainsi une infinité d'invariants différentiels indépendants. Moyennant des hypothèses de régularité raisonnables, il est possible de trouver un nombre fini de ces invariants (un système fondamental) de telle sorte que tous les autres invariants s'obtiennent à partir de ceux-ci par certaines opérations de dérivation. Cette étude présente essentiellement deux problèmes. Le premier consiste à définir des dérivations, les dérivations *formelles*, à l'aide desquelles nous pourrions obtenir de nouveaux invariants différentiels à partir d'invariants connus. Le premier chapitre est consacré à cette question. Nous y étudions deux types de dérivations à savoir les dérivations *formelles et holonomes*, ces dernières étant canoniquement associées aux prolongements de champs de vecteurs. Les propriétés recherchées résultent de la comparaison de deux dérivations, une formelle et l'autre holonome; le résultat principal nous dit que le crochet d'une dérivée formelle avec une dérivée holonome est encore une dérivée formelle (formules fondamentales). Le deuxième problème consiste d'une part à réduire successivement les données géométriques (forme réduite du prolongement holonome) et d'autre part à développer des techniques auxiliaires (scission canonique) de telle sorte à pouvoir appliquer les méthodes cohomologiques de D. C. Spencer pour obtenir des propriétés de stabilité asymptotique pour les noyaux des prolongements successifs de  $\mathcal{L}$ . Ces propriétés sont l'ingrédient principal dans la démonstration des théorèmes de finitude. Les questions préalables sont traitées dans le deuxième chapitre. Dans le chapitre III nous démontrons les deux résultats principaux: le théorème de stabilité asymptotique et les diverses formes du théorème de finitude. Le dernier chapitre est consacré à des exemples. En outre, une description plus détaillée introduit chacun des trois premiers chapitres. Les démonstrations qui se réduisent à des arguments classiques ou à des simples vérifications sont la plupart des fois supprimées. Le lecteur trouvera les plus fastidieuses dans [23]. Enfin un résumé assez complet de ce travail se trouve dans [25].

Pour terminer, examinons quelques exemples. Soit  $M$  une variété munie d'un système de Pfaff  $\Sigma$  de rang localement constant. Indiquons par  $\mathcal{A}$  le système caractéristique associé à  $\Sigma$  (au sens de Cartan [7], [8]). Les feuilles intégrales de  $\mathcal{A}$  sont les caractéristiques de Cauchy de  $\Sigma$ . Indiquons finalement par  $\tilde{\Sigma}$  le système de Pfaff quotient de  $\Sigma$  modulo les caractéristiques de Cauchy (construction locale dans une carte feuilletante pour  $\mathcal{A}$ ). Les constructions ci-

dessus sont un cas particulier du théorème général. En effet, soit  $\Gamma$  le pseudogroupe des automorphismes locaux de  $\Sigma$  et  $\Gamma_0$  le sous-pseudogroupe qui laisse invariantes les caractéristiques de Cauchy. La réduction  $\tilde{\Sigma}$  correspond au quotient de  $\Sigma$  modulo les invariants différentiels du sous-pseudogroupe  $\Gamma_0$ , i.e., on considère la suite  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ . Le système de Pfaff quotient  $\tilde{\Sigma}$  est invariant par le pseudogroupe quotient  $\Gamma/\Gamma_0$  qui en fait est égal à l'ensemble de tous les automorphismes locaux de  $\tilde{\Sigma}$ . En outre, on sait bien que toute variété intégrale  $V$  de  $\tilde{\Sigma}$  (pas forcément de dimension maximale) se relève en la variété intégrale  $\rho^{-1}(V)$  de  $\Sigma$  où  $\rho$  est la projection quotient modulo les caractéristiques de Cauchy [7], [8], [24].

La méthode classique du multiplicateur de Jacobi pour une équation linéaire

$$(2) \quad \xi f = \Sigma \xi_i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0,$$

où  $\xi$  est un champ de vecteurs quelconque, consiste à chercher un multiplicateur de  $\xi$  c'est-à-dire une fonction  $\mu$  tel que  $\eta = \mu\xi$  soit unimodulaire (par rapport à une forme volume donnée). Le multiplicateur étant connu, l'intégration de l'équation (2) est équivalente à celle de  $\eta f = 0$ . Or, l'intégration de cette dernière équation, avec  $\eta$  unimodulaire, peut se ramener aux méthodes générales de Lie en considérant le pseudogroupe  $\Gamma$  de tous les automorphismes locaux unimodulaires qui préservent le champ  $\eta$  ainsi que le sous-pseudogroupe  $\Gamma_0$  de ceux qui, en outre, laissent invariantes les trajectoires de  $\eta$ . On démontre dans ce cas que le pseudogroupe quotient  $\Gamma/\Gamma_0$  est simple car c'est le pseudogroupe unimodulaire associé à une certaine forme volume quotient. Les méthodes de Lie redonnent les méthodes classiques [7], [22], [42].

Le lecteur trouvera d'autres exemples dans [7], [39], [41], [42], [50], [67] et [68]. En particulier, dans le dernier chapitre de [41], Lie expose la théorie générale d'intégration pour les équations différentielles invariantes par certains pseudogroupes donnés. Ainsi par exemple il étudie la théorie générale d'intégration pour les équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue  $z$  de deux variables indépendantes  $x$  et  $y$  admettant le pseudogroupe  $\Gamma$  des transformations locales dont l'élément générique s'écrit

$$\varphi: X = f(x), \quad Y = y, \quad Z = z/f'(x),$$

$f$  étant une fonction arbitraire inversible. La transformation infinitésimale générique de  $\Gamma$  est de la forme

$$\xi = g(x) \frac{\partial}{\partial x} - g'(x)z \frac{\partial}{\partial z},$$

où  $g$  est une fonction arbitraire. Le théorème général qui se rattache à ces données est le suivant : *L'intégration d'une telle équation se ramène à l'intégra-*

tion successive de trois système différentiels ordinaires.

Dans le même ordre d'idées Medolaghi [50] étudie et classe les équations différentielles invariantes d'ordre deux dans l'espace à trois variables  $x, y, z$  qui admettent un pseudogroupe de transformations ponctuelles (i.e., opérant dans l'espace des variables  $x, y, z$ ) ou bien abélien ou bien localement isomorphe au pseudogroupe général de la droite  $\mathbf{R}$  (donc simple). En particulier il étudie les équations invariantes par le pseudogroupe dont la transformation finie générale s'écrit

$$\varphi: X = f(x), \quad Y = yf'(x), \quad Z = z + y(f''(x)/f'(x)),$$

$f$  étant une fonction arbitraire inversible et la transformation infinitésimale générale s'écrit

$$\xi = g(x)\frac{\partial}{\partial x} + g'(x)y\frac{\partial}{\partial y} + g''(x)y\frac{\partial}{\partial z},$$

où  $g$  est arbitraire. Cet exemple est repris plus tard par Vessiot [67].

A ce point il est intéressant d'observer que les premières recherches de Lie portent sur les équations différentielles ordinaires invariantes par des groupes continus finis. Il obtient le résultat suivant : *Un système d'équations différentielles ordinaires invariant et automorphe par l'action d'un groupe fini et continu  $\Gamma$  admettant une suite normale (1) dont les quotients successifs sont de dimension un (donc abéliens simples) s'intègre par quadratures*, [37], [47]. Les groupes de Lie qui admettent une telle suite de Jordan-Hölder ou encore ceux qui admettent une suite normale (1) à quotients abéliens sont précisément les groupes résolubles. En outre, le théorème ci-dessus s'étend à un système de Pfaff intégrable quelconque, [27]. Un corollaire du théorème ci-dessus est le résultat connu en mécanique sous le nom de théorème d'intégrabilité de Liouville-Cartan permettant d'intégrer un système Hamiltonien par quadratures une fois connues  $n$  intégrales premières indépendantes : *Soit  $M$  une variété de dimension  $2n + 1$  munie d'une 2-forme fermée  $\Omega$  de rang maximum et indiquons par  $\Sigma$  le système différentiel des caractéristiques de  $\Omega$ ; c'est un système de Pfaff de dimension 1. Si l'on connaît  $n$  automorphismes infinitésimaux  $\xi_i$  de  $\Omega$  indépendants et deux à deux en involution par rapport à  $\Omega$  le système  $\Sigma$  s'intègre par quadratures. Soit  $\Gamma$  le sous-groupe de Lie abélien, du groupe de tous les automorphismes de  $\Omega$ , engendré par l'algèbre de Lie abélienne  $[\xi_1, \dots, \xi_n]$ . L'équation  $\Sigma$  est invariante par  $\Gamma$  mais elle n'est pas automorphe (pour qu'elle le soit, il faut que le groupe  $\Gamma$  soit engendré par  $2n$  automorphismes infinitésimaux indépendants). Recopions la démonstration de [12, p. 265] dans sa version duale. Le système de Pfaff  $P$  engendré par les formes  $\pi_j = i(\xi_j)\Omega$  ( $\xi_j$  est le  $X_j$  de [12]) admet pour annulateur le champ d'éléments de contact engendré par  $\Sigma$  et les  $\xi_i$  ou encore par  $E, \xi_1, \dots, \xi_n$  où  $E$  est le champ car-*

actéristique. Soit  $N$  une variété intégrale de dimension  $n + 1$  de  $P$ . Les champs  $\xi_i$  ainsi que l'équation  $\Sigma$  sont tangents à  $N$  et leurs restrictions  $\eta_i$  laissent invariante l'équation  $\Xi$  obtenue par restriction de  $\Sigma$  à  $N$ . Le groupe  $\Gamma$  opère cette fois-ci de façon automorphe sur  $\Xi$  et les intégrales premières  $\omega_i|_N$  (suivant les notations de [12]) ne sont autres que les formes de Maurer-Cartan correspondant à la base  $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ . On discerne tout de suite une extension du théorème de Liouville-Cartan où la condition d'involution est remplacée par une condition plus faible. Le lecteur trouvera des théorèmes du même genre dans [7], [27] et [39].

Remarquons finalement que la théorie des invariants différentiels se présente désormais en tout problème d'équivalence locale relative à un pseudogroupe donné. L'ensemble de tous les invariants et, en particulier, un système fondamental fini représente l'ensemble de toutes les conditions nécessaires à l'équivalence. C'est ainsi que les invariants trouvent leur place dans plusieurs mémoires de E. Cartan lorsqu'il étudie l'équivalence locale pseudo-conforme d'hypersurfaces (ou familles d'hypersurfaces) réelles dans les espaces complexes, notamment dans [6]. Ils jouent également un rôle central dans la détermination de tous les sous-pseudogroupes d'un pseudogroupe donné, [5].

Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à MM. C. Ehresmann, J. -L. Koszul et B. Malgrange.

## INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS

- $\mathcal{F}_M$ : algèbre des fonctions  $C^\infty$  de la variété  $M$
- $\mathcal{O}_M$ : faisceau structural de  $M$  (germes de fonctions  $C^\infty$ )
- $TM = T$ : fibré tangent de  $M$
- $\underline{TM} = \underline{T}$ : faisceau des germes de champs de vecteurs de  $M$
- $T^*M = T^*$ : fibré cotangent de  $M$
- $\underline{T^*M} = \underline{T^*}$ : faisceau des germes de formes différentielles linéaire de  $M$
- $\wedge T^* = \bigoplus \wedge^p T^*$ : fibré en algèbres extérieures
- $S^*T^* = \bigoplus S^k T^*$ : fibré en algèbres symétriques
- $\vee$ : produit symétrique
- $\wedge M^*$ : algèbre des formes différentielles extérieures de  $M$
- $T\phi = \phi_*$ : application linéaire tangente
- $T^*\phi = {}^tT\phi = \phi^*$ : application linéaire cotangente
- $VP$ : sous-fibré des vecteurs  $\pi$ -verticaux de  $P$  (tangents aux fibres)
- $HP$ : sous-fibré des vecteurs  $\pi$ -horizontaux de  $P$  (lorsque  $P = M \times N$ )
- $\times_M, \times_P$ , etc.: produit fibré
- $\pi: P \longrightarrow M$ : fibration = submersion surjective
- $\pi_2: P \longrightarrow N$ : projection canonique lorsque  $P = M \times N$
- $p: E \longrightarrow P$ : fibré vectoriel localement trivial

- $\eta: E \xrightarrow{p} P \xrightarrow{\pi} M$ : fibration de Lie de base  $\pi$ ,  $\eta = \pi \circ p$   
 $\eta: VP \xrightarrow{p} P \xrightarrow{\pi} M$ : fibration de Lie verticale  
 $\zeta: TP \xrightarrow{q} P \xrightarrow{\pi} M$ : fibration de Lie tangente  
 $\mu: P \times_M TM \xrightarrow{r} P \xrightarrow{\pi} M$ : fibration de Lie horizontale  
 $\underline{P}$ : faisceau des germes de sections locales de  $\pi$   
 $J_\lambda E$ : faisceau  $\underline{P}$  muni de sa structure différentiable canonique en tant qu'espace étalé sur  $M$   
 $\underline{E} = J_\lambda E$ : faisceau des germes de sections locales de  $p$   
 $\underline{E}(\S 17)$ : faisceau des germes de sections locales de  $\eta$   
 $\tilde{J}_\lambda E$ : faisceau des germes de sections locales de  $\eta$   
 $J_\lambda p: \tilde{J}_\lambda E \longrightarrow J_\lambda P$ : faisceau en  $\mathcal{O}_{J_\lambda}$ -modules de base  $J_\lambda P$   
 $J_\lambda'$ : foncteur "jets locaux"  
 $T(P, M)$ : champs de vecteurs  $\pi$ -projetables de  $P$   
 $\underline{T}(P, M)$ : germes de champs de vecteur  $\pi$ -projetables de  $P$   
 $\Gamma(E)$ : sections globales de  $E$   
 $\Gamma_{\text{loc}}(E)$ : sections locales de  $E$   
 $\chi(A)$ : algèbre des dérivations de l'anneau  $A$   
 $\chi(A, B)$ : sous-algèbre des éléments de  $\chi(A)$  qui préservent le sous-anneau  $B$   
 $\chi(M) = \chi(\mathcal{F}_M)$ : algèbre des champs de vecteurs de  $M$   
 $\chi(\wedge J^*)$ : algèbres des dérivations de  $\wedge J^*$   
 $\chi(\mathcal{F}_N, \mathcal{F}_M, \phi)$ : dérivations de  $\mathcal{F}_N$  dans  $\mathcal{F}_M$  par rapport à  $\phi: M \longrightarrow N$   
 $\chi(\wedge N^*, \wedge M^*, \phi)$ : dérivations de  $\wedge N^*$  dans  $\wedge M^*$  par rapport à  $\phi: M \longrightarrow N$   
 $\chi(P, M) = \chi(\mathcal{F}_P, \mathcal{F}_M)$ : champs de vecteurs  $\pi$ -projetables de  $P$   
 $\chi_\lambda(P, M)$ : champs de vecteurs localement  $\pi$ -projetables de  $P$   
 $J_k P = J_k$ :  $k$ -jets des sections locales de  $P \xrightarrow{\pi} M$   
 $J_\infty P = J_\infty = J = \lim \text{proj} (J_k, \rho_{hk})$ : jets infinis  
 $\alpha_k, \beta_k, \rho_{hk}$ : projections canoniques de  $J_k$ ; source, but et  $k$ -jet  $\mapsto h$ -jet  
 $j_k: \underline{P} \longrightarrow J_k P$ : opérateur différentiel canonique d'ordre  $k$  pour la fibration  $P \longrightarrow M$   
 $J_k(M, N)$ :  $k$ -jets de  $M$  dans  $N$   
 $\alpha'_k, \beta'_k, \rho'_{hk}$ : projections canoniques de  $J_k(M, N)$ ; source, but et  $k$ -jet  $\mapsto h$ -jet  
 $\Pi_k(M)$ : groupoïde des  $k$ -jets inversibles de  $M$   
 $\Pi_k(M, N)$ :  $k$ -jets de rang maximum (pour la partie linéaire) de  $M$  dans  $N$   
 $\mathcal{U}_k = (J_k \pi_2)^{-1} \Pi_k(M, N)$ : éléments de  $J_k P$ ,  $P = M \times N$ , qui se projettent dans  $\Pi_k(M, N)$  par  $\pi_2: M \times N \longrightarrow N$   
 $T_k(P, M)$ :  $k$ -jets de champs locaux  $\pi$ -projetables de  $P$   
 $\tilde{J}_k E$ :  $k$ -jets des sections locales de la fibration de Lie  $\eta: E \longrightarrow P \longrightarrow M$   
 $J_k p: \tilde{J}_k E \longrightarrow J_k P$ : fibré vectoriel de base  $J_k P$   
 $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k, \tilde{\rho}_{hk}$ : projections canoniques de  $\tilde{J}_k E$ ; source, but et  $k$ -jets  $\mapsto h$ -jet

$\tilde{J}_k: \underline{E} \longrightarrow \underline{J}_k E$ : opérateur différentiel canonique d'ordre  $k$  pour la fibration de Lie  $\underline{E} \longrightarrow P \longrightarrow M$

$J_k$ : foncteur "k-jets" pour les fibrations  $P \longrightarrow M$

$\tilde{J}_k$ : foncteur "k-jets" pour les fibrations de Lie  $\underline{E} \longrightarrow P \longrightarrow M$

$\tilde{\alpha}_k: \tilde{J}_k E \xrightarrow{J_k^p} J_k P \xrightarrow{\alpha_k} M$ : fibration de Lie de base  $\alpha_k$ , extension aux  $k$ -jets de  $\underline{E} \longrightarrow P \longrightarrow M$

$\tilde{J}_k^0 TP$ : éléments de  $\tilde{J}_k TP$  qui induisent le vecteur nul dans  $TM$  (par la projection  $T\pi \circ \tilde{\beta}_k$ )

$J_k^0 TM$ : éléments de  $J_k TM$  dont le but est nul

$A_k = \mathcal{F}_{J_k}$ : fonctions  $C^\infty$  de  $J_k$

$A_0 = \mathcal{F}_P$ : fonctions  $C^\infty$  de  $P = J_0$

$A_{-1} = B = \mathcal{F}_M$ : fonction  $C^\infty$  de  $M$

$A = \lim \text{ind} (A_k, \rho_{hk}^*)$ .

$\wedge J_k^*$ : algèbre des formes différentielles extérieures de  $J_k$

$\wedge J^* = \lim \text{ind} (\wedge J_k^*, \rho_{hk}^*)$ .

$\wedge^l J^* = \lim \text{ind} (\wedge^l J_k^*, \rho_{hk}^*)$ .

$\phi^k, \psi^k, \phi_t^k$  etc.: prolongement aux  $k$ -jets des applications  $\phi, \psi, \phi_t$  etc. de  $P, M$  ou  $N$

$\tau X = T(j_k \sigma)(T_x M) \subset T_Y J_k$  où  $X = j_{k+1} \sigma(x) \in J_{k+1}$  et  $Y = \rho_k X$ .

$\mathcal{O}_k$ : faisceau structural de  $J_k$  (i.e.,  $\mathcal{O}_{J_k}$ )

$A_k: J \times_{J_k} \mathcal{O}_k$ .

$A_{-1} = B$ .

$A = \lim \text{ind} (A_k, \rho_{hk}^*)$ .

$\wedge J_k^*$ : faisceau des germes de formes différentielles extérieures de  $J_k$

$\wedge J_k^* = J \times_{J_k} \wedge J_k^*$ .

$\wedge J^* = \lim \text{ind} (\wedge J_k^*, \rho_{hk}^*)$ .

$\chi(A)$ : algèbre des dérivations de  $A = \lim \text{ind} (A_k, \rho_{hk}^*)$

$\chi(\wedge J^*)$ : algèbre des dérivations de  $\wedge J^* = \lim \text{ind} (\wedge J_k^*, \rho_{hk}^*)$

$\chi(A)$ : faisceau des germes de dérivations de  $A = \lim \text{ind} (A_k, \rho_{hk}^*)$

$\chi(\wedge J^*)$ : faisceau des germes de dérivations de  $\wedge J^* = \lim \text{ind} (\wedge J_k^*, \rho_{hk}^*)$

$\chi(A_0) \simeq J \times_P \underline{TP}$ : faisceau des germes de dérivations de  $A_0$

$\chi(A_0, B) \simeq J \times_P \underline{T(P, M)}$ : faisceau des germes de dérivations de  $A_0$  qui préservent  $B$

$\Phi$ : variation infinitésimale de  $\alpha_k$

$\lambda_{k+1}: J_{k+1} \times_M TM \longrightarrow TJ_k$ : relèvement holonome d'ordre  $k$

$\Phi_{k+1} = \lambda_{k+1} \circ (\text{Id} \times \Phi): J_{k+1} \longrightarrow TJ_k$ : variation infinitésimale de  $\rho_{k, k+1}$  associée à  $\Phi$

$\Phi_{k+1} = \lambda_{k+1} \circ (\text{Id} \times \tau_{k+1} D): J_{k+1} \longrightarrow TJ_k$ : variation infinitésimale de  $\rho_{k, k+1}$  associée à l'opérateur différentiel  $D$

$\mathcal{L}(\xi) = \xi$ : dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs  $\xi$

$i(\xi)$ : produit intérieur par rapport au champ de vecteurs  $\xi$

$\partial_\Phi$ : dérivée de Lie par rapport à la variation infinitésimale  $\Phi$



- $\partial_\phi$ : dérivée formelle par rapport à la variation infinitésimale  $\Phi$ ; élément de  $\chi(\wedge J^*)$   
 $\bar{\partial}_\phi = \partial_\phi|A$ .
- $\partial_D$ : dérivée formelle par rapport à l'opérateur différentiel  $D$ ; élément de  $\chi(\wedge J^*)$   
 $\bar{\partial}_D = \partial_D|A$ .
- $i_\phi$ : produit intérieur par rapport à la variation infinitésimale  $\Phi$
- $\bar{p}_k\theta$ : prolongement canonique à  $J_k$  du champ de vecteurs  $\theta$  de  $P$
- $p_\theta$ : dérivée holonome par rapport au champ de vecteurs  $\theta$  de  $P$ ; élément de  $\chi(\wedge J^*)$   
 $\bar{p}_\theta = p_\theta|A$ .
- $p_k: J_k TP \longrightarrow TJ_k$ : forme réduite de prolongement holonome
- $p_k: J_k(J_\lambda \times_P VP) \times_{J_\lambda} TJ_\lambda \longrightarrow J_\lambda \times_{J_k} TJ_k$ : deuxième réduction du prolongement holonome
- $p_k^s\theta$ : prolongement par la source du champ de vecteurs  $\theta$  de  $M$
- $p_k^s: J_k TM \times_M J_k(M, N) \longrightarrow HJ_k(M, N)$ : forme réduite du prolongement par la source
- $p_k^b\theta$ : prolongement par le but du champ de vecteurs  $\theta$  de  $N$
- $p_k^b: J_k(M, TN) \longrightarrow VJ_k(M, N)$ : forme réduite du prolongement par le but
- $p$ : prolongement algébrique
- $\mathcal{R}(\phi)$ : ensemble des variations infinitésimales  $\Phi: M \longrightarrow TN$  de l'application  $\phi: M \longrightarrow N$  (relèvements locaux de  $\phi$  par rapport à la projection  $TN \longrightarrow N$ )
- $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}(\alpha_k)$ : ensemble des variations infinitésimales de  $\alpha_k$
- $\mathcal{R} = \lim \text{ind} (\mathcal{R}_k, \rho_{hk}^*)$ .
- $\mathcal{D}_k$ : ensemble des opérateurs différentiels d'ordre  $\leq k$  de  $P$  vers  $TM$   
 $\mathcal{D} = \cup \mathcal{D}_k$ .
- $\mathcal{D} = \partial(\mathcal{D}) = \partial(\mathcal{R}) \subset \chi(\wedge J^*)$ : algèbre des dérivations formelles  
 $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}|A, \bar{\mathcal{D}} \subset \chi(A)$ .
- $\mathcal{P} = p(\chi(P)) \subset \chi(\wedge J^*)$ : algèbre des dérivations holonomes  
 $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}|A, \bar{\mathcal{P}} \subset \chi(A)$ .
- $\mathcal{R}_k$ : faisceau des germes de variations infinitésimales de  $\alpha_k$
- $\mathfrak{R}_k = J \times_{J_k} \mathcal{R}_k$ .
- $\mathfrak{R} = \lim \text{ind} (\mathfrak{R}_k, \rho_{hk}^*)$ .
- $\mathcal{D} = \partial(\mathfrak{R}) \subset \chi(\wedge J^*)$ : faisceau des germes de dérivations formelles  
 $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}|A, \bar{\mathcal{D}} \subset \chi(A)$ .
- $\mathfrak{P} = p(\chi(A_0)) \subset \chi(\wedge J^*)$ : faisceau des germes de dérivations holonomes  
 $\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}|A, \bar{\mathfrak{P}} \subset \chi(A)$ .
- $\mathcal{L}$ : faisceau de Lie sur  $P$
- $\mathcal{L}_k$ : faisceau de Lie sur  $J_k$  prolongement canonique de  $\mathcal{L}$
- $\mathcal{L}_J = J \times_P \mathcal{L} \subset \chi(A_0)$ .
- $(\mathcal{L}_k)_J = J \times_{J_k} \mathcal{L}_k \subset \chi(A_k)$ .
- $L = L(\mathcal{L}) \subset J_\lambda(J_\lambda \times_P TP)$ : faisceau de Lie réduit associé à  $\mathcal{L}$

- $L_V = J_\lambda i \circ J_\lambda S(L) \subset J_\lambda(J_\lambda \times_P VP)$ : projection verticale de  $L$   
 $L_k = J_k L \subset J_k(J_\lambda \times_P TP)$ :  $k$ -jets de sections locales de  $L \longrightarrow J_\lambda$   
 $\tilde{L}_k = \tilde{J}_k(L) \subset \tilde{J}_k TP$ :  $k$ -jets de sections locales de  $L \longrightarrow M$   
 $(L_V)_k = \tilde{J}_k i \circ S_k(L_k) = J_k(L_V) \subset J_k(J_\lambda \times_P VP)$ : projection verticale de  $L_k$   
 $\Delta_k$ : champ d'éléments de contact de  $J_k$  défini par  $\mathcal{L}_k$   
 $\Delta_{k-1,k}$ : noyau de  $T\rho_{k-1,k}: \Delta_k \longrightarrow \Delta_{k-1}$   
 $\mathcal{M}$ : faisceau de Lie sur  $M$   
 $\mathcal{N}$ : faisceau de Lie sur  $N$   
 $\mathcal{S}_k$ : faisceau des germes d'invariants différentiels d'ordre  $k$  de  $\mathcal{L}$   
 $\mathfrak{S}_k: J \times_{J_k} \mathcal{S}_k$   
 $\mathfrak{S} = \lim \text{ind} (\mathfrak{S}_k, \rho_{h,k}^*) \subset \mathcal{A}$ : faisceau des germes d'invariants différentiels de  $\mathcal{L}$   
 $\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \cup \mathfrak{D}_k(\mathcal{L}) \subset \chi(\mathcal{A})$ : faisceau des germes de dérivations formelles  $\mathcal{L}$ -admissibles  
 $\mathfrak{R}(\mathcal{L}) = \cup \mathfrak{R}_k(\mathcal{L}) \subset \mathfrak{R}$ : faisceau des germes de variations infinitésimales  $\mathcal{L}$ -admissibles  
 $\mathfrak{R}^0(\mathcal{L}) = \{\Phi \in \mathfrak{R} \mid \partial_\theta \mathfrak{S} = 0\}$ .  
 $\mathfrak{R}^1(\mathcal{L}) = \{\Phi \in \mathfrak{R} \mid [\Phi, \theta] = 0, \theta \in \mathcal{L}_J\}$ .  
 $[ , ]$ : crochet dans les algèbres de Lie  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathfrak{R}$   
 $[ , ]$ : crochet dans toute algèbre de dérivations  
 $[ , ]$ : crochet dans  $\mathcal{R} \times \chi(P)$  et  $\mathfrak{R} \times \chi(A_0)$   
 $\Xi: \mathcal{R} \times \chi(P) \longrightarrow \mathcal{R}, \Xi(\Phi, \theta) = [\Phi, \theta]$ .  
 $\delta$ : opérateur de  $\delta$ -cohomologie de Spencer  
 $\delta_i$ : dérivations formelles admissibles de Lie  
 $\partial_i$ : dérivations formelles associées aux champs de vecteurs  $\partial/\partial x^i$   
 $A = (\partial_i f_j)$ : matrice jacobienne aux dérivées formelles

## CHAPITRE I. DERIVATIONS DANS LES ESPACES DE JETS

Nous étudions deux classes de dérivations dans l'algèbre des formes différentielles de  $J_\infty$ . La première classe, celle des dérivations holonomes intervient dans les définitions d'invariance et la deuxième, celle des dérivations formelles, nous donne les opérations qui permettent de remonter de façon non triviale un objet d'ordre  $k$  à un objet d'ordre  $k + 1$  et constitue l'algorithme à l'aide duquel nous démontrerons des théorèmes de finitude pour les invariants différentiels. Une dérivée holonome est une dérivée de Lie par rapport au prolongement canonique d'un champ de vecteurs et une dérivée formelle est une dérivée de Lie par rapport à un opérateur différentiel à valeurs dans les champs de vecteurs et donne comme cas particulier la dérivée formelle (ou totale) bien connue pour les fonctions sur les espaces de jets. Ces deux classes se rassemblent en une algèbre de Lie produit semi-direct de l'idéal des dérivations formelles et de la sous-algèbre des dérivations holonomes. Toutes les données sont désormais réelles de classe  $C^\infty$  et de dimension finie.

### 1. Notations et rappels

Soit  $A$  une algèbre associative sur un corps commutatif  $K$ . Nous indiquons par  $\chi(A)$  l'algèbre de Lie des dérivations de  $A$ . L'algèbre  $\chi(A)$  est un module sur le centre de  $A$ . Soit  $M$  une variété.  $TM$  indique le fibré tangent,  $\mathcal{F}_M$  l'algèbre des fonctions différentiables de  $M$  et  $\chi(M)$  la  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie et  $\mathcal{F}_M$ -module des champs de vecteurs de  $M$ . Si  $\pi : E \rightarrow M$  est une application,  $\Gamma(E)$  indique l'ensemble des sections globales de  $\pi$ . On a

$$\chi(M) = \Gamma(TM) \simeq \chi(\mathcal{F}_M) .$$

Prenons maintenant deux variétés  $M, N$  et soit

$$\phi : M \rightarrow N$$

une application.

Définissons les objets suivants :

i) Soit  $\mathcal{R}(\phi)$  l'ensemble des relèvements  $\Phi : M \rightarrow TN$  de  $\phi$  par rapport à  $TN \rightarrow N$ , autrement dit,  $\Phi$  est une variation infinitésimale de  $\phi$ . L'ensemble  $\mathcal{R}(\phi)$  est muni d'une structure naturelle de  $\mathcal{F}_M$ -module déduite de la structure linéaire de  $TN$  et isomorphe à celle de  $\Gamma(M \times_N TN)$ . On appelle  $\mathcal{R}(\phi)$  le module des variations infinitésimales de  $\phi$ .

ii) Soit  $\phi^* : \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_M$  le morphisme défini par  $\phi^*g = g \circ \phi$ . L'algèbre  $\mathcal{F}_M$  est munie d'une structure naturelle de  $\mathcal{F}_N$ -module en posant  $gf = (\phi^*g)f$ . Indiquons par  $\chi(\mathcal{F}_N, \mathcal{F}_M, \phi)$  l'ensemble des dérivations de  $\mathcal{F}_N$  dans  $\mathcal{F}_M$  par rapport à cette structure de module. Un élément  $\partial \in \chi(\mathcal{F}_N, \mathcal{F}_M, \phi)$  est une application  $\mathbf{R}$ -linéaire  $\partial : \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_M$  qui vérifie  $\partial(gh) = (\partial g)h + g(\partial h)$ . L'ensemble  $\chi(\mathcal{F}_N, \mathcal{F}_M, \phi)$  a une structure naturelle de  $\mathcal{F}_M$ -module déduite de la structure d'anneau de  $\mathcal{F}_M$ . Soit  $\Phi \in \mathcal{R}(\phi)$  et posons  $(\partial_\Phi g)x = \langle \Phi x, dg \rangle$ .

**Proposition 1.1.** *Pour tout  $\Phi \in \mathcal{R}(\phi)$  on a  $\partial_\Phi \in \chi(\mathcal{F}_N, \mathcal{F}_M, \phi)$ , et l'application  $\Phi \in \mathcal{R}(\phi) \mapsto \partial_\Phi \in \chi(\mathcal{F}_N, \mathcal{F}_M, \phi)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{F}_M$ -modules.*

Soit  $\wedge M^*$  l'algèbre des formes différentielles extérieures de  $M$ . A l'aide du morphisme  $\phi^* : \wedge N^* \rightarrow \wedge M^*$ ,  $\phi^* = {}^tT\phi$ , on muni  $\wedge M^*$  d'une structure de bi-module, à gauche et à droite, sur l'algèbre  $\wedge N^*$ . Indiquons par  $\chi(\wedge N^*, \wedge M^*, \phi)$  l'ensemble des dérivations de  $\wedge N^*$  dans  $\wedge M^*$  par rapport à cette structure. L'ensemble  $\chi(\wedge N^*, \wedge M^*, \phi)$  est un module sur le centre de  $\wedge M^*$ . Soit  $\Phi \in \mathcal{R}(\phi)$  et  $x \in M$ . Il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x$  et une famille (différentiable) à un paramètre  $(\phi_t)$  d'applications de  $\mathcal{U}$  dans  $N$  tel que

$$\Phi|_{\mathcal{U}} = (\partial/\partial t)(\phi_t)_{t=0} .$$

La famille  $(\phi_t)$  est une variation locale de  $\phi$  engendrée par  $\Phi$ . Soit  $\omega \in \wedge N^*$ . On définit  $\partial_\Phi \omega \in \wedge M^*$  par recollement des

$$\partial_\Phi \omega|_{\mathcal{U}} = (\partial/\partial t)(\phi_t^* \omega)_{t=0} .$$

Appelons  $\partial_\phi\omega$  la dérivée de Lie de  $\omega$  suivant la variation infinitésimale  $\Phi$ . Cette dérivée vérifie les propriétés habituelles, à savoir :

a)  $\partial_\phi \in \chi(\wedge N^*, \wedge M^*, \phi)$  et  $\Phi \in \mathcal{A}(\phi) \mapsto \partial_\phi \in \chi(\wedge N^*, \wedge M^*, \phi)$  est un morphisme  $\mathbf{R}$ -linéaire injectif.

b)  $\partial_\phi \circ d = d \circ \partial_\phi$ .

c)  $\partial_\phi(\wedge^k N^*) \subset \wedge^k M^*$ . Si  $f \in \wedge^0 N^* = \mathcal{F}_N$  alors  $\partial_\phi f = \langle \Phi, df \rangle$ , (cf. ii).

d) Soit  $i_\phi: \wedge N^* \rightarrow \wedge M^*$  la dérivation de degré  $-1$  définie par

$$(i_\phi\omega)_x = \phi_x^*[i(\Phi x)\omega_{\phi(x)}].$$

$i_\phi$  est  $\mathcal{F}_M$ -linéaire par rapport à  $\Phi$  et  $i_\phi \circ i_\psi = -i_\psi \circ i_\phi$ . Les formules classiques s'étendent à

$$\partial_\phi = [i_\phi, d], \quad \partial_{f\phi} = f\partial_\phi + df \wedge i_\phi,$$

où  $f \in \mathcal{F}_M$ .

En outre, les propriétés (b) et (c) caractérisent les dérivations de Lie de  $\wedge N^*$  dans  $\wedge M^*$ , i.e., les dérivations produites par les variations infinitésimales de  $\phi$ . Remarquons finalement que la donnée de  $\Phi$  équivaut à la donnée d'une variation infinitésimale verticale (tangente à  $N$ )  $\tilde{\Phi}$  du graphe

$$\tilde{\phi} = \text{Id} \times \phi: M \rightarrow M \times N.$$

Pour tout  $x \in M$  il existe un champ de vecteurs local  $\xi$  au voisinage de  $\tilde{\phi}(x)$  tel que  $\tilde{\Phi} = \xi \circ \tilde{\phi}$  (au voisinage de  $x$ ). On peut par conséquent trouver des variations locales de  $\phi$  déduites de familles à un paramètre engendrées par  $\xi$  et toutes les propriétés de  $\partial_\phi$  résultent trivialement de la relation

$$\partial_\phi\omega = \tilde{\phi}^*[\mathcal{L}(\xi)\pi_N^*\omega]$$

et des propriétés analogues de la dérivée de Lie  $\mathcal{L}(\xi)$  suivant le champ de vecteurs  $\xi$ .

## 2. Opérateurs différentiels

Soit  $\pi: P \rightarrow M$  une fibration (submersion surjective). On indique par  $J_k P$ ,  $k \geq -1$ , la variété des  $k$ -jets de sections locales de  $\pi$ ;  $J_0 P = P$  et  $J_{-1} P = M$ . Les applications source  $\alpha_k: J_k P \rightarrow M$ , but  $\beta_k: J_k P \rightarrow P$  et  $\rho_{hk}: J_k P \rightarrow J_h P$  ( $k \geq h$ ) sont des fibrations. Soit  $\sigma$  une section locale de  $\pi$  et indiquons par  $j_k \sigma(x)$  le  $k$ -jet de  $\sigma$  au point  $x$ . L'application  $j_k \sigma$  est une section locale de  $\alpha_k$ . Indiquons finalement par  $\underline{P}$  le faisceau des germes de sections locales de  $\pi$ ;  $\alpha: \underline{P} \rightarrow M$  est un espace étalé sur  $M$ . Etant donnée une autre fibration  $\omega: Q \rightarrow M$ , un opérateur différentiel d'ordre  $\leq k$  de  $P$  vers  $Q$  est un morphisme  $D: \underline{P} \rightarrow \underline{Q}$  pour lequel il existe un morphisme fibré

$$\tau_k(D) : J_k P \rightarrow Q$$

vérifiant  $D = \tau_k(D) \circ j_k$  où  $j_k : P \rightarrow J_k P$  est l'opérateur canonique.  $\tau_k(D)$  est déterminé de façon unique par  $D$  et, pour  $k' \geq k$ ,

$$\tau_{k'}(D) = \tau_k(D) \circ \rho_{kk'}$$

Si  $D' : Q \rightarrow R$  est un opérateur d'ordre  $\leq l$ , alors  $D' \circ D$  est d'ordre  $\leq k + l$ . Le prolongement d'ordre  $l$  de  $D$  est l'opérateur d'ordre  $\leq k + l$

$$D^{(l)} = j_l \circ D : P \rightarrow J_l Q$$

### 3. L'algèbre de Lie $\mathcal{D}$

Soit  $\pi : P \rightarrow M$  une fibration. Pour abrégier les notations, écrivons

$$J_k P = J_k, \quad \mathcal{F}_{J_k} = A_k, \quad A = \lim \text{ind} (A_k, \rho_{kk}^*)$$

$A$  est une  $R$ -algèbre.

Le morphisme canonique  $A_k \rightarrow A$  étant injectif, on identifie  $A_k$  avec son image.  $A$  admet une filtration croissante par les sous-algèbres  $A_k, k \geq -1$ , et sera appelée l'algèbre des fonctions différentiables de

$$J_\infty = \lim \text{proj} (J_k, \rho_{kk})$$

Pour abrégier, on écrira souvent  $J$  au lieu de  $J_\infty$ .

Soit  $\mathcal{D}_k$  l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre  $\leq k$  de  $P$  vers  $TM$  et

$$\mathcal{D} = \cup \mathcal{D}_k$$

$\mathcal{D}$  est muni d'une structure de  $A$ -module déduite de la structure linéaire de  $TM$ . Si  $D \in \mathcal{D}_k$  et  $f \in A_l$  on pose

$$(fD)\sigma = (f \circ j_l \sigma) D \sigma$$

$\mathcal{D}$  est filtré par la suite croissante des  $A_k$ -sous-modules  $\mathcal{D}_k$  et

$$A_l \mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_{[l, k]}, \quad \mathcal{D}_k + \mathcal{D}_l \subset \mathcal{D}_{[l, k]},$$

où  $[l, k] = \max \{l, k\}$ .  $\mathcal{D}$  est aussi muni d'une structure de  $R$ -algèbre de Lie déduite de celle de  $TM$ . On pose

$$[D, D']\sigma = [D\sigma, D'\sigma]$$

et on vérifie aussitôt que  $[\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_l] \subset \mathcal{D}_{[k, l]+1}$ .

Soit  $\mathcal{A}_k$  l'ensemble  $\mathcal{A}(\alpha_k)$  des variations infinitésimales de  $\alpha_k$  (§ 1, i) et

$$\mathcal{R} = \lim \text{ind} (\mathcal{R}_k, \rho_{hk}^*) .$$

Le morphisme canonique  $\mathcal{R}_k \rightarrow \mathcal{R}$  étant injectif, on identifie  $\mathcal{R}_k$  à son image.  $\mathcal{R}$  est un  $A$ -module filtré par la suite croissante des  $A_k$ -sous-modules  $\mathcal{R}_k$  et

$$A_l \mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}_{[l,k]}, \quad \mathcal{R}_k + \mathcal{R}_l \subset \mathcal{R}_{[l,k]} .$$

Soit  $\Phi \in \mathcal{R}_k$ ,  $\psi \in \mathcal{R}_l$  et  $\sigma$  une section locale de  $\pi$ . Le vecteur  $[\Phi \circ j_k \sigma, \psi \circ j_l \sigma]_x$  ne dépend que de  $j_m \sigma(x)$ ,  $m = [k, l] + 1$ . Il en résulte une structure de  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie sur  $\mathcal{R}$  avec  $[\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_l] \subset \mathcal{R}_m$ . Pour chaque  $D \in \mathcal{D}_k$ , l'application  $\tau_{k+l}(D) \in \mathcal{R}$  est indépendante de  $l$ . On pose  $\tau(D) = \tau_{k+l}(D)$ .

**Proposition 3.1.** *L'application  $\tau : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$  est un isomorphisme de  $A$ -modules et  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie qui préserve les filtrations.*

Remarquons que  $\mathcal{D}_{-1}$  et  $\mathcal{R}_{-1}$  sont des sous-algèbres de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{R}$  respectivement et que  $\mathcal{D}_{-1} \simeq \mathcal{R}_{-1} = \chi(M)$ .  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{R}$  sont donc des  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie et  $A$ -modules qui contiennent  $\chi(M)$  comme  $\mathbf{R}$ -sous-algèbre et  $A_{-1}$ -sous-module. Nous verrons plus tard que, lorsque  $M$  est paracompacte,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{R}$  sont obtenus de  $\chi(M)$  par extension de l'anneau de base  $A_{-1}$  à  $A$ .

#### 4. Le relèvement holonome $\lambda$

Pour tout couple  $h < k$  est défini un morphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{array}{ccc} J_k \times_M TM & \xrightarrow{\lambda} & TJ_h \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_k & \xrightarrow{\rho_{hk}} & J_h \end{array}$$

par

$$\lambda(j_k \sigma(x), v) = T(j_h \sigma)v .$$

On a  $\lambda(X, v) \in T_{\rho_X} J_h$ . Prenons des coordonnées locales  $(x^i)$  de  $M$ ,  $(x^i, y^j)$  de  $P$  et soient  $(x^i, y^j_{|\alpha| \leq k})$  les coordonnées locales qui s'en déduisent sur  $J_k$ , où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  est un multi-indice entier,  $|\alpha| = \sum \alpha_i$ ,  $m = \dim M$ ,  $y^j_{|\alpha|} (j_k \sigma(x)) = \partial_\alpha \sigma^j(x)$  et  $\partial_\alpha = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m)^\alpha$ . En posant  $v = v^i \partial/\partial x^i$  et  $X = (x^i, y^j_\alpha)$  on trouve

$$\lambda(X, v) = \sum_{1 \leq i \leq m} v^i \left( \partial/\partial x^i + \sum_{|\alpha| \leq h} y^j_{\alpha+1_i} \partial/\partial y^j_\alpha \right) ,$$

où  $1_i = (0, \dots, \alpha_i = 1, \dots, 0)$ . Puisque  $T(j_h \sigma)_x$  ne dépend que de  $j_{h+1} \sigma(x)$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 J_{k'} \times_M TM & \xrightarrow{\lambda} & TJ_{h'} \\
 \rho \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow T\rho_{hh'} \\
 J_k \times_M TM & \xrightarrow{\lambda} & TJ_h
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 k' > h', k > h, k' \geq k, \\
 h' \geq h \text{ ou } h \geq h'.
 \end{array}$$

Posons  $\lambda_k : J_k \times_M TM \rightarrow TJ_{k-1}$ .

### 5. Algèbre des dérivations formelles

L'ensemble  $\wedge J^* = \lim \text{ind} (\wedge J_k^*, \rho_{h,k}^*)$  est une  $\mathbf{R}$ -algèbre qui admet une filtration croissante par les sous-algèbres  $\wedge J_k^*$ , une graduation canonique par les  $\mathcal{A}$ -sous-modules

$$\wedge^l J^* = \lim \text{ind} (\wedge^l J_k^*, \rho_{h,k}^*)$$

et une différentielle  $d$  qui préserve la filtration et qui est une dérivation de degré 1 par rapport à la graduation.  $\mathcal{A} = \wedge^0 J^*$  est une sous-algèbre. Appelons  $\wedge J^*$  l'algèbre des formes différentielles extérieures de  $J$ . Nous voulons représenter  $\mathcal{D}$  par une sous-algèbre de

$$\chi(\wedge J^*) = \{\text{dérivations de } \wedge J^*\}.$$

Soit  $D \in \mathcal{D}$  et  $\omega \in \wedge J^*$ . Pour  $k$  suffisamment grand,  $D \in \mathcal{D}_{k+1}$  et  $\omega \in \wedge J_k^*$ . Alors

$$(5.1) \quad \Phi_{k+1} = \lambda_{k+1} \circ (\text{Id} \times \tau_{k+1}(D)) : J_{k+1} \rightarrow TJ_k$$

est une variation infinitésimale de  $\rho_{k,k+1}$ . Comme  $\partial_{\Phi_{k+1}}\omega$  est indépendant de  $k$ , on pose

$$\partial_D \omega = \partial_{\Phi_{k+1}} \omega.$$

**Théorème 5.1.** *Pour tout  $D \in \mathcal{D}$  on a  $\partial_D \in \chi(\wedge J^*)$ , et l'application  $\partial : D \in \mathcal{D} \mapsto \partial_D \in \chi(\wedge J^*)$  est un morphisme injectif de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie.*

Soit  $\omega \in \wedge J^*$  et  $h$  un entier tel que  $\omega \in \wedge J_k^*$  pour  $k \geq h$ . Pour toute section locale  $\sigma$  de  $\pi$ ,  $(j_k \sigma)^* \omega$  est une forme différentielle locale de  $M$  qui ne dépend pas de  $k$  et sera notée  $(j\sigma)^* \omega$ .

**Théorème 5.2.** *La dérivation  $\partial_D$  est l'unique dérivation de  $\wedge J^*$  caractérisée par les propriétés :*

- a)  $\partial_D \circ d = d \circ \partial_D$ ,
- b)  $\partial_D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ ,
- c)  $(j\sigma)^* \partial_D f = \mathcal{L}(D\sigma)[(j\sigma)^* f]$  pour toute section locale  $\sigma$  de  $\pi$  et tout  $f \in \mathcal{A}$ ,

Donnons maintenant quelques propriétés de  $\partial_D$  :

1.  $\partial_D$  est un opérateur local qui préserve la graduation de  $\wedge J^*$ . Si  $D \in \mathcal{D}_h$ , alors

$$\partial_D(\wedge J_k^*) \subset \wedge J_{k+1}^*$$

pour  $k \geq h - 1$ . Si  $D \in \mathcal{D}_{-1} \simeq \chi(M)$  et  $\omega \in \wedge J_{-1}^* = \wedge M^*$ , alors

$$\partial_D \omega = \mathcal{L}(\tau_{-1}D)\omega \in \wedge M^* \quad (\text{dérivée de Lie habituelle}),$$

donc  $\partial_D(\wedge M^*) \subset \wedge M^*$ .

2.  $\partial_D(A) \subset A$ , et l'application induite

$$\bar{\partial}: \mathcal{D} \rightarrow \chi(A), \quad \bar{\partial}_D = \partial_D|_A$$

est un morphisme injectif de  $R$ -algèbres de Lie et  $A$ -modules.  $\bar{\partial}_D$  est l'unique élément de  $\chi(A)$  caractérisé par

$$(j\sigma)^*\bar{\partial}_D f = \mathcal{L}(D\sigma)[(j\sigma)^*f],$$

cette relation étant équivalente à  $\bar{\partial}_D f = \langle \bar{\Phi}_{k+1}, df \rangle$  où  $k \geq h$ ,  $D \in \mathcal{D}_{k+1}$  et  $f \in A_h$ . L'algèbre  $\mathcal{D}$  est ainsi représentée comme  $R$ -sous-algèbre et  $A$ -sous-module de  $\chi(A)$ . En outre, on a les relations  $D = 0 \Leftrightarrow \partial_D = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}_D = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}_D|_{A_{-1}} = 0$ . L'application  $\bar{\partial}_{-1}: \mathcal{D}_{-1} \rightarrow \chi(A)$  est un morphisme injectif de  $R$ -algèbres de Lie et  $A_{-1}$ -modules et  $\bar{\partial}$  est l'unique extension  $A$ -linéaire de  $\bar{\partial}_{-1}$ .

3.  $\partial_D$  est l'unique dérivation de  $\wedge J^*$  qui commute avec  $d$  et qui coïncide avec  $\bar{\partial}_D$  sur  $A$ .

4.  $(j\sigma)^*\partial_D \omega = \mathcal{L}(D\sigma)[(j\sigma)^*\omega]$  pour toute section locale  $\sigma$  de  $\pi$  et tout  $\omega \in \wedge J^*$ .

5.  $[fD, gD'] = fg[D, D'] + f(\partial_D g)D' - g(\partial_{D'} f)D$  où  $D, D' \in \mathcal{D}$  et  $f, g \in A$ .

6. Soit  $D \in \mathcal{D}$  et  $\omega \in \wedge J^*$ . Pour  $k$  suffisamment grand,  $D \in \mathcal{D}_{k+1}$ ,  $\omega \in \wedge J_k^*$  et  $i_{\phi_{k+1}}\omega$  est indépendant de  $k$  (§ 1, d). On pose

$$i_D \omega = i_{\phi_{k+1}} \omega.$$

$i_D$  est l'unique dérivation de degré  $-1$ , pour la graduation de  $\wedge J^*$ , que vérifie  $i_D df = \partial_D f$ . En outre,  $i_D$  est un opérateur local,  $A$ -linéaire par rapport à  $D$  et vérifie les relations

$$i_D \circ i_{D'} = -i_{D'} \circ i_D, \quad (j\sigma)^* i_D \omega = i(D\sigma)[(j\sigma)^*\omega]$$

pour  $\omega \in \wedge J^*$ . Si  $D \in \mathcal{D}_h$  alors  $i_D(\wedge J_k^*) \subset \wedge J_{k+1}^*$  pour  $k \geq h - 1$ . Si  $D \in \mathcal{D}_{-1}$  et  $\omega \in \wedge M^*$  alors

$$i_D \omega = i(\tau_{-1}D)\omega \quad (\text{produit intérieur habituel}),$$

donc  $i_D(\wedge M^*) \subset \wedge M^*$ . En plus, on a les formules

$$\partial_D = [i_D, d], \quad i_{[D, D']} = [i_D, \partial_{D'}], \quad \partial_{fD} = f\partial_D + df \wedge i_D,$$

où  $f \in A$ . L'application



$$\partial_{-1}: \mathcal{D}_{-1} \rightarrow \chi(\wedge J^*)$$

est un morphisme injectif d'algèbres de Lie qui vérifie les formules précédentes, la dernière avec  $f \in A_{-1}$ . La dérivation  $\partial$  est l'unique extension  $\mathbf{R}$ -linéaire de  $\partial_{-1}$  qui vérifie la dernière formule.

7. Soient  $(x^i, y^a)_{|\alpha| \leq k+1}$  des coordonnées locales de  $J_{k+1}$  (cf. § 4),  $f \in A_k$  et  $D \in \mathcal{D}_{-1}$  tel que  $\tau_{-1}D = \partial/\partial x^i$  dans la carte  $(x^i)$ . Alors

$$\partial_D f = \partial f / \partial x^i + \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial f / \partial y^a) y_{\alpha+1}^a$$

dans la carte de  $J_{k+1}$ . On retrouve la dérivée formelle (ou totale) de  $f$  par rapport à  $x^i$ .

8. En prenant  $\partial \circ \tau^{-1}$  (cf. proposition 3.1) on trouve une représentation fidèle de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie  $\mathcal{R} \rightarrow \chi(\wedge J^*)$  qui vérifie les mêmes propriétés que  $\partial$ . On notera encore  $\partial \circ \tau^{-1}$  par  $\partial$ . Si  $\Phi \in \mathcal{R}$  et  $\omega \in \wedge J^*$ , on pose, pour  $k$  suffisamment grand,

$$\Phi_{k+1} = \lambda_{k+1} \circ (\text{Id} \times \Phi)$$

et  $\partial_\phi \omega$  est la dérivée de Lie

$$\partial_{\Phi_{k+1}} \omega$$

suivant la variation infinitésimale  $\Phi_{k+1}$ . On a

$$[f\Phi, g\Psi] = fg[\Phi, \Psi] + f(\partial_\phi g)\Psi - g(\partial_\phi f)\Phi$$

et

$$(j\sigma)^* \partial_\phi \omega = \mathcal{L}[(j\sigma)^* \Phi](j\sigma)^* \omega$$

où  $\sigma$  est une section locale de  $\pi$ ,  $f, g \in A$  et  $\Phi, \Psi \in \mathcal{R}$ . On définit de même la dérivation  $i_\phi$  et toutes les relations et propriétés se transcrivent.  $\partial_\phi \omega$  et  $i_\phi \omega$  sont des opérations locales par rapport à  $\Phi$  et  $\omega$ .

Soit

$$\mathcal{D} = \partial(\mathcal{D}), \quad \mathcal{D}_k = \partial(\mathcal{D}_k), \quad \bar{\mathcal{D}} = \bar{\partial}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}|A, \quad \bar{\mathcal{D}}_k = \bar{\partial}(\mathcal{D}_k) = \mathcal{D}_k|A.$$

$\mathcal{D}$  est une  $\mathbf{R}$ -sous-algèbre de Lie de  $\chi(\wedge J^*)$  qui admet une filtration croissante par les  $\mathbf{R}$ -sous-modules  $\mathcal{D}_k$ . On a les relations

$$\mathcal{D}_k + \mathcal{D}_l \subset \mathcal{D}_{[k,l]}, \quad [\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_l] \subset \mathcal{D}_{[k,l]+1},$$

$\mathcal{D}_{-1}$  est une sous-algèbre isomorphe à  $\chi(M)$  et

$$\mathcal{D}_k = \{\partial \in \mathcal{D} \mid \partial(A_{-1}) \subset A_k\}.$$

$\mathcal{D}_{-1} | \wedge M^*$  est l'algèbre des dérivations de Lie suivant les champs de vecteurs de  $M$ .  $\bar{\mathcal{D}}$  est une  $\mathbf{R}$ -sous-algèbre de Lie et un  $A$ -sous-module de  $\chi(A)$  qui admet une filtration croissante par les  $A_k$ -sous-modules  $\bar{\mathcal{D}}_k$ ,

$$A_k \bar{\mathcal{D}}_i \subset \bar{\mathcal{D}}_{[k,i]},$$

$\bar{\mathcal{D}}_{-1}$  est une sous-algèbre et un  $A_{-1}$ -sous-module isomorphe à  $\chi(M)$  et

$$\bar{\mathcal{D}}_{-1} | A_{-1} = \chi(A_{-1}).$$

Appelons  $\mathcal{D}$  l'algèbre des dérivations *formelles* de  $\wedge J^*$  et  $\bar{\mathcal{D}}$  l'algèbre des dérivations *formelles* de  $A$ . L'application de restriction

$$\partial_D \in \mathcal{D} \rightarrow \bar{\partial}_D \in \bar{\mathcal{D}}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

## 6. Algèbre des dérivations holonomes

Soit  $\pi : P \rightarrow M$  une fibration. Pour simplifier les notations, écrivons  $A_{-1} = B$ . Soit  $\chi(P, M)$  la sous-algèbre et  $B$ -sous-module de  $\chi(P)$  formé par les champs de vecteurs  $\pi$ -projetables. La projection de  $\theta \in \chi(P, M)$  sera notée  $\theta_M$ . L'application

$$\theta \in \chi(P, M) \mapsto \theta_M \in \chi(M)$$

est un morphisme  $B$ -linéaire d'algèbres de Lie. Le champ  $\theta \in \chi(P, M)$  est localement la dérivée (pour  $t = 0$ ) d'une famille locale à un paramètre  $(\phi_t)$  de transformations  $\pi$ -projetables. Si  $\phi_t$  se projette en  $\psi_t$ ,  $\pi \circ \phi_t = \psi_t \circ \pi$ , alors  $\theta_M$  est la dérivée de  $(\psi_t)$ . On prolonge  $(\phi_t)$  à  $\underline{P}$  en posant  $\sigma \mapsto \phi_t \circ \sigma \circ \psi_t^{-1}$ , ce qui permet également de prolonger  $(\phi_t)$  en une famille locale à un paramètre  $(\phi_t^k)$  de transformations de  $J_k$  qui est  $\beta_k$ -projetable en  $(\phi_t)$ .

$$\tilde{\mathfrak{p}}_k \theta = (\partial / \partial t)(\phi_t^k)_{t=0}$$

est un champ de vecteurs de  $J_k$  qui est  $\beta_k$ -projetable sur  $\theta$ . On l'appelle le prolongement canonique d'ordre  $k$  de  $\theta$ . L'application  $\tilde{\mathfrak{p}}_k : \chi(P, M) \rightarrow \chi(J_k)$  est un morphisme d'algèbres de Lie dont l'image est contenue dans  $\chi(J_k, J_h)$  pour  $-1 \leq h \leq k$ . Soit  $\omega \in \wedge J^*$ . Pour  $k$  suffisamment grand,  $\omega \in \wedge J_k^*$  et la dérivée de Lie  $\mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{p}}_k \theta)\omega$  est indépendante de  $k$ . On pose

$$\mathfrak{p}_\theta \omega = \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{p}}_k \theta)\omega.$$

**Théorème 6.1.** *Pour tout  $\theta \in \chi(P, M)$  on a  $\mathfrak{p}_\theta \in \chi(\wedge J^*)$  et l'application*

$$\mathfrak{p} : \chi(P, M) \rightarrow \chi(\wedge J^*)$$

*est un morphisme injectif de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie.*

**Théorème 6.2.**  $\mathfrak{p}_\theta$  est l'unique dérivation de  $\wedge J^*$  caractérisée par les propriétés :

- a)  $\mathfrak{p}_\theta \circ d = d \circ \mathfrak{p}_\theta$ ,
- b)  $\mathfrak{p}_\theta(A) \subset A$ ,
- c)  $\mathfrak{p}_\theta|_{A_0} = \mathcal{L}(\theta)$ ,
- d)  $[\partial_\xi, \mathfrak{p}_\theta]|_A = \partial_{[\xi, \theta_M]}|_A, \quad \xi \in \chi(M)$ .

Donnons maintenant quelques propriétés de  $\mathfrak{p}_\theta$  :

1.  $\mathfrak{p}_\theta$  est une dérivation qui préserve la graduation et la filtration de  $\wedge J^*$ .  $\mathfrak{p}_\theta \omega$  est une opération locale par rapport à  $\theta$  et  $\omega$ .
2. L'application induite

$$\bar{\mathfrak{p}} : \chi(P, M) \rightarrow \chi(A), \quad \bar{\mathfrak{p}}_\theta = \mathfrak{p}_\theta|_A$$

est un morphisme injectif de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie.  $\bar{\mathfrak{p}}_\theta$  est l'unique élément de  $\chi(A)$  vérifiant

$$\bar{\mathfrak{p}}_\theta|_{A_0} = \mathcal{L}(\theta), \quad [\bar{\partial}_\xi, \bar{\mathfrak{p}}_\theta] = \bar{\partial}_{[\xi, \theta_M]},$$

où  $\bar{\xi} \in \chi(M)$ .

3. Pour  $k \geq -1$ ,  $\mathfrak{p}$  induit les morphismes (injectifs pour  $k \geq 0$ ) de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie

$$\mathfrak{p}_k : \chi(P, M) \rightarrow \chi(\wedge J_k^*), \quad \bar{\mathfrak{p}}_k : \chi(P, M) \rightarrow \chi(A_k),$$

où

$$\mathfrak{p}_k \theta = \mathcal{L}(\bar{\mathfrak{p}}_k \theta) = \mathfrak{p}_\theta| \wedge J_k^*.$$

Si  $(x^i, y^j)$  est un système de coordonnées locales de  $P$  et  $(x^i, y^j, y^j_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$  est le système de coordonnées correspondant de  $J_k$  alors (avec les notations évidentes)

$$\bar{\mathfrak{p}}_k \partial / \partial x^i = \partial / \partial x^i, \quad \bar{\mathfrak{p}}_k \partial / \partial y^j = \partial / \partial y^j.$$

$\bar{\mathfrak{p}}_k$  n'est pas  $B$ -linéaire pour les structures habituelles de  $B$ -module. Au chapitre II, § 15, nous introduirons une structure de  $A_0$ -module sur  $\chi(A_k)$  par rapport à laquelle  $\bar{\mathfrak{p}}_k$  sera  $B$ -linéaire. L'ensemble  $\mathcal{P} = \text{im } \mathfrak{p}$  est une  $\mathbf{R}$ -sous-algèbre de Lie de  $\chi(\wedge J^*)$  appelée l'algèbre des dérivations *holonomes* de  $\wedge J^*$ . L'ensemble  $\bar{\mathcal{P}} = \text{im } \bar{\mathfrak{p}} = \mathcal{P}|_A$  est une sous-algèbre de  $\chi(A)$  appelée l'algèbre des dérivations *holonomes* de  $A$ .

### 7. Les formules fondamentales

L'application

$$\xi \in \chi(J_k) \mapsto \tilde{\xi} \in \mathcal{P}_k, \quad \tilde{\xi} = (T\alpha_k) \circ \xi,$$

est un morphisme  $A_k$ -linéaire pour  $k \geq -1$ . Si  $\xi, \zeta \in \chi(J_k)$  sont localement  $\alpha_k$ -projetables et  $\eta = [\xi, \zeta]$  alors  $\tilde{\eta} = [\tilde{\xi}, \tilde{\zeta}]$ , où le premier crochet est celui de  $\chi(J_k)$  et le deuxième celui de  $\mathcal{R}$ . Plus généralement, si  $\xi \in \chi(J_k)$  est localement  $\alpha_k$ -projetable,  $\zeta \in \chi(J_l)$  localement  $\alpha_l$ -projetable et  $m = [k, l]$  alors  $[\tilde{\xi}, \tilde{\zeta}] \in \mathcal{R}_m$  et, localement,

$$[\tilde{\xi}, \tilde{\zeta}] = [\xi_M, \zeta_M] \circ \alpha_m .$$

Si  $\xi$  et  $\zeta$  sont projetables alors  $[\tilde{\xi}, \tilde{\zeta}] = [\xi_M, \zeta_M]$  dans  $\mathcal{R}$ . Nous dirons que  $\chi(P, M)$  est transitif si pour tout  $y \in P$  on a  $\chi(P, M)_y = T_y P$ . Indiquons par  $\chi_M(P, M)$  l'image du morphisme  $\theta \mapsto \theta_M$ . Remarquons que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $\chi(P, M)$  est transitif,
- (b)  $\chi(P, M)$  est transitif en un point de chaque  $\pi$ -fibre et
- (c)  $\chi_M(P, M)$  est transitif.

Si  $M$  est paracompacte, la transitivité de  $\chi(P, M)$  équivaut à  $\chi_M(P, M) = \chi(M)$ .

**Lemme 1.** Soit  $\xi \in \chi(J_k)$ . Si  $\tilde{\xi} = 0$ , alors  $[\xi, \tilde{\eta}_k \theta]^\sim = 0$  pour tout  $\theta \in \chi(P, M)$ . Si  $\chi(P, M)$  est transitif, on a aussi la réciproque.

**Lemme 2.** Soit  $\pi : P \rightarrow M$  une fibration et  $\Phi \in \mathcal{R}(\pi)$  (cf. § 1, i). Pour tout  $y \in P$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $y$  et un champ  $\xi \in \chi(P)$  tel que  $(\tilde{\xi} - \Phi)|_{\mathcal{U}} = 0$  où  $\tilde{\xi} = (T\pi) \circ \xi$ .

Nous allons définir une application  $R$ -bilinéaire

$$\mathcal{E} : \mathcal{R} \times \chi(P, M) \rightarrow \mathcal{R}$$

de la façon suivante : Soit  $(\Phi, \theta) \in \mathcal{R} \times \chi(P, M)$ . Pour  $k$  suffisamment grand, on a  $\tilde{\Phi} \in \mathcal{R}_k$ . Soit  $X \in J_k$ ,  $\mathcal{U}$  un voisinage ouvert de  $X$  et  $\xi \in \chi(J_k)$  tel que  $(\tilde{\xi} - \tilde{\Phi})|_{\mathcal{U}} = 0$ . Posons

$$\Psi_{k,X} = \tilde{\eta}|_{\mathcal{U}} \quad \text{où} \quad \eta = [\xi, \tilde{\eta}_k \theta] .$$

En faisant ceci pour tout  $X \in J_k$  on obtient une famille  $(\Psi_{k,X}, \mathcal{U}_X)$ ,  $X \in J_k$ , où  $\{\mathcal{U}_X\}$  recouvre  $J_k$  et

$$\Psi_{k,X} : \mathcal{U}_X \rightarrow TM$$

est une variation infinitésimale locale de  $\alpha_k$ . Par le lemme 1, les  $\Psi_{k,X}$  se recollent en un élément  $\Psi_k \in \mathcal{R}_k$ . Il est clair que  $\Psi_{k+h} = \Psi_k \circ \rho_{k,k+h}$  car si  $Y \in J_{k+h}$ ,  $\rho(Y) = X$ , on prendra  $\zeta \in \chi(J_{k+h})$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $Y$  tel que  $\zeta|_{\mathcal{V}}$  soit  $\rho_{k,k+h}$ -projetable en  $\xi$ . Il en résulte que  $\Psi_k \in \mathcal{R}$  est indépendant de  $k$  et on pose  $\mathcal{E}(\Phi, \theta) = \Psi_k$ .

On a les propriétés suivantes :

- (a)  $\mathcal{E}(\Phi, \theta)$  est locale par rapport à  $\Phi$  et  $\theta$ .
- (b)  $\mathcal{E}(f\Phi, \theta) = f\mathcal{E}(\Phi, \theta) - (\tilde{p}_\theta f)\Phi$ ,  $f \in A$ .
- (c)  $\mathcal{E}(\Phi, \theta) = 0$  pour tout  $\Phi \in \mathcal{R}_0$  si et seulement si  $\theta = 0$ .

(d) Si  $\xi \in \chi(J_k)$  est un champ localement  $\alpha_k$ -projetable alors

$$\mathcal{E}(\tilde{\xi}, \theta) = [\tilde{\xi}, \theta_M]$$

(crochet de  $\mathcal{R}$ ). En particulier, si  $\xi \in \chi(M)$  alors  $\mathcal{E}(\xi, \theta) = [\xi, \theta_M]$  (crochet de  $\chi(M)$ ).

(e)  $\mathcal{E}(\xi, \theta) = 0$  pour tout  $\xi \in \chi(M)$  si et seulement si  $\theta_M = 0$  ( $\theta$  est  $\pi$ -vertical).

(f) Si  $\chi(P, M)$  est transitif alors  $\mathcal{E}(\Phi, \theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \chi(P, M)$  si et seulement si  $\Phi = 0$ .

Définissons le crochet  $[ , ]$  dans  $\mathcal{R} \times \chi(P, M)$  par

$$[(\Phi, \theta), (\Phi', \theta')] = ([\Phi, \Phi'] + \mathcal{E}(\Phi, \theta') - \mathcal{E}(\Phi', \theta), [\theta, \theta']) .$$

**Proposition 7.1.** *L'ensemble  $\mathcal{R} \times \chi(P, M)$  muni de  $[ , ]$  est une  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie produit semi-direct de l'idéal  $\mathcal{R}$  et de la sous-algèbre  $\chi(P, M)$ . En outre*

$$[f\Phi, \theta] = f[\Phi, \theta] - (\mathfrak{p}_\theta f)\Phi$$

où  $f \in A$ .

La filtration  $\mathcal{R}_n$  de  $\mathcal{R}$  s'étend en une filtration croissante de  $\mathcal{R} \times \chi(P, M)$  par les  $B$ -sous-modules  $\mathcal{R}_k \times \chi(P, M)$ . Comme

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}_k, \chi(P, M)) \subset \mathcal{R}_k ,$$

on a

$$[\mathcal{R}_k \times \chi(P, M), \mathcal{R}_l \times \chi(P, M)] \subset \mathcal{R}_m \times \chi(P, M) , \quad m = [k, l] + 1 ,$$

$$[\mathcal{R}_k, \chi(P, M)] \subset \mathcal{R}_k .$$

La propriété (d) entraîne que

$$[\mathcal{R}_{-1} \times \chi(P, M), \mathcal{R}_{-1} \times \chi(P, M)] \subset \mathcal{R}_{-1} \times \chi(P, M)$$

car si  $\xi, \xi' \in \mathcal{R}_{-1}$  alors

$$[(\xi, \theta), (\xi', \theta')] = ([\xi, \xi'] + [\xi, \theta'_M] + [\theta_M, \xi'], [\theta, \theta'])$$

et en particulier

$$[\xi, \theta] = [\xi, \theta_M] .$$

$\mathcal{R}_{-1} \times \chi(P, M)$  est une sous-algèbre et  $B$ -sous-module de  $\mathcal{R} \times \chi(P, M)$ .

**Théorème 7.1** (formules fondamentales).

$$[\partial_\Phi, \mathfrak{p}_\theta] = \partial_{[\Phi, \theta]}, \quad [i_\Phi, \mathfrak{p}_\theta] = i_{[\Phi, \theta]}$$

où  $\Phi \in \mathcal{R}$  et  $\theta \in \chi(P, M)$ .

Comme les deux membres de la première formule sont des dérivations locales qui commutent avec  $d$ , il suffit de vérifier cette formule pour les fonctions  $f \in A$ , ce qui est un calcul simple (et fastidieux, [23]). Les deux membres de la deuxième formule sont des anti-dérivations locales. Il suffit donc de la vérifier pour  $f \in A$  et  $df$ . Or, pour  $f$  les deux membres sont nuls et pour  $df$  on retrouve la première formule calculée en  $f$ .

Comme les éléments de  $\mathcal{P}$  préservent la filtration de  $\wedge J^*$  et ceux de  $\mathcal{D}$  la décalent d'une unité (pour  $k$  grand) il en résulte que  $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = 0$ . De même  $\overline{\mathcal{P}} \cap \overline{\mathcal{D}} = 0$ .

**Corollaire 1.**  $[\mathcal{D}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{D}$ , et  $\mathcal{D} + \mathcal{P}$  est une sous-algèbre de  $\chi(\wedge J^*)$  composé semi-direct de l'idéal  $\mathcal{D}$  et de la sous-algèbre  $\mathcal{P}$ . De même,  $\overline{\mathcal{D}} + \overline{\mathcal{P}}$  est une sous-algèbre de  $\chi(A)$  composé semi-direct de l'idéal  $\overline{\mathcal{D}}$  et de la sous-algèbre  $\overline{\mathcal{P}}$ .

$\mathcal{D} + \mathcal{P}$  ainsi que  $\overline{\mathcal{D}} + \overline{\mathcal{P}}$  sont filtrés par les  $R$ -sous-modules  $\mathcal{D}_k + \mathcal{P}$  et  $\overline{\mathcal{D}}_k + \overline{\mathcal{P}}$  respectivement. Les composantes  $\mathcal{D}_{-1} + \mathcal{P}$  et  $\overline{\mathcal{D}}_{-1} + \overline{\mathcal{P}}$  sont des sous-algèbres.

**Corollaire 2.** Les applications  $\partial + \mathfrak{p} : \mathcal{R} \times \chi(P, M) \rightarrow \mathcal{D} + \mathcal{P}$  et  $\bar{\partial} + \bar{\mathfrak{p}} : \mathcal{R} \times \chi(P, M) \rightarrow \overline{\mathcal{D}} + \overline{\mathcal{P}}$  sont des isomorphismes d'algèbres de Lie compatibles avec les filtrations et les décompositions en produits semi-directs.

**Corollaire 3.**

- a)  $[\partial_\Phi, \mathfrak{p}_\theta] B = 0$  pour tout  $\Phi \in \mathcal{R}_0$  si et seulement si  $\theta = 0$ .
- b)  $[\partial_\xi, \mathfrak{p}_\theta] B = 0$  pour tout  $\xi \in \chi(M)$  si et seulement si  $\theta_M = 0$ .
- c) Si  $\chi(P, M)$  est transitif alors  $[\partial_\theta, \mathfrak{p}_\theta] B = 0$  pour tout  $\theta \in \chi(P, M)$  si et seulement si  $\Phi = 0$ .
- d)  $[\partial_{f\theta}, \mathfrak{p}_\theta] = f[\partial_\theta, \mathfrak{p}_\theta] - (\mathfrak{p}_\theta f)\partial_\theta + df \wedge [i_\theta, \mathfrak{p}_\theta] - (\mathfrak{p}_\theta df) \wedge i_\theta$ .

Soient  $\Phi_1, \dots, \Phi_l \in \mathcal{R}$  tel que pour tout  $i$  il existe un champ  $\zeta_i \in \chi(J_{k(i)})$  localement  $\alpha_{k(i)}$ -projetable avec  $\Phi_i = \zeta_i$ . En itérant la première formule fondamentale et en remarquant que  $[\Phi_i, \theta] = [\Phi_i, \theta_M]$  (le deuxième crochet dans  $\mathcal{R}$ ) on trouve

$$\mathfrak{p}_\theta \circ \partial_{\Phi_1} \circ \dots \circ \partial_{\Phi_l} = \partial_{\Phi_1} \circ \dots \circ \partial_{\Phi_l} \circ \mathfrak{p}_\theta + [\partial_{\theta_M}, \partial_{\Phi_1} \circ \dots \circ \partial_{\Phi_l}] .$$

En particulier on a pour  $\omega \in \wedge P^*$  et  $\xi_i \in \chi(M)$

$$(7.1) \quad \mathfrak{p}_k \theta \circ \partial_{\xi_1} \circ \dots \circ \partial_{\xi_k} \omega = \partial_{\xi_1} \circ \dots \circ \partial_{\xi_k} \circ \mathcal{L}(\theta) \omega + [\partial_{\theta_M}, \partial_{\xi_1} \circ \dots \circ \partial_{\xi_k}] \omega$$

formule qui permet de calculer aisément l'expression locale du champ de vecteurs  $\mathfrak{p}_k \theta$  en remarquant que  $y^\alpha = \partial_\alpha y^\alpha$ . Voici les résultats : Soit

$$\theta = \theta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \quad \theta^i = \theta^i(x), \quad \theta^\alpha = \theta^\alpha(x, y)$$

et indiquons par  $\partial_i$  la dérivée formelle suivant le champ  $\partial/\partial x^i$ . Alors

$$(7.2) \quad \begin{aligned} p_1\theta &= \theta + (\partial_i\theta^i - \delta_i^i(\theta))\partial/\partial y_i^i, \\ p_2\theta &= p_1\theta + (\partial_i\partial_j\theta^j - \delta_{ij}^j(\theta))\partial/\partial y_{ij}^i, \\ &\dots \\ p_k\theta &= p_{k-1}\theta + (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}\theta^k - \delta_{i_1 \dots i_k}^k(\theta))\partial/\partial y_{i_1 \dots i_k}^k, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \delta_i^i(\theta) &= y_i^i\theta_i^i, \\ \delta_{ij}^j(\theta) &= y_k^i\theta_{ij}^k + y_{ik}^j\theta_j^k + y_{jk}^i\theta_i^k, \\ &\dots \\ \delta_{i_1 \dots i_r}^r(\theta) &= y_k^i\theta_{i_1 \dots i_r}^k + y_{i_1 \dots i_r k}^k\theta_{i_1 \dots i_r}^k + \dots + y_{i_1 \dots i_r k}^k\theta_{i_j}^k, \\ \theta_{i_1 \dots i_l}^k &= \frac{\partial \theta^k}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_l}}. \end{aligned}$$

A l'aide de l'isomorphisme  $\tau: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$  nous pouvons définir une structure d'algèbre de Lie produit semi-direct sur  $\mathcal{D} \times \chi(P, M)$ , et tous les résultats de ce paragraphe se transcrivent en remplaçant  $\mathcal{R}$  par  $\mathcal{D}$ .

### 8. Représentations tensorielles

$A$  et  $\chi(M)$  sont des  $B$ -modules et  $\mathcal{A} = A \otimes_B \chi(M)$  est un  $A$ -module. Définissons une application  $R$ -bilinéaire (qui n'est pas  $B$ -bilinéaire)  $[\ , \ ] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  par

$$[f \otimes \xi, g \otimes \zeta] = fg \otimes [\xi, \zeta] + f(\partial_i g) \otimes \zeta - g(\partial_i f) \otimes \xi.$$

**Proposition 8.1.**  *$A$  muni de  $[\ , \ ]$  est une  $R$ -algèbre de Lie.*

Pour  $k \geq -1$  indiquons par  $\mathcal{A}_k$  l'image du morphisme  $A_k$ -linéaire

$$i_k \otimes \text{Id} : A_k \otimes_B \chi(M) \rightarrow A \otimes_B \chi(M)$$

où  $i_k : A_k \rightarrow A$  est l'inclusion. L'application  $i_{-1} \otimes \text{Id}$  s'identifie à l'application canonique

$$\chi(M) \rightarrow A \otimes_B \chi(M)$$

qui est injective car  $\chi(M)$  est localement libre, donc  $\mathcal{A}_{-1} \simeq \chi(M)$ . L'algèbre  $\mathcal{A}$  est filtrée par la suite croissante des  $A_k$ -sous-modules  $\mathcal{A}_k$  et  $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}_k$ . On a les relations  $\mathcal{A}_k + \mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_{[k,l]}$ ,  $A_k \mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_{[k,l]}$ ,  $[\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_l] \subset \mathcal{A}_{[k,l]+1}$  et  $[\mathcal{A}_{-1}, \mathcal{A}_{-1}] \subset \mathcal{A}_{-1}$ .  $\mathcal{A}_{-1}$  est une sous-algèbre et  $B$ -sous-module isomorphe à  $\chi(M)$ . Si  $M$  est paracompacte,  $i_k \otimes \text{Id}$  est injectif pour tout  $k$  car  $\chi(M)$  est

projectif donc plat. Dans ce cas on identifie  $A_k \otimes_B \chi(M)$  avec  $\mathcal{A}_k$ .

Définissons ensuite l'application  $B$ -linéaire  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}$  par  $\mu(f \otimes \xi) = f\xi$ .

**Proposition 8.2.** *L'application  $\mu$  est un morphisme  $A$ -linéaire d'algèbre de Lie compatible avec les filtrations. La restriction  $\mu: \mathcal{A}_{-1} \rightarrow \mathcal{R}_{-1}$  est l'identité de  $\chi(M)$ . Si  $M$  est paracompacte alors  $\mu$  est un isomorphisme et  $\mathcal{A}$  est un  $A$ -module projectif de type fini.*

**Corollaire.** *Si  $M$  est paracompacte les  $A$ -modules  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\bar{\mathcal{D}}$  sont projectifs de type fini. Des système finis de générateurs se trouvent dans  $\chi(M) = \mathcal{R}_{-1} \simeq \mathcal{D}_{-1} \simeq \bar{\mathcal{D}}_{-1}$ .*

Définissons l'application  $R$ -bilinéaire (qui n'est pas  $B$ -bilinéaire)

$$\Lambda: \mathcal{A} \times \chi(P, M) \rightarrow \mathcal{A}$$

par

$$\Lambda(f \otimes \xi, \theta) = f \otimes [\xi, \theta_M] - (\mathfrak{p}_\theta f) \otimes \xi.$$

On a les propriétés :

- a)  $\Lambda(fZ, \theta) = f\Lambda(Z, \theta) - (\mathfrak{p}_\theta f)Z$ ,  $f \in A$  et  $Z \in \mathcal{A}$ .
- b) Si  $\theta_M = 0$ , alors  $\Lambda(f \otimes \xi, \theta) = -(\mathfrak{p}_\theta f) \otimes \xi$ .
- c) Si  $\xi \in \chi(M) \simeq \mathcal{A}_{-1}$ , alors  $\Lambda(\xi, \theta) = [\xi, \theta_M]$ .

On définit le crochet  $[ , ]$  dans  $\mathcal{A} \times \chi(P, M)$  par

$$[(Z, \theta), (Z', \theta')] = ([Z, Z'] + \Lambda(Z, \theta') - \Lambda(Z', \theta), [\theta, \theta']).$$

**Proposition 8.3.** *L'ensemble  $\mathcal{A} \times \chi(P, M)$  muni de  $[ , ]$  est une  $R$ -algèbre de Lie produit semi-direct de l'idéal  $\mathcal{A}$  et de la sous-algèbre  $\chi(P, M)$ . En outre,*

$$[fZ, \theta] = f[Z, \theta] - (\mathfrak{p}_\theta f)Z,$$

où  $f \in A$  et  $Z \in \mathcal{A}$ .

La filtration  $\mathcal{A}_k$  induit une filtration croissante de  $\mathcal{A} \times \chi(P, M)$  par les  $B$ -sous-modules  $\mathcal{A}_k \times \chi(P, M)$ . On a

$$[\mathcal{A}_k \times \chi(P, M), \mathcal{A}_l \times \chi(P, M)] \subset \mathcal{A}_m \times \chi(P, M),$$

où  $m = [k, l] + 1$  et  $[\mathcal{A}_k, \chi(P, M)] \subset \mathcal{A}_k$ . La composante  $\mathcal{A}_{-1} \times \chi(P, M) \simeq \chi(M) \times \chi(P, M)$  est une sous-algèbre car

$$[(\xi, \theta), (\xi', \theta')] = ([\xi, \xi'] + [\xi, \theta'_M] + [\theta_M, \xi'], [\theta, \theta']).$$

**Proposition 8.4.** *L'application  $\mu \times \text{Id}: \mathcal{A} \times \chi(P, M) \rightarrow \mathcal{R} \times \chi(P, M)$  est un morphisme  $B$ -linéaire d'algèbres de Lie compatible avec les filtrations et les décompositions en produits semi-directs. Sa restriction aux composantes de degré  $-1$  des filtrations est l'identité de  $\chi(M) \times \chi(P, M)$ . Si  $M$  est paracompacte,  $\mu \times \text{Id}$  est un isomorphisme.*



Pour  $Z \in \mathcal{A}$  on pose  $\partial_Z = \partial_{\mu(Z)}$  et  $i_Z = i_{\mu(Z)}$ . On a

$$[fZ, gW] = fg[Z, W] + f(\partial_Z g)W - g(\partial_W f)Z,$$

où  $f, g \in A$  et  $Z, W \in \mathcal{A}$ .

### 9. Extension aux champs localement projetables

Soit  $\chi_i(P, M)$  la sous-algèbre de  $\chi(P)$  formée par les champs de vecteurs localement  $\pi$ -projetables. Soit  $B_0$  le sous-anneau de  $A_0$  formé par les fonctions qui coïncident localement avec des fonctions de  $B$ . Alors  $\chi_i(P, M)$  est un  $B_0$ -sous-module de  $\chi(P)$ . Le lecteur aura sans doute remarqué que dans les définitions de  $\mathfrak{p}_\theta$  et  $\mathcal{E}$  on utilise à peine la projectabilité locale de  $\theta \in \chi(P, M)$ . On pourra donc étendre tous les résultats des paragraphes précédents en remplaçant  $\chi(P, M)$  par  $\chi_i(P, M)$ . Dans ce contexte,  $\theta_M$  sera alors remplacé par  $\tilde{\theta} = T\pi \circ \theta$ , et  $[\xi, \theta_M]$  sera remplacé par le crochet  $[\xi, \tilde{\theta}]$  dans  $\mathcal{R}$  lorsque  $\xi \in \chi(M)$ . Le crochet  $[\xi, \tilde{\theta}]$  est localement égal à  $[\xi, \theta_M]$  ce dernier n'ayant qu'un sens local. Si  $\theta$  est projectable, alors  $[\xi, \tilde{\theta}] = [\xi, \theta_M]$ . Dans le théorème 6.2, par exemple, on doit remplacer d) par

$$d') \quad [\partial_\xi, \mathfrak{p}_\theta] | A = \partial_{[\xi, \tilde{\theta}]} | A.$$

Il va de soi que  $\mathfrak{p}_{-\theta}$  n'a plus de sens et que nous perdons la stabilité de  $\mathcal{R}_{-1} \times \chi_i(P, M)$  pour le crochet  $[ , ]$ . En effet

$$[(\xi, \theta), (\xi', \theta')] = ([\xi, \xi'] + [\xi, \tilde{\theta}'] + [\tilde{\theta}, \xi'], [\theta, \theta']) \in \mathcal{R}_0 \times \chi_i(P, M).$$

On indiquera encore par  $\mathcal{P}$  l'image du morphisme

$$\mathfrak{p}: \chi_i(P, M) \rightarrow \chi(\wedge J^*).$$

Pour étendre l'application  $A$  du § 8, nous allons supposer que

$$\mu: A_0 \otimes_B \chi(M) \rightarrow \mathcal{R}_0$$

est un isomorphisme (ceci étant le cas notamment, lorsque  $M$  est paracompacte). Mais alors

$$A \otimes_B \chi(M) \simeq A \otimes_{A_0} \mathcal{R}_0$$

et on définit

$$A_1: A \otimes_{A_0} \mathcal{R}_0 \times \chi_i(P, M) \rightarrow A \otimes_{A_0} \mathcal{R}_0$$

par

$$A_1(f \otimes \Phi, \theta) = f \otimes [\Phi, \theta] - (\mathfrak{p}_\theta f) \otimes \Phi,$$

où le crochet est celui de  $\mathcal{R} \times \chi_\lambda(P, M)$ . L'application  $A_1$  coïncide avec  $A$  lorsque  $\theta$  est projetable et définit une structure d'algèbre de Lie produit semi-direct sur  $\mathcal{A} \times \chi_\lambda(P, M)$ . L'application

$$\mu \times \text{Id} : \mathcal{A} \times \chi_\lambda(P, M) \rightarrow \mathcal{R} \times \chi_\lambda(P, M)$$

est un morphisme  $B_0$ -linéaire d'algèbres de Lie. Lorsque  $M$  est paracompacte c'est un isomorphisme.

### 10. Extension aux faisceaux de $J$

Les hypothèses sur lesquelles repose la théorie de Lie ne sont, en général, valables que localement d'où le besoin d'étendre le calcul des paragraphes précédents aux faisceaux. Pour ceci considérons  $J = \lim \text{proj } (J_k, \rho_{h,k})$  muni de sa topologie canonique. C'est la moins fine des topologies qui rendent toutes les projections  $J \rightarrow J_k$  continues. Une base d'ouverts pour cette topologie est définie de la façon suivante : on prend toutes les familles  $(\mathcal{U}_k)_{k \geq -1}$  où les  $\mathcal{U}_k$  sont des ouverts de  $J_k$  tels que

- i)  $\mathcal{U}_h = \rho_{h,k} \mathcal{U}_k$  pour  $h < k$ , et
- ii) il existe  $k_0$  (dépendant de la famille) tel que, pour  $k > k_0$ ,  $\mathcal{U}_k$  est saturé par rapport à  $\rho_{k-1,k}$ ,

et on considère tous les sous-ensembles  $\mathcal{U} = \lim \text{proj } \mathcal{U}_k \subset J$ .

Soit  $\mathcal{U}$  un tel ouvert,  $A_k(\mathcal{U})$  l'algèbre des fonctions différentiables de  $\mathcal{U}_k$ ,  $\wedge \mathcal{U}_k^*$  l'algèbre des formes différentielles extérieures de  $\mathcal{U}_k$  et  $\mathcal{R}_k(\mathcal{U})$  le  $A_k(\mathcal{U})$ -module des variations infinitésimales  $\Phi : \mathcal{U}_k \rightarrow TM$  de  $\alpha_k | \mathcal{U}_k$ . Posons

$$A(\mathcal{U}) = \lim \text{ind } A_k(\mathcal{U}), \quad \wedge \mathcal{U}^* = \lim \text{ind } \wedge \mathcal{U}_k^*, \quad \mathcal{R}(\mathcal{U}) = \lim \text{ind } \mathcal{R}_k(\mathcal{U})$$

et soit  $\chi_\lambda(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_{-1})$  l'algèbre des champs de vecteurs de  $\mathcal{U}_0$  qui sont localement  $\pi$ -projetables. On peut définir les dérivations formelles et holonomes de  $\chi(\wedge \mathcal{U}^*)$  ainsi que le crochet  $[ , ]$  et tous les résultats des paragraphes précédents se transcrivent. Si  $\mathcal{V}$  est un deuxième ouvert tel que  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , les dérivations et les crochets définis dans  $\mathcal{V}$  ne sont autres que les restrictions de ceux définis dans  $\mathcal{U}$ . En particulier, l'algorithme dans  $\mathcal{U}$  est la restriction de l'algorithme global.

Ce que nous ferons dans la suite est un passage évident aux germes. Ce contexte étant le plus adéquat pour les besoins du chapitre III, nous présenterons, à titre de référence, un aperçu complet des résultats. La notion de faisceau est synonyme de celle d'espace étalé. Remarquons aussi que ce qui sera dit pour  $J$  se recopie de façon identique pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $J$ .

Soit  $\mathcal{O}_k$  le faisceau structural de  $J_k$ ,  $k \geq -1$  (faisceau des germes de fonctions différentiables), et posons  $A_k = J \times_{J_k} \mathcal{O}_k$  (faisceau image réciproque de  $\mathcal{O}_k$  par  $q_k : J \rightarrow J_k$ ). Chaque  $A_k$  est un faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres associatives de base  $J$ . Les applications  $\rho_{h,k}^*$  s'étendent en des morphismes injectifs

$$\rho_{h,k}^* : A_h \rightarrow A_k$$

de faisceaux structurés et  $(A_k, \rho^*)$  est une famille inductive.

$$A = \lim \text{ind } (A_k, \rho^*)$$

est un faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres associatives de base  $J$ .  $A$  sera appelé le faisceau structural de  $J$ . En identifiant  $A_k$  à son image par l'application canonique,  $A_k$  devient un faisceau en sous-algèbres de  $A$ . Les  $A_k$  constituent une filtration croissante de  $A$  avec  $A = \cup A_k$ . Cette filtration induit une filtration croissante sur chaque fibre de  $A$  par les fibres des  $A_k$ . On écrit  $A_{-1} = \mathbf{B}$ . Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $J$  et  $A(\mathcal{U})$  l'algèbre définie précédemment. Si  $\mathcal{V}$  est un ouvert de  $J$  et  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  alors la limite inductive des applications de restriction  $A_k(\mathcal{U}) \rightarrow A_k(\mathcal{V})$  donne une loi de restriction  $A(\mathcal{U}) \rightarrow A(\mathcal{V})$  notée  $f \mapsto f|_{\mathcal{V}}$  qui est transitive. On en déduit que la famille  $\{A(\mathcal{U})\}$  est un pré-faisceau en algèbres de base  $J$  dont le faisceau associé est canoniquement isomorphe à  $A$ . Chaque sous-faisceau  $A_k$  est canoniquement isomorphe au faisceau associé au sous-pré-faisceau  $\{A_k(\mathcal{U})\}$ .

L'analogie de  $\wedge J^*$  se construit en imitant la construction de  $A$ . Pour  $k \geq -1$ , on pose  $\underline{\wedge} J_k^* =$  faisceau des germes de formes différentielles extérieures de  $J_k$ ,  $\underline{\wedge} J_k^* = J \times_{J_k} \underline{\wedge} J_k^*$  et

$$\wedge J^* = \lim \text{ind } (\wedge J_k^*, \rho^*) .$$

$\wedge J^*$  est un faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres anti-commutatives et en  $A$ -modules de base  $J$ . Le faisceau  $\wedge J^*$  est filtré par les  $A_k$ -modules et  $\mathbf{R}$ -algèbres  $\wedge J_k^*$  et gradué par les  $A$ -modules

$$\wedge^l J^* = \lim \text{ind } (J \times_{J_k} \underline{\wedge}^l J_k^*, \rho^*) .$$

On a en particulier  $A = \wedge^0 J^*$ . La différentielle extérieure  $d$  s'étend à  $\wedge J_k^*$  en une dérivation homogène de degré 1 par rapport à la graduation et qui préserve la filtration.  $\{\wedge \mathcal{U}^*\}$  est un pré-faisceau en algèbres de base  $J$  dont le faisceau associé est canoniquement isomorphe à  $\wedge J^*$ . Les sous-faisceaux définissant la graduation et la filtration de  $\wedge J^*$  s'obtiennent également à l'aide de sous-pré-faisceaux de  $\{\wedge \mathcal{U}^*\}$ . La différentielle extérieure s'obtient ainsi comme une limite inductive.

Soit  $D$  une dérivation de l'algèbre  $A(\mathcal{U})$ . Si  $f \in A(\mathcal{U})$  et  $f|_{\mathcal{V}} = 0$ , alors  $Df|_{\mathcal{V}} = 0$ . On en déduit que les dérivations de  $A(\mathcal{U})$  sont des opérations locales par rapport aux ouverts de  $J$  d'où une loi de restriction

$$\chi(A(\mathcal{U})) \rightarrow \chi(A(\mathcal{V}))$$

lorsque  $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$ . La famille  $\{\chi(A(\mathcal{U}))\}$  est un pré-faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie et  $\{A(\mathcal{U})\}$ -modules de base  $J$ . Le faisceau associé sera noté  $\chi(A)$  et appelé le

faisceau des germes de dérivations de  $\mathcal{A}$ .  $\chi(\mathcal{A})$  est un faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie et  $\mathcal{A}$ -modules. On définit de façon analogue les faisceaux en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie  $\chi(\wedge J^*)$ ,  $\chi(\wedge J_k^*)$  et  $\chi(\mathcal{A}_k)$ . Le premier est aussi un  $\mathcal{A}$ -module et les deux derniers sont des  $\mathcal{A}_k$ -modules. Comme  $\mathcal{A}_k$  est l'image réciproque du faisceau structural de la variété  $J_k$ , on démontre que

a) la fibre en  $X \in J$  de  $\chi(\mathcal{A}_k)$  est canoniquement isomorphe à l'algèbre des dérivations de la fibre de  $\mathcal{A}_k$  en  $X$ , i.e.,  $\chi(\mathcal{A}_k(X))$  donc

$$\chi(\mathcal{A}_k) = \bigcup_{X \in J} \chi(\mathcal{A}_k(X)) ,$$

b)  $\chi(\mathcal{A}_k) \simeq J \times_{J_k} \chi(\mathcal{O}_k) \simeq J \times_{J_k} \underline{TJ}_k$  et

c)  $\chi(\mathcal{A}_k)$  est canoniquement isomorphe au faisceau des germes de dérivations de  $\mathcal{A}_k$  au sens des faisceaux (i.e., germes de dérivations locales  $\mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_k$ ).

On a des identifications analogues pour  $\chi(\wedge J_k^*)$  où b) est remplacé par

b')  $\chi(\wedge J_k^*) \simeq J \times_{J_k} \chi(\wedge J_k^*)$ .

Remarquons que ces identifications tombent en défaut pour les faisceaux  $\chi(\mathcal{A})$  et  $\chi(\wedge J^*)$ . Nous allons maintenant définir des sous-faisceaux de dérivations.

Pour chaque  $k \geq -1$ , posons  $\underline{\mathcal{R}}_k =$  faisceau des germes de relèvement de  $\alpha_k$  dans  $\underline{TM}$ ,  $\mathfrak{R}_k = J \times_{J_k} \underline{\mathcal{R}}_k$  et

$$\mathfrak{R} = \lim \text{ind} (\mathfrak{R}_k, \rho^*) .$$

$\mathfrak{R}$  est un faisceau en  $\mathcal{A}$ -modules de base  $J$  qui est filtré par la suite croissante des  $\mathcal{A}_k$ -sous-modules  $\mathfrak{R}_k$  et  $\mathfrak{R} = \bigcup \mathfrak{R}_k$ . Le crochet de  $\mathcal{R}$  (cf. § 3) s'étend à  $\mathfrak{R}$  et définit une structure de faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie qui vérifie, par rapport à la filtration, les propriétés suivantes :

a)  $[\mathfrak{R}_k, \mathfrak{R}_l] \subset \mathfrak{R}_{[k, l] + 1}$ ,

b)  $\mathfrak{R}_{-1}$  est stable par le crochet et, muni du crochet induit, s'identifie à  $J \times_M \underline{TM}$  en tant que  $\mathbf{B}$ -module et  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie.

Le faisceau  $\underline{TM}$  étant isomorphe à  $\chi(\mathcal{O}_M)$  on trouve que  $\mathfrak{R}_{-1} \simeq \chi(\mathbf{B})$ . La famille  $\{\mathcal{R}(\mathcal{U})\}$  est un pré-faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie et  $\{\mathcal{A}(\mathcal{U})\}$ -modules de base  $J$  pour la loi de restriction  $\mathcal{R}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{V})$ , limite inductive des restrictions

$$\mathcal{R}_k(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{R}_k(\mathcal{V}) , \quad \mathcal{U} \supset \mathcal{V} .$$

Le faisceau associé est une  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie et un  $\mathcal{A}$ -module isomorphe à  $\mathfrak{R}$ . La dérivée formelle  $\partial_{\Phi\omega}$  étant une opération locale par rapport à  $\Phi$  et  $\omega$  (cf. § 5, (8)) s'étend en une opération de  $\mathfrak{R}$  dans  $\wedge J^*$ . On en déduit un morphisme injectif

$$\partial : \mathfrak{R} \rightarrow \chi(\wedge J^*)$$

de faisceaux en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie. Chaque  $\partial_{\Phi}$ ,  $\Phi \in \mathfrak{R}$ , est un germe de dériva-

tion de  $\wedge J^*$  qui préserve la graduation, décale la filtration d'une unité pour  $k$  assez grand et commute avec  $d$ . La restriction  $\bar{\partial} : \mathfrak{R} \rightarrow \chi(\mathcal{A})$  est un morphisme injectif de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie et  $\mathcal{A}$ -modules. On définit de même le germe de dérivation homogène (de degré  $-1$ )  $i_\phi, \bar{\phi} \in \mathfrak{R}$ , de  $\wedge J^*$  et toutes les formules du § 5 se transcrivent au niveau des germes. Les opérations  $\partial_\phi$  et  $i_\phi$  ainsi que les formules pertinentes peuvent être obtenues comme limites inductives d'opérations correspondantes de  $\mathcal{R}(\mathcal{U})$  dans  $\wedge \mathcal{U}^*$ .

Indiquons par  $\mathfrak{D}$  l'image  $\partial(\mathfrak{R})$  et soit  $\bar{\mathfrak{D}} = \bar{\partial}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{D} | \mathcal{A}$ . Le faisceau  $\mathfrak{D}$  est un sous-faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie de  $\chi(\wedge J^*)$ , et  $\bar{\mathfrak{D}}$  est en plus un  $\mathcal{A}$ -sous-module de  $\chi(\mathcal{A})$ .  $\mathfrak{D}$  est filtré par la suite croissante des  $\mathbf{R}$ -sous-modules  $\mathfrak{D}_k = \partial(\mathfrak{R}_k)$ , et  $\bar{\mathfrak{D}}$  est filtré par la suite croissante des  $\mathcal{A}_k$ -sous-modules

$$\bar{\mathfrak{D}}_k = \bar{\partial}(\mathfrak{R}_k) = \mathfrak{D}_k | \mathcal{A} .$$

$\mathfrak{D}$  (resp.  $\bar{\mathfrak{D}}$ ) est appelé le faisceau des germes de dérivations formelles de  $\wedge J^*$  (resp.  $\mathcal{A}$ ). On a les relations

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \cup \mathfrak{D}_k , & [\mathfrak{D}_k, \mathfrak{D}_l] &\subset \mathfrak{D}_{[k,l]+1} , \\ \mathfrak{D}_h(\wedge J_k^*) &\subset \wedge J_h^* & \text{pour } k < h , \\ \mathfrak{D}_h(\wedge J_k^*) &\subset \wedge J_{k+1}^* & \text{pour } k \geq h - 1 , \\ \mathfrak{D}_{-1} &\simeq \chi(\mathbf{B}) , & [\mathfrak{D}_{-1}, \mathfrak{D}_{-1}] &\subset \mathfrak{D}_{-1} , \end{aligned}$$

et le crochet induit sur  $\mathfrak{D}_{-1}$  est celui de  $\chi(\mathbf{B})$ . En plus,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{-1}\mathbf{B} &\subset \mathbf{B} , & \mathfrak{D}_{-1} \wedge M^* &\subset \wedge M^* , \\ \mathfrak{D}_{-1} | \mathbf{B} &= \chi(\mathbf{B}) , & \mathfrak{D}_{-1} | \wedge M^* &= \mathcal{L}(\chi(\mathbf{B})) , \\ \mathfrak{D}_k &= \{ \partial \in \mathfrak{D} | \partial(\mathbf{B}) \subset \mathcal{A}_k \} . \end{aligned}$$

Des relations analogues sont valables pour  $\bar{\mathfrak{D}}$ .

Nous étudions ensuite les dérivations holonomes. Soit  $\pi : P \rightarrow M$  une fibration et indiquons par  $\underline{T(P, M)}$  le faisceau, de base  $P$ , des germes de champs locaux  $\pi$ -projetables.  $\underline{T(P, M)}$  est un faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie et  $P \times_M \mathcal{O}_{-1}$ -modules. Remarquons que  $\chi(P, M)$  est canoniquement isomorphe à l'algèbre  $\chi(\mathcal{A}_0, \mathbf{B})$  des dérivations de  $\mathcal{A}_0$  qui laissent invariant  $\mathbf{B}$ . De même,  $\underline{T(P, M)}$  est canoniquement isomorphe au faisceau  $\chi(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_{-1})$  des germes de dérivations de  $\mathcal{O}_0 (= \mathcal{O}_P)$  qui laissent invariant  $\mathcal{O}_{-1} (= \mathcal{O}_M)$ . Le faisceau image réciproque  $J \times_P \underline{T(P, M)}$  est isomorphe à  $\chi(\mathcal{A}_0, \mathbf{B})$  en tant que faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie et  $\mathbf{B}$ -modules. Chaque élément  $(X, \theta) \in J \times_P \underline{T(P, M)}$  détermine une suite de germes de champs de vecteurs  $\tilde{p}_k \theta$  aux points  $X_k \in J_k, k \geq -1$ , et la limite inductive des dérivées de Lie  $\mathcal{L}(\tilde{p}_k \theta)\omega, (X, \omega) \in \wedge J_k^*$ , définit un germe de dérivation  $p_\theta$  de  $\wedge J^*$  (on confond  $\theta$  avec  $(X, \theta)$ ). On obtient ainsi un morphisme injectif de faisceaux en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie

$$p: \chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}) \rightarrow \chi(\wedge J^*) .$$

$p_\theta$  est l'unique germe de dérivation de  $\wedge J^*$  caractérisé par :

- a)  $p_\theta \circ d = d \circ p_\theta$ ,
- b)  $p_\theta(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$ ,
- c)  $p_\theta|_{\mathbf{A}_0} = \mathcal{L}(\theta)$ ,
- d)  $[\partial_\xi, p_\theta]|_{\mathbf{A}} = \partial_{[\xi, \theta|_{\mathbf{B}}]}|_{\mathbf{A}}$  où  $(\xi, \theta) \in \chi(\mathbf{B}) \times_J \chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B})$  et  $\theta|_{\mathbf{B}} \in \chi(\mathbf{B})$  correspond à  $\theta_M$ .

Chaque  $p_\theta$  est un germe de dérivation qui préserve la graduation et la filtration de  $\wedge J^*$ .  $p$  induit, par restriction et pour  $k \geq 0$ , les morphismes injectifs de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie

$$p_k: \chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}) \rightarrow \chi(\wedge J_k^*) , \quad \bar{p}_k: \chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}) \rightarrow \chi(\mathbf{A}_k) .$$

La projectabilité des prolongements se traduit par

$$p_k \theta \in \chi(\wedge J_k^*, \wedge J_h^*) , \quad \bar{p}_k \theta \in \chi(\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_h)$$

pour tout  $h \leq k$ . La restriction

$$\bar{p}: \chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}) \rightarrow \chi(\mathbf{A}) , \quad \bar{p}_\theta = p_\theta|_{\mathbf{A}} ,$$

est un morphisme injectif de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie.  $\bar{p}_\theta$  est l'unique germe de dérivation de  $\chi(\mathbf{A})$  vérifiant

$$\bar{p}_\theta|_{\mathbf{A}_0} = \mathcal{L}(\theta) , \quad [\bar{\partial}_\xi, \bar{p}_\theta] = \bar{\partial}_{[\xi, \theta|_{\mathbf{B}}]} , \quad \xi \in \chi(\mathbf{B}) .$$

Remarquons que le morphisme  $p$  ainsi que toutes les propriétés ci-dessus peuvent être obtenues par passage à la limite inductive de la situation locale

$$p: \chi(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_{-1}) \rightarrow \chi(\wedge \mathcal{U}^*) .$$

Indiquons toujours par  $\mathfrak{P}$  l'image de  $\chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B})$  par  $p$  et soit  $\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}|_{\mathbf{A}}$  l'image de  $\bar{p}$ . Le faisceau  $\bar{\mathfrak{P}}$  est un sous-faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie de  $\chi(\mathbf{A})$ ,

$$\bar{\mathfrak{P}}|_{\mathbf{A}_0} = \chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}) , \quad \mathfrak{P}|_{\wedge P^*} = \mathcal{L}(\chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B})) , \quad \bar{\mathfrak{P}}|_{\mathbf{B}} = \chi(\mathbf{B}) .$$

On appelle  $\mathfrak{P}$  et  $\bar{\mathfrak{P}}$  les faisceaux des germes de dérivations holonomes.

On étend de même l'application  $\mathbf{R}$ -bilinéaire

$$E: \mathfrak{R} \times_J \chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}) \rightarrow \mathfrak{R}$$

d'où le crochet  $[ , ]$  définissant une structure de  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie, produit semi-direct de l'idéal  $\mathfrak{R}$  et de la sous-algèbre  $\chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B})$ . Les applications

$$\partial + p: \mathfrak{R} \times_J \chi(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}) \rightarrow \mathfrak{D} + \mathfrak{P}$$

et  $\bar{\delta} + \bar{\rho}$  sont des isomorphismes d'algèbres de Lie, compatibles avec les filtrations et les décompositions en produits semi-directs. Les formules fondamentales (extension du théorème 7.1) en sont un cas particulier. Les formules du corollaire 3, § 7, ainsi que les formules récurrentes à la fin du § 7 s'étendent aux faisceaux.

La représentation tensorielle est donnée par  $A \otimes_B \chi(\mathbf{B})$ . Ce faisceau est un  $A$ -module et une  $R$ -algèbre de Lie. Remarquons que

$$A_k \otimes_B \chi(\mathbf{B}) \rightarrow A \otimes_B \chi(\mathbf{B})$$

est injectif car  $\chi(\mathbf{B})$  est localement libre sur  $\mathbf{B}$  donc plat. On identifie  $A_k \otimes_B \chi(\mathbf{B})$  à son image. L'application (l'analogue de)  $A$ -linéaire  $\mu$  (proposition 8.2) est un isomorphisme d'algèbres de Lie, compatible avec les filtrations. On définit de même l'application  $A$  et par conséquent, une structure de  $R$ -algèbre de Lie sur le  $\mathbf{B}$ -module

$$A \otimes_B \chi(\mathbf{B}) \times_J \chi(A_0, \mathbf{B}),$$

produit semi-direct de l'idéal  $A \otimes_B \chi(\mathbf{B})$  et de la sous-algèbre  $\chi(A_0, \mathbf{B})$ . L'application  $\mu \times \text{Id}$  (Proposition 8.4) est un isomorphisme  $\mathbf{B}$ -linéaire d'algèbres de Lie, compatible avec les filtrations et les produits semi-directs.

Remarquons finalement que  $A \otimes_B \chi(\mathbf{B})$ ,  $\mathfrak{K}$  et  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D} | A$  sont des faisceaux en  $A$ -modules localement libres de rang égal à  $\dim M$ . On trouve des bases locales dans les composantes de degré  $-1$  pour la filtration (i.e.,  $\chi(\mathbf{B})$ ).

## CHAPITRE II. FORME REDUITE DU PROLONGEMENT HOLONOME

Au chapitre 1 nous avons défini le morphisme  $\bar{\rho}_k$  qui a un champ de vecteurs  $\theta$  de  $P$  (localement projectable) associe le champ de vecteurs  $\bar{\rho}_k \theta$  de  $J_k$ . Soit  $X \in J_k$  et  $v$  le vecteur de  $T_X J_k$  induit par  $\bar{\rho}_k \theta$ . Comme  $\bar{\rho}_k$  est local par rapport à  $\theta$  il est clair que  $v$  ne dépend que du germe de  $\theta$  au point  $\beta_k(X)$  mais cette donnée est encore visiblement surabondante. Dans ce chapitre nous cherchons les données minima pour que le vecteur  $v$  soit déterminé ce qui mettra en évidence un morphisme de fibrations de Lie à savoir, la forme réduite du prolongement holonome qui joue un rôle central dans l'étude des invariants différentiels. A la fin du chapitre, nous en donnons deux applications très simples, l'une dans la linéarisation des opérateurs différentiels et l'autre dans le prolongement de groupoïdes de Lie.

### 11. Fibrations de Lie

Soit  $\pi: P \rightarrow M$  une fibration et  $p: E \rightarrow P$  un fibré vectoriel réel localement

trivial. L'application  $\eta: E \rightarrow M$ ,  $\eta = \pi \circ p$ , est une fibration dont la fibre au dessus de  $x \in M$  est égale au fibré vectoriel  $E|_{\pi^{-1}(x)}$  induit par  $E$  sur la fibre  $\pi^{-1}(x)$ . Une fibration de Lie de base  $\pi$  est la donnée d'un tel couple  $(\pi, p)$ . Par abus de langage,  $\eta$  sera aussi appelée une fibration de Lie de base  $\pi$ , bien que la fibration  $\eta$  ne détermine pas le fibré vectoriel  $p$ . Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, la fibration de Lie  $E \rightarrow P \rightarrow M$  sera indiquée simplement par  $E$ . Soit  $\mu: F \xrightarrow{q} Q \xrightarrow{\omega} N$  une fibration de Lie de base  $\omega$ . Un morphisme de  $\eta$  vers  $\mu$  (plus exactement de  $(\pi, p)$  vers  $(\omega, q)$ ) est la donnée d'une application  $E \xrightarrow{\phi} F$  fibrée par rapport à  $(p, q)$  et  $(\eta, \mu)$  et linéaire sur chaque  $p$ -fibre. Autrement dit, un tel morphisme est la donnée d'un triplet d'applications  $(\phi, \psi, \zeta)$  qui rend le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & F \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ P & \xrightarrow{\psi} & Q \\ \pi \downarrow & & \downarrow \omega \\ M & \xrightarrow{\zeta} & N \end{array}$$

commutatif et tel que  $(\phi, \psi)$  est un morphisme de fibrés vectoriels. La catégorie ainsi obtenue est trop large pour les résultats qu'on envisage d'obtenir et sera restreinte de la façon suivante: Pour chaque variété  $M$  on considère la sous-catégorie  $\mathcal{C}(M)$  formée par les fibrations de Lie au dessus de  $M$  et les  $M$ -morphisms ( $\zeta = \text{Id}$ ). Sauf indication contraire,  $M$  sera désormais une variété fixée et la catégorie en question sera  $\mathcal{C}(M)$ . Lorsque  $\pi = \omega$  et  $\psi = \text{Id}$  on dira que  $\phi$  est un  $\pi$ -morphisme. Comme les morphismes de fibrations de Lie sont tout simplement des morphismes de fibrés vectoriels vérifiant des conditions de compatibilité avec les fibrations de base, la notion de suite exacte de tels morphismes est évidente. On peut de même étendre aux fibrations de Lie les opérations habituelles pour les fibrés vectoriels. Signalons finalement que tout fibré vectoriel  $F \rightarrow M$  est une fibration de Lie  $F \rightarrow M \rightarrow M$  de base  $\text{Id}$ . Si  $\pi: P \rightarrow M$  est une fibration alors  $P \times_M F \rightarrow P \rightarrow M$  est une fibration de Lie de base  $\pi$  et  $p \times_M F \rightarrow F$  est un morphisme strict. Tout  $M$ -morphisme  $F \rightarrow G$  de fibrés vectoriels s'étend en un  $\pi$ -morphisme  $P \times_M F \rightarrow P \times_M G$  de fibrations de Lie.

Soit  $\eta: E \xrightarrow{p} P \xrightarrow{\pi} M$  une fibration de Lie. On indique comme d'habitude par  $J_k P$  (ou simplement  $J_k$ ) la variété des  $k$ -jets de sections de  $\pi$ , par  $J_k E$  le fibré vectoriel, de base  $P$ , des  $k$ -jets de sections de  $p$  et par  $\tilde{J}_k E$  la variété des  $k$ -jets de sections locales de  $\eta = \pi \circ p$ . On indique aussi par  $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k$  et  $\tilde{\rho}_{hk}$  les projections canoniques associées à  $\tilde{J}_k E$ .



**Proposition 11.1.** *Il existe une structure unique de fibré vectoriel localement trivial ( $C^\infty$  réel) sur  $J_k P: \tilde{J}_k E \rightarrow J_k P$  tel que l'application*

$$(X, Y) \in J_k P \times_P J_k E \xrightarrow{\#} YX \in \tilde{J}_k E$$

soit un morphisme de fibrés vectoriels de base  $J_k P$  ( $XY$  est la composition de jets).

Il en résulte que

$$\tilde{\alpha}_k: \tilde{J}_k E \xrightarrow{J_k P} J_k P \xrightarrow{\alpha_k} M$$

est une fibration de Lie de base  $\alpha_k$  et que l'application  $\#$  est un  $\alpha_k$ -morphisme. Tout morphisme  $\phi: E \rightarrow F$  de fibrations de Lie se prolonge en un morphisme  $\tilde{J}_k \phi: \tilde{J}_k E \rightarrow \tilde{J}_k F$  de fibrations de Lie ou plus exactement, si  $\phi$  est donné par le couple  $(\phi, \psi)$  alors  $\tilde{J}_k \phi$  est donné par le couple  $(\tilde{J}_k \phi, J_k \psi)$  qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{J}_k E & \xrightarrow{\tilde{J}_k \phi} & \tilde{J}_k F \\ J_k P \downarrow & & \downarrow J_k Q \\ J_k P & \xrightarrow{J_k \psi} & J_k Q \\ \alpha_k \downarrow & & \downarrow \alpha_k \\ M & \longrightarrow & M \end{array}$$

Le foncteur covariant  $\tilde{J}_k: \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$  est exact et applique une fibration de Lie de base  $\pi: P \rightarrow M$  en une fibration de Lie de base  $\alpha_k: J_k P \rightarrow M$ . Si  $\phi$  est un  $\pi$ -morphisme alors  $\tilde{J}_k \phi$  est un  $\alpha_k$ -morphisme. On a  $\tilde{J}_0 E = E$  et on pose par définition  $\tilde{J}_{-1} E =$  fibré nul de  $M \equiv M$ . Les applications  $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k$  et  $\tilde{\rho}_{h,k}$  sont des morphismes surjectifs de fibrations de Lie. Soient  $E \rightarrow P \rightarrow M$  et  $F \rightarrow Q \rightarrow M$  deux fibrations de Lie et  $E \times_M F \rightarrow P \times_M Q \rightarrow M$  leur produit fibré. Alors

$$\tilde{J}_k(E \times_M F) = \tilde{J}_k E \times_M \tilde{J}_k F \rightarrow J_k P \times_M J_k Q \rightarrow M .$$

Si  $P = Q$  on définit aussi le produit fibré strict  $E \times_P F \rightarrow P \rightarrow M$ . Dans ce cas

$$\tilde{J}_k(E \times_P F) = \tilde{J}_k E \times_{J_k P} \tilde{J}_k F \rightarrow J_k P \rightarrow M .$$

Le foncteur  $\tilde{J}_k$  commute avec les deux produits fibrés. La suite  $0 \rightarrow E \times_P F \rightarrow E \times_M F$  est exacte. Soient d'autre part  $\pi: P \rightarrow M$  une fibration,  $G \rightarrow R \xrightarrow{\omega} N$  une fibration de Lie,  $\psi: P \rightarrow R$  un morphisme (i.e., compatible avec  $(\pi, \omega)$ ) et  $\zeta: M \rightarrow N$  l'application induite par  $\psi$ . L'image réciproque de  $G$  par  $\psi$  est la

fibration de Lie  $P \times_R G \rightarrow P \rightarrow M$ . L'application  $P \times_R G \rightarrow G$  est un morphisme strict de fibrations de Lie et vérifie la propriété universelle habituelle. Les fibrations  $E \times_M F$  et  $E \times_P F$  ne sont autres que les images réciproques de  $E \times F \rightarrow P \times Q \rightarrow M \times M$  par les morphismes  $P \times_M Q \rightarrow P \times Q$  et  $P \rightarrow P \times P$  respectivement. Si  $\zeta$  est un difféomorphisme local alors

$$J_k(P \times_R G) = J_k P \times_{J_k R} J_k G$$

c'est-à-dire,  $J_k(P \times_R G)$  est l'image réciproque par  $J_k \psi : J_k P \rightarrow J_k R$  de la fibration  $J_k G \rightarrow J_k R \rightarrow N$ . En particulier, si  $F \rightarrow M$  est un fibré vectoriel alors  $P \times_M F \rightarrow P \rightarrow M$  est l'image réciproque de  $F$  par  $\pi$  et

$$J_k(P \times_M F) = J_k P \times_M J_k F .$$

On peut aussi définir des images réciproques par rapport à des applications  $\zeta : M \rightarrow N$  mais ceci n'interviendra pas dans la suite.

Examinons maintenant un exemple. Soit  $TP$  le fibré tangent à  $P$ ,  $VP$  le sous-fibré des vecteurs  $\pi$ -verticaux (i.e., tangents aux  $\pi$ -fibres) et  $TM$  le fibré tangent à  $M$ . La suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & VP & \xrightarrow{i} & TP & \xrightarrow{q \times T\pi} & P \times_M TM \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r \\ & & P & \text{---} & P & \text{---} & P \end{array}$$

donne lieu à la suite exacte de fibrations de Lie de base  $\pi$  et de  $\pi$ -morphisms

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & VP & \xrightarrow{i} & TP & \xrightarrow{q \times T\pi} & P \times_M TM \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \eta & & \downarrow \zeta & & \downarrow \mu \\ & & M & \text{---} & M & \text{---} & M \end{array}$$

où  $\eta = \pi \circ p, \zeta = \pi \circ q$  et  $\mu = \pi \circ r$ . En appliquant le foncteur  $J_k$  on obtient la suite exacte de fibrations de Lie de base  $\alpha_k$  et de  $\alpha_k$ -morphisms :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J_k VP & \xrightarrow{J_k i} & J_k TP & \xrightarrow{J_k q \times J_k T\pi} & J_k \times_M J_k TM \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow J_k p & & \downarrow J_k q & & \downarrow J_k r \\ & & J_k & \text{---} & J_k & \text{---} & J_k \\ & & \downarrow \alpha_k & & \downarrow \alpha_k & & \downarrow \alpha_k \\ & & M & \text{---} & M & \text{---} & M \end{array}$$

**12. Forme réduite du prolongement holonome**

Soit  $\theta$  un champ de vecteurs  $\pi$ -projetable défini dans l'ouvert  $U$  de  $P$ . Pour simplifier les notations on indique par  $\wp_k\theta$  (au lieu de  $\tilde{\wp}_k\theta$ ) le champ prolongé qui est défini dans l'ouvert  $\beta_k^{-1}(U)$  de  $J_k$ . On voit facilement que le vecteur  $(\wp_k\theta)_X, X \in J_k$ , ne dépend que de  $j_k\theta(y), y = \beta_k(X)$ , car la dérivée par rapport à  $t$  commute avec les dérivées par rapport aux  $x^i$  (coordonnées locales de  $M$ ). Indiquons par  $T_k(P, M)$  le sous-fibré vectoriel de  $J_k TP$  formé par les  $k$ -jets de champs locaux  $\pi$ -projetables de  $P$ . La remarque précédente montre qu'il existe un morphisme canonique de fibrés vectoriels de base  $J_k$  (noté encore par  $\wp_k$ )

$$(X, j_k\theta(y)) \in J_k \times_P T_k(P, M) \xrightarrow{\wp_k} (\wp_k\theta)_X \in TJ_k$$

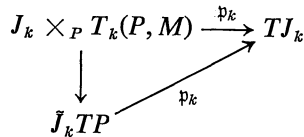
où  $\beta_k(X) = y$ . La réduction ainsi obtenue n'est pas encore bonne car le vecteur  $(\wp_k\theta)_X$  dépend en fait de moins que du jet  $j_k\theta(y)$ . Pour effectuer une deuxième réduction, considérons le morphisme surjectif de fibrés vectoriels de base  $J_k$

$$(X, Y) \in J_k \times_P T_k(P, M) \xrightarrow{\#} YX \in \tilde{J}_k TP.$$

A l'aide de la formule (7.1) on démontre la

**Proposition 12.1.**  $\ker \# \subset \ker \wp_k$ .

$\wp_k$  se factorise donc à  $\tilde{J}_k TP$  en un morphisme qui sera noté encore par  $\wp_k$ . On a le diagramme commutatif :



**Théorème 12.1.** Pour tout  $k \geq 0$  il existe un morphisme unique de fibrés vectoriels  $\wp_k : \tilde{J}_k TP \rightarrow TJ_k$  caractérisé par la relation

$$\wp_k(j_k\theta(y) \cdot X) = (\wp_k\theta)_X$$

où  $\theta$  est un champ local  $\pi$ -projetable de  $P$  et  $X \in J_k$  avec  $y = \beta_k(X)$ .

Le morphisme  $\wp_k$  jouit des propriétés suivantes :

- a)  $\wp_0 = \text{Id}$ .
- b)  $\wp_k Y \in T_X J_k$  où  $Y \in \tilde{J}_k TP$  et  $X = J_k q(Y)$ .
- c) Pour  $k > h \geq 0$  on a  $T\rho_{hk} \circ \wp_k = \wp_h \circ \tilde{\rho}_{hk}$ .
- d)  $\wp_k$  est un  $\alpha_k$ -morphisme de la fibration de Lie  $\tilde{J}_k TP$  vers la fibration de Lie  $TJ_k \rightarrow J_k \rightarrow M$ .
- e) On pose par définition  $\wp_{-1} : \tilde{J}_{-1} TP \subset TJ_{-1}$ .
- f) Soit  $Y = j_k\tau(x) \in \tilde{J}_k TP$  où  $\tau$  est une section locale de  $\zeta$  et posons

$\sigma = q \circ \tau$ . Remarquons que la donnée de  $\tau$  équivaut à la donnée d'un champ de vecteurs  $\tau'$  le long de  $\text{im } \sigma$ . Soit  $\theta$  un champ local  $\pi$ -projetable de  $P$  qui prolonge  $\tau'$  au voisinage de  $\text{im } \sigma$ . Dans ces conditions on a  $\mathfrak{p}_k Y = (\mathfrak{p}_k \theta)_X$  où  $X = j_k \sigma(x)$ .

Soit  $U$  l'ouvert de  $M$  où  $\tau$  est définie. Une variation projetable de  $\sigma$  associée à la variation infinitésimale  $\tau$  est la donnée d'une famille (différentiable) à un paramètre  $(\sigma_t)$ ,  $|t| < \varepsilon$ , d'applications de  $U$  dans  $P$  vérifiant les propriétés suivantes:  $\sigma_0 = \sigma$ ,  $\pi \circ \sigma_t = \psi_t$  est un difféomorphisme local de  $M$  et  $(\partial/\partial t)(\sigma_t)_{t=0} = \tau$ . Comme  $\sigma$  est une section, toute variation à un paramètre de  $\sigma$  est localement projetable. Remarquons maintenant que la donnée d'une famille à un paramètre  $(\phi_t)$  de transformations locales  $\pi$ -projetables de  $P$  tel que  $\phi_0 = \text{Id}$  et  $[(\partial/\partial t)(\phi_t)_{t=0}] \circ \sigma = \tau$  détermine une variation projetable de  $\sigma$  associée à  $\tau$  en posant  $\sigma_t = \phi_t \circ \sigma$ . Réciproquement, étant donnée une variation projetable  $(\sigma_t)$  de  $\sigma$  associée à  $\tau$ , pour tout  $x \in U$  il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x$  et une famille à un paramètre  $(\phi_t)$  de transformations locales  $\pi$ -projetables de  $P$  tel que  $\phi_0 = \text{Id}$  et  $\sigma_t = \phi_t \circ \sigma$  dans  $\mathcal{V}$  et pour  $t$  petit. Dans ces conditions, le champ de vecteurs  $\theta = (\partial/\partial t)(\phi_t)_{t=0}$  est  $\pi$ -projetable et prolonge  $\tau'$  au voisinage de  $\text{im } \sigma$ . Les considérations précédentes ainsi que la définition du champ prolongé  $\mathfrak{p}_k \theta$  montrent que  $\mathfrak{p}_k Y$  est donné par la formule

$$\mathfrak{p}_k Y = (\partial/\partial t)\{[j_k(\sigma_t \circ \psi_t^{-1})] \circ \psi_t\}_{t=0}(x)$$

où  $(\sigma_t)$  est une variation projetable quelconque de  $\sigma$  associée à  $\tau$ .

Indiquons par  $VJ_k$  le sous-fibré de  $TJ_k$  formé par les vecteurs  $\alpha_k$ -verticaux.

**Proposition 12.2.**  $\mathfrak{p}_k(\tilde{J}_k VP) = VJ_k$  et la restriction  $\mathfrak{p}_k : \tilde{J}_k VP \rightarrow VJ_k$  est un  $\alpha_k$ -isomorphisme de fibrations de Lie.

On utilisera encore la formule (7.1) pour vérifier l'injectivité et on calculera ensuite les dimensions des fibres. La restriction de  $\mathfrak{p}_k$  à  $\tilde{J}_k VP$  se calcule de façon très simple. En effet, soit  $Y = j_k \tau(x) \in \tilde{J}_k VP$  où  $\tau$  est une section locale de  $\eta$  définie dans un ouvert  $U$  de  $M$  et posons  $\sigma = p \circ \tau$ . Prenons une famille à un paramètre  $(\sigma_t)$ ,  $|t| < \varepsilon$ , de sections locales de  $\pi$  toutes définies dans  $U$  et tel que  $\sigma_0 = \sigma$  et  $\tau = (\partial/\partial t)(\sigma_t)_{t=0}$ . On trouve alors

$$\mathfrak{p}_k Y = (\partial/\partial t)(j_k \sigma_t(x))_{t=0}.$$

Prenons des coordonnées locales  $(x^i)$  dans  $M$ ,  $(x^i, y^j)$  dans  $P$  et  $(x^i, y^j, Y^k)$  dans  $VP$  où les  $Y^k$  sont les composantes des vecteurs suivants  $\partial/\partial y^k$ . Si  $\tau$  se lit par  $(x^i) \mapsto (x^i, y^i(x^i), Y^i(x^i))$  alors

$$\mathfrak{p}_k Y = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial_\alpha Y^i)(x) v_\alpha^i$$

où  $v_\alpha^i = (\partial/\partial y^i)_x$  et  $X = j_k \sigma(x)$ . La proposition 12.2 permet de définir la transformation naturelle de suites exactes de fibrations de Lie et  $\alpha_k$ -morphisms :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \tilde{J}_k VP & \xrightarrow{\tilde{J}_k i} & \tilde{J}_k TP & \xrightarrow{J_k q \times \tilde{J}_k T\pi} & J_k \times_M J_k TM \longrightarrow 0 \\
 & & \cong \downarrow p_k & & \downarrow p_k & & \downarrow \text{Id} \times \beta_k \\
 0 & \longrightarrow & VJ_k & \longrightarrow & TJ_k & \longrightarrow & J_k \times_M TM \longrightarrow 0
 \end{array}$$

**Proposition 12.3.** *La suite  $\tilde{J}_k TP \xrightarrow{p_k} TJ_k \rightarrow 0$  est exacte pour  $k \geq 0$ . Le diagramme ci-dessus montre que la restriction*

$$J_k q \times \tilde{J}_k T\pi : \ker p_k \rightarrow \ker (\text{Id} \times \beta_k)$$

est un isomorphisme. Soit

$$J_k^0 TM = \ker \left( J_k TM \xrightarrow{\beta_k} TM \right)$$

et posons

$$n_k = [J_k q \times \tilde{J}_k T\pi | \ker p_k]^{-1} .$$

La suite

$$0 \longrightarrow J_k \times_M J_k^0 TM \xrightarrow{n_k} \tilde{J}_k TP \xrightarrow{p_k} TJ_k \longrightarrow 0$$

est exacte.

### 13. La scission canonique

Considérons la suite exacte de fibrations de Lie de base  $\alpha_{k+1}$  et de  $\alpha_{k+1}$ -morphisms

$$0 \longrightarrow J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k VP \xrightarrow{\tilde{J}_k i} J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k TP \xrightarrow{\text{Id} \times \tilde{J}_k T\pi} J_{k+1} \times_M J_k TM \longrightarrow 0 .$$

Montrons que cette suite admet une scission canonique. En effet, soit

$$(X, Y) \in J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k TP \quad \text{où} \quad \rho_{k, k+1}(X) = J_k q(Y) .$$

Ecrivons  $X = j_{k+1}\sigma(x)$  et  $Y = j_k\tau(x)$ . Il est possible de choisir la section  $\tau$  de telle sorte que  $\sigma = q \circ \tau$ . Alors  $s = \tau - T\sigma \circ T\pi \circ \tau$  est une section de  $VP$  vérifiant  $p \circ s = \sigma$  et par conséquent

$$(X, j_k s(x)) \in J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k VP .$$

On définit ainsi un  $\alpha_{k+1}$ -morphisme

$$S_k : J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k TP \rightarrow J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k VP .$$

Pour définir  $S_k$  il a fallu remonter à  $J_{k+1}$  car on dérive  $(k + 1)$ -fois la section  $\sigma$ . Il est clair que  $S_k \circ \tilde{J}_k i = \text{Id}$  donc  $S_k$  scinde  $\tilde{J}_k i$ . A  $S_k$  correspond une scission unique  $\Sigma_k$  de  $\text{Id} \times \tilde{J}_k T\pi$  telle que  $S_k \circ \Sigma_k = 0$ . C'est le  $\alpha_{k+1}$ -morphisme suivant : Soit

$$(X, Z) \in J_{k+1} \times_M J_k TM$$

et posons  $X = j_{k+1}\sigma(x)$  et  $Z = j_k\xi(x)$ . Le composé  $\tau = T\sigma \circ \xi$  est une section de  $TP$  vérifiant  $q \circ \tau = \sigma$  et par conséquent

$$(X, j_k\tau(x)) \in J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k TP .$$

Il est clair que

$$\Sigma_k(X, Z) = (X, j_k\tau(x)) .$$

On définit de même une scission canonique de la suite exacte

$$0 \longrightarrow J_{k+1} \times_{J_k} VJ_k \xrightarrow{i} J_{k+1} \times_{J_k} TJ_k \xrightarrow{\text{Id} \times T\alpha_k} J_{k+1} \times_M TM \longrightarrow 0 .$$

Si  $(X, v) \in J_{k+1} \times_{J_k} TJ_k$  et  $X = j_{k+1}\sigma(x)$  on pose

$$\tilde{S}_k(X, v) = (X, v - Tj_k\sigma \circ T\alpha_k(v)) .$$

Si  $(X, w) \in J_{k+1} \times_M TM$  on pose

$$\tilde{\Sigma}_k(X, w) = (X, Tj_k\sigma(w)) .$$

$\tilde{S}_k$  scinde  $i$  et  $\tilde{\Sigma}_k$  scinde  $\text{Id} \times T\alpha_k$ . Le diagramme suivant est exact, scindé et commutatif dans les deux sens :

(13.1)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \overset{\leftarrow}{\dashrightarrow} & J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k VP & \xleftrightarrow{\tilde{J}_k i} & J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k TP & \xleftarrow{\text{Id} \times \tilde{J}_k T\pi} & J_{k+1} \times_M J_k TM \overset{\leftarrow}{\dashrightarrow} 0 \\ & & \downarrow \cong \mathfrak{p}_k & \swarrow S_k & \downarrow \mathfrak{p}_k & \searrow \Sigma_k & \downarrow \text{Id} \times \beta_k \\ 0 & \overset{\leftarrow}{\dashrightarrow} & J_{k+1} \times_{J_k} VJ_k & \xleftrightarrow{i} & J_{k+1} \times_{J_k} TJ_k & \xleftarrow{\text{Id} \times T\alpha_k} & J_{k+1} \times_M TM \overset{\leftarrow}{\dashrightarrow} 0 \end{array}$$

Ce diagramme montre que

$$\ker \mathfrak{p}_k = \Sigma_k(\ker \text{Id} \times \beta_k)$$

et par conséquent le morphisme

$$J_{k+1} \times_M J_k^0 TM \xrightarrow{\tilde{n}_k} J_{k+1} \times_{J_k} \tilde{J}_k TP ,$$

image réciproque de  $n_k$ , est égal à

$$\Sigma_k | J_{k+1} \times_M J_k^0 TM .$$

Restreignons maintenant le diagramme précédent aux sous-fibrations de Lie formées par les éléments qui induisent le vecteur nul dans  $TM$ . Plus explicitement, on remplace  $\tilde{J}_k TP$  par

$$\tilde{J}_k^0 TP = \{ Y \in \tilde{J}_k TP | T\pi \circ \tilde{\beta}_k(Y) = 0 \} ,$$

$TJ_k$  par  $VJ_k$ ,  $J_k TM$  par  $J_k^0 TM$ ,  $TM$  par 0 et  $\tilde{J}_k VP$  ainsi que  $VJ_k$  ne changent pas. Le diagramme restreint est encore doublement commutatif, exact et scindé. Or, on voit que dans ce cas les définitions de  $S_k$  et  $\Sigma_k$  sont intrinsèques sur  $J_k$ . On n'a plus besoin de remonter à  $J_{k+1}$  car les dérivées d'ordre  $k + 1$  de  $\sigma$  au point  $x$  sont annulées par  $T\pi(\tau(x)) = 0$  et  $\xi(x) = 0$  respectivement. On obtient ainsi le diagramme doublement commutatif exact et scindé de  $\alpha_k$ -morphisms :

$$(13.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \overset{\leftarrow}{\dashrightarrow} & \tilde{J}_k VP & \overset{\tilde{J}_k i}{\dashrightarrow} & \tilde{J}_k^0 TP & \overset{J_k q \times \tilde{J}_k T\pi}{\dashrightarrow} & J_k \times_M J_k^0 TM & \overset{\leftarrow}{\dashrightarrow} & 0 \\ & & \simeq \downarrow p_k & & \downarrow p_k & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & VJ_k & \xrightarrow{\text{Id}} & VJ_k & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

Il en résulte la suite exacte

$$0 \longrightarrow J_k \times_M J_k^0 TM \xrightarrow{\Sigma_k} \tilde{J}_k^0 TP \xrightarrow{p_k} VJ_k \longrightarrow 0$$

et plus généralement le

**Théorème 13.1.** *La suite de  $\alpha_k$ -morphisms*

$$0 \longrightarrow J_k \times_M J_k^0 TM \xrightarrow{\Sigma_k} \tilde{J}_k TP \xrightarrow{p_k} TJ_k \longrightarrow 0$$

est exacte.

**Corollaire.** *Pour que  $Y \in \tilde{J}_k TP$  appartienne à  $\ker p_k$  il faut et il suffit que*

- a)  $T\pi \circ \tilde{\beta}_k(Y) = 0$ ,
- b)  $S_k(Y) = 0$ .

Soit  $Y = j_k \tau(x_0) \in \tilde{J}_k TP$  et posons  $\sigma = q \circ \tau$ . Considérons  $\tau$  comme un champ de vecteurs le long de  $\text{im } \sigma$ . Pour que  $p_k Y = 0$  il faut et il suffit que  $\tau(x_0) = 0$  et que  $\tau$  soit tangent à l'ordre  $k$  à  $\text{im } \sigma$  au point  $\sigma(x_0)$ . Si l'on prend un système de coordonnées locales  $(x^i, y^j)$  de  $P$  tel que  $\text{im } \sigma = \{y^j = 0\}$  et si l'on écrit

$$\tau = \sum_i A_i \partial / \partial x^i + \sum_j B_j \partial / \partial y^j ,$$

alors  $p_k Y = 0$  si et seulement si

- a)  $A_i(x_0) = B_j(x_0) = 0$ ,
- b)  $j_k B_j(x_0) = 0$ ,

$Y$  s'identifie à l'élément  $(j_k \sigma(x_0), j_k(T\pi \circ \tau)(x_0)) \in J_k \times_M J_k^0 TM$ .

**14. Les parties principales**

Soit  $\eta: E \xrightarrow{P} P \xrightarrow{\pi} M$  une fibration de Lie et  $G \rightarrow M$  un fibré vectoriel. Nous indiquons par  $G \otimes E$  la fibration de Lie  $(P \times_M G) \otimes E \rightarrow P \rightarrow M$  où le premier terme est le produit tensoriel fibré des fibrés vectoriels  $P \times_M G$  et  $E$  de base  $P$ . Comme d'habitude, on écrit  $T^* = T^*M$ ,  $S^k T^* =$  puissance symétrique de degré  $k$  de  $T^*$  et  $\wedge^k T^* =$  puissance extérieure de degré  $k$ . Le produit symétrique est noté par  $\vee$ .

**Proposition 14.1.** *Pour  $k \geq 0$  il existe un  $\alpha_k$ -morphisme canonique  $\varepsilon_k$  qui rend exacte la suite de fibrations de Lie*

$$0 \longrightarrow J_k \times_P (S^k T^* \otimes E) \xrightarrow{\varepsilon_k} \tilde{J}_k E \xrightarrow{\tilde{\rho}_{k-1,k}} J_k \times_{J_{k-1}} \tilde{J}_{k-1} E \longrightarrow 0 .$$

Soit

$$(X, df_1 \vee \dots \vee df_k \otimes v) \in J_k \times_P (S^k T^* \otimes E)$$

où  $X = j_k \sigma(x)$ ,  $y = \sigma(x)$ ,  $v \in E_y$  et  $f_i$  sont des fonctions définies au voisinage de  $x$  avec  $f_i(x) = 0$ . Soit  $\tau$  une section locale de  $\eta$  tel que  $\tau(x) = v$  et  $p \circ \tau = \sigma$ . Alors

$$\varepsilon_k(X, df_1 \vee \dots \vee df_k \otimes v) = j_k(f_1 \dots f_k \tau)(x) .$$

**Proposition 14.2.** *Pour tout  $k \geq 0$  il existe un  $\alpha_k$ -morphisme canonique  $\varepsilon_k$  qui rend exacte la suite de fibrations de Lie*

$$0 \longrightarrow J_k \times_P (S^k T^* \otimes VP) \xrightarrow{\varepsilon_k} TJ_k \xrightarrow{T\rho_{k-1,k}} J_k \times_{J_{k-1}} TJ_{k-1} \longrightarrow 0 .$$

On remarque tout d'abord que

$$\ker(TJ_k \rightarrow TJ_{k-1}) = \ker(VJ_k \rightarrow VJ_{k-1})$$

et on définit  $\varepsilon_k$  par le diagramme

(14.1)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & J_k \times_P (S^k T^* \otimes VP) & \xrightarrow{\varepsilon_k} & \tilde{J}_k VP & \xrightarrow{\tilde{\rho}_{k-1,k}} & J_k \times_{J_{k-1}} \tilde{J}_{k-1} VP \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{Id} & & \simeq \downarrow \mathfrak{p}_k & & \simeq \downarrow \mathfrak{p}_{k-1} \\ 0 & \longrightarrow & J_k \times_P (S^k T^* \otimes VP) & \xrightarrow{\varepsilon_k} & VJ_k & \xrightarrow{T\rho_{k-1,k}} & J_k \times_{J_{k-1}} VJ_{k-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où la première suite est donnée par la proposition 14.1. Si on pose  $F = f_1 \dots f_k$  et  $v = v^i \partial / \partial y^i$  alors

$$\varepsilon_k(X, df_1 \vee \dots \vee df_k \otimes v) = \sum_{|\alpha|=k} (\partial_\alpha F)(x) v^\alpha v^\alpha \quad \text{où} \quad v^\alpha = (\partial / \partial y^\alpha)_X .$$



Pour  $k \geq 1$  les diagrammes suivants sont commutatifs et exacts :

(14.2)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & J_k \times_M (S^k T^* \otimes TM) & \longrightarrow & J_k \times_M J_k^0 TM & \longrightarrow & J_k \times_M J_{k-1}^0 TM \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \sigma_k & & \downarrow \Sigma_k & & \downarrow \Sigma_{k-1} \\
 0 & \longrightarrow & J_k \times_P (S^k T^* \otimes TP) & \longrightarrow & \tilde{J}_k TP & \longrightarrow & J_k \times_{J_{k-1}} \tilde{J}_{k-1} TP \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow s_k & & \downarrow p_k & & \downarrow p_{k-1} \\
 0 & \longrightarrow & J_k \times_P (S^k T^* \otimes VP) & \longrightarrow & TJ_k & \longrightarrow & J_k \times_{J_{k-1}} TJ_{k-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

(14.3)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & J_k \times_M (S^k T^* \otimes TM) & \longrightarrow & J_k \times_M J_k^0 TM & \longrightarrow & J_k \times_M J_{k-1}^0 TM \longrightarrow 0 \\
 & & \text{Id} \otimes T\pi \uparrow \downarrow \sigma_k & & J_k q \times \tilde{J}_k T\pi \uparrow \downarrow \Sigma_k & & \text{Id} \times \tilde{J}_{k-1} T\pi \uparrow \downarrow \Sigma_{k-1} \\
 0 & \longrightarrow & J_k \times_P (S^k T^* \otimes TP) & \longrightarrow & \tilde{J}_k^0 TP & \longrightarrow & J_k \times_{J_{k-1}} \tilde{J}_{k-1}^0 TP \longrightarrow 0 \\
 & & \text{Id} \otimes i \uparrow \downarrow s_k & & \tilde{J}_k i \uparrow \downarrow S_k & & \tilde{J}_{k-1} i \uparrow \downarrow S_{k-1} \\
 0 & \longrightarrow & J_k \times_P (S^k T^* \otimes VP) & \longrightarrow & \tilde{J}_k VP & \longrightarrow & J_k \times_{J_{k-1}} \tilde{J}_{k-1} VP \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow & & \uparrow \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où

$$\begin{aligned}
 \sigma_k(X, \omega \otimes v) &= (X, \omega \otimes T\sigma(v)) , \\
 s_k(X, \omega \otimes v) &= (X, \omega \otimes [v - T\sigma \circ T\pi(v)])
 \end{aligned}$$

et  $X = j_k \sigma(x)$ . En outre  $\sigma_k$  scinde  $\text{Id} \otimes T\pi$  et  $s_k$  scinde  $\text{Id} \otimes i$ .

### 15. Forme générale du morphisme $p$

A l'aide du composé

$$J_k P \times_P J_k TP \xrightarrow{\#} \bar{J}_k TP \xrightarrow{\mathfrak{p}_k} TJ_k$$

nous pouvons définir le prolongement canonique d'un champ de vecteurs quelconque  $\theta$  de  $P$ . En effet on pose

$$(\bar{\mathfrak{p}}_k \theta)_X = \mathfrak{p}_k(j_k \theta(y) \cdot X)$$

où  $y = \beta_k X$ . L'application

$$\theta \in \chi(P) \mapsto \bar{\mathfrak{p}}_k \theta \in \chi(J_k)$$

est évidemment un morphisme  $\mathbf{R}$ -linéaire. C'est aussi un morphisme de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie car  $\bar{\mathfrak{p}}_k \theta$  peut être défini de la façon suivante: Soit  $(\phi_t)$  une famille à un paramètre de transformations locales définies dans un ouvert  $U$  de  $P$  tel que

$$\phi_0 = \text{Id}, \quad (\partial/\partial t)(\phi_t)_{t=0} = \theta|_U.$$

Soit  $X_0 \in \beta_k^{-1}(U)$ . Comme  $\phi_0 = \text{Id}$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $X_0$  et un  $\varepsilon > 0$  tel que pour  $|t| < \varepsilon$  et  $X = j_k \sigma(x) \in \mathcal{U}$  l'application  $\pi \circ \phi_t \circ \sigma = \psi_t$  soit inversible au voisinage de  $x$ . Mais alors

$$\tau_t = \phi_t \circ \sigma \circ \psi_t^{-1}$$

est une section locale de  $\pi$  définie au voisinage de  $\psi_t(x)$ . On prolonge la famille  $\phi_t$  en une famille à un paramètre  $\phi_t^k, |t| < \varepsilon$ , de transformations locales définies dans l'ouvert  $\mathcal{U}$  en posant

$$\phi_t^k(X) = j_k \tau_t(\psi_t(x)).$$

On vérifie alors que

$$\bar{\mathfrak{p}}_k \theta|_{\mathcal{U}} = (\partial/\partial t)(\phi_t^k)_{t=0}$$

et on démontre à l'aide du commutateur que

$$\bar{\mathfrak{p}}_k([\theta, \theta']) = [\bar{\mathfrak{p}}_k \theta, \bar{\mathfrak{p}}_k \theta'].$$

Pour  $k \geq 0$ ,  $\bar{\mathfrak{p}}_k \theta$  définit une dérivation de l'algèbre  $\wedge J_k^*$  et, en passant à la limite, une dérivation  $\mathfrak{p}_\theta$  de  $\wedge J^*$ . L'application

$$\theta \in \chi(P) \mapsto \mathfrak{p}_\theta \in \chi(\wedge J^*)$$

est un morphisme injectif de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie.  $\mathfrak{p}_\theta$  préserve la graduation et la filtration (pour  $k \geq 0$ ) de  $\wedge J^*$  et commute avec  $d$ . Le théorème 6.2 s'étend pour  $\theta \in \chi(P)$  lorsqu'on remplace  $[\xi, \theta_M]$  par le crochet  $[\xi, \tilde{\theta}]$  dans  $\mathcal{R}$ . On dé-

finit de même une structure de  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie sur  $\mathcal{R} \times \chi(P)$  à l'aide d'une forme  $\mathbf{R}$ -bilinéaire

$$\mathcal{E} : \mathcal{R} \times \chi(P) \rightarrow \mathcal{R}$$

dont la définition est analogue à celle du § 7 moyennant la précaution suivante : Soit  $\Phi \in \mathcal{R}_k$ ,  $k \geq 1$ , et

$$\Phi_1 = \lambda \circ (\text{Id} \times \Phi) : J_k \rightarrow TP \quad (\text{cf. § 4}) .$$

Pour tout  $X \in J_k$  on prend un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $X$  et un champ local  $\xi \in \chi(J_k)$  tel que

$$(T\beta_k) \circ \xi = \Phi_1|_{\mathcal{U}}$$

d'où en particulier,  $\tilde{\xi} = \Phi|_{\mathcal{U}}$ . On pose

$$\Psi_{k,X} = \tilde{\eta}|_{\mathcal{U}}$$

où  $\eta = [\xi, \tilde{\eta}_k\theta]$ , les  $\Psi_{k,X}$  se recollent en un élément  $\Psi_k \in \mathcal{R}_k$  et on définit

$$(15.1) \quad \mathcal{E}(\Phi, \theta) = \Psi_k .$$

On a

$$[\mathcal{R}_k, \chi(P)] \subset \mathcal{R}_k$$

pour  $k \geq 1$  et

$$[\mathcal{R}_{-1}, \chi(P)] \subset \mathcal{R}_1, \quad [\mathcal{R}_0, \chi(P)] \subset \mathcal{R}_1 .$$

$\mathcal{R}_{-1} \times \chi(P)$  n'est plus stable pour le crochet. L'application  $\mathcal{E}$  peut encore se définir de la façon suivante : Soit  $\Phi \in \mathcal{R}_k$ ,  $\theta \in \chi(P)$  et  $(\phi_t)$  une famille à un paramètre de transformations locales définies dans un ouvert  $U$  de  $P$  tel que

$$\theta|_U = (\partial/\partial t)(\phi_t)_{t=0} .$$

Prenons  $X_0 \in \beta_k^{-1}(U)$ , un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $X_0$  et  $\varepsilon > 0$  comme au début du paragraphe. Si  $X = j_k\sigma(x) \in \mathcal{U}$ , l'application inversible  $\psi_t = \pi \circ \phi_t \circ \sigma$  dépend de  $\sigma$  mais  $u_t(X) = T_x\psi_t$  ne dépend que de  $j_1\sigma(x)$  donc de  $X$  lorsque  $k \geq 1$ . Soit  $\phi_t^k$  le prolongement de  $\phi_t$  à  $\mathcal{U}$ . Alors

$$(15.2) \quad \mathcal{E}(\Phi, \theta)(X) = -(\partial/\partial t)\{[u_t(X)]^{-1}[\Phi \circ \phi_t^k(X)]\}_{t=0} .$$

Avec ces définitions, les formules fondamentales (théorème 7.1) ainsi que les corollaires s'étendent pour  $\theta \in \chi(P)$  en remplaçant  $\theta_M$  par  $\tilde{\theta}$ . De même les deux dernières formules du § 7 s'étendent car si  $\Phi = \tilde{\zeta}$  où  $\zeta \in \chi(J_k)$  est un

champ localement  $\alpha_k$ -projetable, alors  $[\tilde{\Phi}, \theta] = [\tilde{\Phi}, \tilde{\theta}]$  le dernier crochet étant celui de  $\mathcal{R}$ . Pour les représentations tensorielles on suppose que

$$\mu: A_1 \otimes_B \chi(M) \rightarrow \mathcal{R}_1$$

est un isomorphisme et on définit

$$A_2: (A \otimes_{A_1} \mathcal{R}_1) \times \chi(P) \rightarrow A \otimes_{A_1} \mathcal{R}_1$$

par

$$A_2(f \otimes \Phi, \theta) = f \otimes [\Phi, \theta] - (p_\theta f) \otimes \Phi.$$

$A_2$  coïncide avec  $A_1$  lorsque  $\theta$  est localement projetable et définit sur  $(A \otimes_B \chi(M)) \times \chi(P)$  une structure de  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie produit semi-direct par rapport à  $A_2$ . Le § 8 s'étend trivialement. Il est clair que toutes les considérations précédentes s'étendent aux faisceaux (§ 10). Dans ce dernier cas, la forme générale du morphisme  $p$  est donnée par

$$p: \chi(A_0) \rightarrow \chi(\wedge J^*)$$

car  $\chi(A_0) \simeq J \times_P \underline{TP}$ .

Soit  $f \in A_0$ ,  $Y = j_k \tau(x) \in J_k TP$  et  $\sigma = q \circ \tau$ . On définit la section  $f\tau$  par  $(f\tau)x = f(\sigma x)\tau x$  et on pose  $Yf = j_k(f\tau)(x)$ . Ceci définit une structure de  $A_0$ -module sur chaque fibre du fibré vectoriel  $J_k TP \rightarrow J_k$  qui ne dépend que du  $k$ -jet  $j_k(f \circ \sigma)(x)$  d'où, fibre par fibre, une structure de module sur  $J_k(P \times \mathbf{R})$  avec  $P \times \mathbf{R} \rightarrow P \rightarrow M$ . Comme les fibres de  $\Sigma_k(J_k \times_M J_k^0 TM)$  sont des  $A_0$ -sous-modules, on obtient par passage au quotient, une structure de  $A_0$ -module sur les fibres de  $TJ_k$  donc aussi une structure de  $A_0$ -module sur  $\chi(J_k)$  qui est différente de la restriction à  $A_0$  de la structure habituelle du  $A_k$ -module  $\chi(J_k)$ . Nous noterons cette structure par  $(\tilde{\xi})f$  où  $\tilde{\xi} \in \chi(J_k)$ . Le morphisme

$$\theta \in \chi(P) \mapsto \tilde{p}_k \theta \in \chi(J_k)$$

est  $A_0$ -linéaire pour cette nouvelle structure, i.e.,  $\tilde{p}_k(f\theta) = (\tilde{p}_k \theta)f$ . Le morphisme

$$\theta \in \chi(P, M) \mapsto \tilde{p}_k \theta \in \chi(J_k)$$

est  $B$ -linéaire.

## 16. Prolongements par la source et le but

Nous étudions maintenant des prolongements de types particuliers. Soient  $M$  et  $N$  deux variétés,  $P = M \times N$ ,  $\pi = \pi_1: P \rightarrow M$  la première projection et  $\pi_2: P \rightarrow N$  la deuxième projection. Considérons la fibration  $\pi$ . Toute fibration est localement (au voisinage de chaque point de  $P$ ) de ce type trivial. Les sec-

tions locales de  $\pi$  s'identifient aux applications locales de  $M$  dans  $N$ , les  $k$ -jets de sections s'identifient aux  $k$ -jets d'applications. Par conséquent nous avons un difféomorphisme canonique

$$J_k \pi_2: J_k \rightarrow J_k(M, N)$$

où  $J_k(M, N)$  est la variété des  $k$ -jets d'applications locales de  $M$  dans  $N$ . Remarquons en plus que  $TP \simeq TM \times TN$ , le sous-fibré des vecteurs  $\pi$ -verticaux est  $VP \simeq M \times TN$  et le sous-fibré des vecteurs  $\pi$ -horizontaux (i.e.,  $\pi_2$ -verticaux) est  $HP \simeq TM \times N$ . Prenons les fibrations de Lie

$$\zeta: TP \rightarrow M, \quad \eta: VP \rightarrow M, \quad \nu: HP \rightarrow M$$

de base  $\pi$ . Comme  $TP \simeq HP \times_P VP$  alors

$$\bar{J}_k TP \simeq \bar{J}_k HP \times_{J_k} \bar{J}_k VP.$$

D'autre part,

$$\bar{J}_k HP \simeq J_k TM \times_M J_k(M, N), \quad \bar{J}_k VP \simeq J_k(M, TN).$$

Soit  $\lambda: TN \rightarrow N$  la projection canonique. Alors

$$J_k \lambda: J_k(M, TN) \rightarrow J_k(M, N)$$

admet une structure canonique de fibré vectoriel, de base  $J_k(M, N)$ , tel que l'application

$$(X, Y) \in J_k(M, N) \times_N J_k TN \xrightarrow{\#} YX \in J_k(M, TN)$$

soit un morphisme de fibrés vectoriels de base  $J_k(M, N)$ . De façon plus générale, étant données deux variétés  $M$  et  $N$ , nous pouvons définir le foncteur exact (où  $V_N$  indique la catégorie des fibrés vectoriels de base  $N$ )

$$\bar{J}_k: V_N \rightarrow V_{J_k(M, N)}$$

qui au fibré vectoriel  $\lambda: E \rightarrow N$  associe le fibré vectoriel  $\bar{J}_k E$  donné par

$$J_k \lambda: J_k(M, E) \rightarrow J_k(M, N).$$

Si  $F = P \times_N E$  alors l'image réciproque de  $\bar{J}_k E$  par  $J_k \pi_2$ , i.e.,

$$J_k \times_{J_k(M, N)} J_k(M, E)$$

est canoniquement isomorphe au fibré vectoriel  $\bar{J}_k F \rightarrow J_k$  défini au § 11. Ici nous n'adopterons pas la notation  $\bar{J}_k$  car les notations précédentes sont suffisamment explicites. Ceci dit, définissons l'isomorphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{J}_k TP & \xrightarrow{J_k T\pi \times J_k T\pi_2} & J_k TM \times_M J_k(M, TN) \\
 J_k q \downarrow & & \downarrow J_k \lambda \\
 J_k & \xrightarrow{J_k \pi_2} & J_k(M, N) .
 \end{array}$$

On voit facilement que  $\bar{J}_k VP$  s'envoie sur  $J_k(M, TN)$  et  $\bar{J}_k HP$  s'envoie sur  $J_k TM \times_M J_k(M, N)$  (on remarquera que  $J_k TM \times_M J_k(M, TN) = (J_k TM \times_M J_k(M, N)) \times_{J_k(M, N)} J_k(M, TN)$ ). Nous définissons  $\mathfrak{p}'_k$  à l'aide du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{J}_k TP & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k} & TJ_k \\
 \downarrow J_k T\pi \times J_k T\pi_2 & \searrow & \downarrow TJ_k \pi_2 \\
 & J_k & \longrightarrow & J_k \\
 & \downarrow J_k \pi_2 & & \downarrow J_k \pi_2 \\
 & J_k(M, N) & \longrightarrow & J_k(M, N) \\
 \downarrow J_k T\pi \times J_k T\pi_2 & \nearrow & \downarrow TJ_k \pi_2 & \\
 J_k TM \times_M J_k(M, TN) & \xrightarrow{\mathfrak{p}'_k} & TJ_k(M, N)
 \end{array}$$

Indiquons par  $\alpha'_k, \beta'_k$  et  $\rho'_{hk}$  les projections canoniques de  $J_k(M, N)$ . Puisque

$$\begin{aligned}
 (T\alpha_k) \circ \mathfrak{p}_k &= (T\pi) \circ \tilde{\beta}_k, & (T\beta_k) \circ \mathfrak{p}_k &= \tilde{\beta}_k, \\
 \alpha_k \circ J_k \pi_2 &= \alpha_k, & \beta'_k \circ J_k \pi_2 &= \pi_2 \circ \beta_k
 \end{aligned}$$

on voit que

$$\mathfrak{p}'_k(J_k TM \times_M J_k(M, N)) \subset HJ_k(M, N)$$

où  $HJ_k(M, N)$  est le sous-fibré de  $TJ_k(M, N)$  formé par les vecteurs  $\alpha'_k$ -horizontaux (i.e.,  $\beta'_k$ -verticaux) et

$$\mathfrak{p}'_k(J_k(M, TN)) \subset VJ_k(M, N)$$

où  $VJ_k(M, N)$  est le sous-fibré des vecteurs  $\alpha'_k$ -verticaux. Nous allons étudier séparément les restrictions

$$\mathfrak{p}'_k | J_k TM \times_M J_k(M, N) = \mathfrak{p}_k^{\circ} \quad (\text{prolongement par la source})$$

et

$$\mathfrak{p}'_k | J_k(M, TN) = \mathfrak{p}_k^{\circ} \quad (\text{prolongement par le but}) .$$

a) *Prolongement par le but.* Reprenons l'isomorphisme  $J_k T\pi \times J_k T\pi_2$  restreint à  $\tilde{J}_k VP$ . Il s'écrit

$$\begin{array}{ccc} \tilde{J}_k VP & \xrightarrow{J_k T\pi_2} & J_k(M, TN) \\ J_k p \downarrow & & \downarrow J_k \lambda \\ J_k & \xrightarrow{J_k \pi_2} & J_k(M, N) . \end{array}$$

Le diagramme définissant  $p'_k$  se réduit à

$$\begin{array}{ccc} \tilde{J}_k VP & \xrightarrow{p_k} & VJ_k \\ J_k T\pi_2 \downarrow & & \downarrow TJ_k \pi_2 \\ J_k(M, TN) & \xrightarrow{p_k^b} & VJ_k(M, N) . \end{array}$$

$TJ_k \pi_2$  est un isomorphisme car  $\alpha'_k \circ J_k \pi_2 = \alpha_k$ ,  $J_k T\pi_2$  est un isomorphisme et  $p_k$  est un isomorphisme (proposition 12.2) d'où la

**Proposition 16.1.**  $p_k^b$  est un  $\alpha'_k$ -isomorphisme de fibrations de Lie.

Il est facile de voir, en ramenant la situation à  $p_k | \tilde{J}_k VP$  et en utilisant le calcul qui suit la proposition 12.2, que  $p_k^b$  se calcule de la façon suivante : Soit

$$Y = j_k \tau(x) \in J_k(M, TN) , \quad X = J_k \lambda(Y) = j_k \sigma(x) \in J_k(M, N)$$

où  $\sigma = \lambda \circ \tau$ . Alors

$$p_k^b Y \in T_X J_k(M, N) .$$

Soit  $(\sigma_t), |t| < \epsilon$ , une famille à un paramètre d'applications locales de  $M$  dans  $N$ , toutes définies sur le même ouvert et telles que  $\sigma_0 = \sigma$  et  $(\partial/\partial t)(\sigma_t)_{t=0} = \tau$  dans un voisinage de  $x$ . Alors

$$p_k^b Y = (\partial/\partial t)(j_k \sigma_t(x))_{t=0} .$$

En faisant les calculs, on trouve une expression en coordonnées locales de  $p_k^b$  analogue à celle trouvée pour  $p_k | \tilde{J}_k VP$ .

Reprenons maintenant le morphisme fibré

$$J_k(M, N) \times_N J_k TN \xrightarrow{\#} J_k(M, TN) .$$

Fixons un élément  $X \in J_k(M, N)$  et soit  $\#_X$  la restriction de  $\#$  à la fibre au dessus de  $X$ . On dira que  $X$  est injectif, surjectif ou bijectif si la partie linéaire de  $X$  en est ainsi.

**Proposition 16.2.** Si  $X$  est un jet injectif (resp. surjectif) alors  $\#_X$  est surjectif (resp. injectif). Si  $X$  est inversible alors  $\#_X$  est un isomorphisme.

En composant  $\#$  avec  $\mathfrak{p}_k^b$  on définit un morphisme canonique (noté encore par  $\mathfrak{p}_k^b$ )

$$(16.1) \quad \begin{array}{ccc} J_k(M, N) \times_N J_k TN & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k^b \circ \#} & VJ_k(M, N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_k(M, N) & \xrightarrow{\text{Id}} & J_k(M, N) . \end{array}$$

Ce morphisme n'est ni injectif ni surjectif et son rang varie avec la fibre de même que celui de  $\#$ . Indiquons par  $\Pi_k(M, N)$  le sous-ensemble de  $J_k(M, N)$  formé par les jets de rang maximum (de la partie linéaire).  $\Pi_k(M, N)$  est un ouvert dense de  $J_k(M, N)$ ,  $VJ_k(M, N) | \Pi_k(M, N) = V\Pi_k(M, N)$  et la restriction

$$\begin{array}{ccc} \Pi_k(M, N) \times_N J_k TN & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k^b \circ \#} & VJ_k(M, N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_k(M, N) & \xrightarrow{\text{Id}} & \Pi_k(M, N) \end{array}$$

jouit, en vertu de la proposition 16.2, de la propriété suivante :

**Corollaire.** *Si  $\dim M \leq$  (resp.  $\geq$ )  $\dim N$  alors la restriction  $\mathfrak{p}_k^b \circ \#$  est surjective (resp. injective). Si  $\dim M = \dim N$  alors  $\mathfrak{p}_k^b \circ \#$  est un isomorphisme.*

Rappelons que  $J_k TN$  est le fibré des  $k$ -jets de champs de vecteurs locaux de  $N$ . Si  $\theta$  est un champ local de  $N$  défini dans  $U$ , à chaque  $X \in (\beta'_k)^{-1}U$  nous associons le vecteur

$$\mathfrak{p}_k^b \circ \#(X, j_k \theta(y)) = \mathfrak{p}_k^b(j_k \theta(y) \cdot X) \in V_X J_k(M, N)$$

où  $y = \beta'_k X$ . Nous obtenons de cette façon un champ de vecteurs  $\tilde{\mathfrak{p}}_k^b \theta$  défini dans  $(\beta'_k)^{-1}U$ . L'application

$$\theta \mapsto \tilde{\mathfrak{p}}_k^b \theta$$

est un morphisme du pré-faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie des champs locaux de  $N$  vers le pré-faisceau des champs locaux de  $J_k(M, N)$  définis sur les ouverts  $\beta'_k$ -saturés. En prenant la limite inductive des dérivations de Lie associées aux champs  $\tilde{\mathfrak{p}}_k^b \theta$  nous obtenons un morphisme injectif de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie

$$\mathfrak{p}^b : \chi(N) \rightarrow \chi(\wedge J^*(M, N))$$

où

$$\wedge J^*(M, N) = \lim \text{ind} (\wedge J_k^*(M, N), \rho_{k^*}^*) .$$

On démontre l'analogie du théorème 6.2 pour  $\mathfrak{p}^b$  en remplaçant la dernière condition par



$$[\partial_\xi, \mathfrak{p}_\theta^b] | A' = 0$$

où

$$A' = \wedge^0 J^*(M, N) = \lim \text{ind } \mathcal{F}_{J_k(M, N)} .$$

On définit les dérivations formelles pour les espaces  $J_k(M, N)$  de façon entièrement analogue en remplaçant  $\alpha_k$  par  $\alpha'_k$ . Tout le chapitre I se recopie dans ce contexte. Les difféomorphismes  $J_k\pi_2$  induisent, à la limite, un isomorphisme des algèbres  $\wedge J^*$  et  $\wedge J^*(M, N)$  ainsi qu'un isomorphisme des faisceaux correspondants.

Prenons maintenant un champ de vecteurs  $\theta$  défini dans l'ouvert  $U$  de  $N$ . Soit  $\theta'$  le champ  $\pi$ -vertical de  $P$  défini dans  $\pi_2^{-1}U$  et qui se projette sur  $\theta$  par  $T\pi_2$ . Il résulte des définitions que

$$TJ_k\pi_2(\mathfrak{p}_k\theta') = \mathfrak{p}_k^b\theta .$$

Ceci justifie les assertions précédentes et montre, en particulier, que le morphisme

$$\theta \mapsto \mathfrak{p}_k^b\theta$$

est le prolongement usuel de  $\theta$  par le but: On prend le groupe local à un paramètre ( $\phi_t$ ) engendré par  $\theta$  (ou plus généralement une famille à un paramètre dont la dérivée pour  $t = 0$  est  $\theta$ ), on le prolonge à  $J_k(M, N)$  en posant

$$\phi_t^k(X) = j_k\phi_t(\beta'_k X) \cdot X$$

et on le dérive par rapport à  $t$  en 0. Notre discussion montre que l'aspect infinitésimal de ce prolongement, i.e.,  $\mathfrak{p}_k^b \circ \#$  n'est pas régulier. Par contre

$$\mathfrak{p}_k^b : J_k(M, TN) \rightarrow VJ_k(M, N)$$

est régulier, en fait un isomorphisme.

b) *Prolongement par la source.* Reprenons l'isomorphisme  $J_kT\pi \times J_kT\pi_2$  restreint à  $J_kHP$ . Il s'écrit

$$(16.2) \quad \begin{array}{ccc} J_kHP & \xrightarrow{J_kT\pi} & J_kTM \times_M J_k(M, N) \\ J_k\omega \downarrow & & \downarrow \\ J_k & \xrightarrow{J_k\pi_2} & J_k(M, N) \end{array}$$

où  $\omega : TM \rightarrow M$  est la projection canonique. Le diagramme définissant  $\mathfrak{p}'_k$  se réduit à

$$(16.3) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{J}_k HP & \xrightarrow{p_k} & HJ_k \\ J_k T\pi \downarrow \uparrow \varphi & & \downarrow TJ_k \pi_2 \\ J_k TM \times_M J_k(M, N) & \xrightarrow{p_k^s} & HJ_k(M, N) \end{array}$$

où  $HJ_k$  est le sous-fibré de  $TJ_k$  formé par les vecteurs  $\alpha_k$ -horizontaux (i.e.,  $\pi_2 \circ \beta_k$ -verticaux). On remarque que  $J_k T\pi$  et  $TJ_k \pi_2$  sont des isomorphismes. Indiquons par  $\varphi$  l'isomorphisme inverse de  $J_k T\pi$ .  $\varphi$  est défini de la façon suivante : Soit

$$(Y, X) \in J_k TM \times_M J_k(M, N), \quad X = j_k f(x), \quad Y = j_k \theta(x)$$

et soit  $U$  l'intersection des domaines de  $f$  et  $\theta$ . Posons

$$\tau : y \in U \mapsto (\theta(y), f(y)) \in HP = TM \times N.$$

Alors  $\varphi(Y, X) = j_k \tau(x)$ . Identifions  $J_k \times_M J_k TM$  à  $J_k TM \times_M J_k(M, N)$  par l'isomorphisme  $(X, Y) \mapsto (Y, J_k \pi_2 X)$ . Alors  $\Sigma_k$  devient une application

$$J_k^0 TM \times_M J_k(M, N) \begin{array}{c} \xrightarrow{\Sigma_k} \\ \xleftarrow{J_k T\pi} \end{array} J_k^0 TP$$

qui scinde  $J_k T\pi | J_k^0 TP$  (cf. § 13, à rigueur  $J_k T\pi$  représente l'application  $J_k T\pi \times J_k(\pi_2 \circ q)$ ). De même  $\varphi$  scinde  $J_k T\pi | \tilde{J}_k HP$ . Comme

$$\ker p_k^s = J_k T\pi(\ker p_k)$$

et

$$\ker p_k = \tilde{J}_k HP \cap \Sigma_k(J_k \times_M J_k^0 TM) = \tilde{J}_k HP \cap \Sigma_k(J_k^0 TM \times_M J_k(M, N))$$

on voit que  $\ker p_k^s$  est le sous-fibré de  $J_k^0 TM \times_M J_k(M, N)$  noyau de

$$(\varphi - \Sigma_k) | J_k^0 TM \times_M J_k(M, N).$$

La dimension des fibres de ce noyau n'est pas constante. En effet, prenons un  $X \in J_k(M, N)$ . Pour déterminer le noyau de  $p_k^s$  dans la fibre au dessus de  $X$  on procède comme suit : Soit  $Y = j_k \theta(x) \in J_k^0 TM$ ,  $x = \alpha'_k X$  et écrivons  $X = j_k f(x)$ . On construit  $\tau : U \rightarrow HP$  comme ci-dessus,

$$\sigma : y \in U \mapsto (y, f(y)) \in P, \quad \tau_1 : y \in U \mapsto T\sigma(\theta(y)) \in TP$$

et on prend la différence  $\tau - \tau_1 : U \rightarrow VP$ . Alors  $p_k^s(Y, X) = 0$  si et seulement si  $j_k(\tau - \tau_1)x = 0$ . Or,  $j_k(\tau - \tau_1)x \in \tilde{J}_k VP$  donc la dernière condition est équivalente à

$$0 = J_k T \pi_2 (j_k (\tau - \tau_1) x) = j_k \tau_2 (x) \quad \text{où} \quad \tau_2 = (Tf) \circ \theta$$

(cf. premier diagramme de (a)). Définissons le morphisme de fibrations de Lie de base  $\alpha'_k$

$$\Phi : J_k^0 TM \times_M J_k(M, N) \rightarrow \ker b_k, \quad (j_k \theta(x), j_k f(x)) \mapsto j_k (Tf \circ \theta) x$$

où  $b_k : J_k(M, TN) \rightarrow TN$  est le morphisme but. On vient de démontrer que  $\ker p_k^s = \ker \Phi$ . Un argument semblable démontre la

**Proposition 16.3.**  $p_k^s(Y, X) = p_k^b \circ \Phi(Y, X)$  pour tout  $(Y, X) \in J_k^0 TM \times_M J_k(M, N)$ .

En effet, l'élément  $(Y, X) \in J_k^0 TM \times_M J_k(M, N)$  est envoyé par  $(J_k T \pi \times J_k T \pi_2)^{-1}$  en un élément  $Z \in J_k^0 TP$ . Sa composante verticale  $J_k i \circ S_k(Z)$  (cf. (13.2)), seule à donner une contribution à  $p_k$ , s'identifie par  $J_k T \pi \times J_k T \pi_2$  à  $\Phi(Y, X)$  et par conséquent est appliquée par  $p_k^b$ .

**Corollaire 1.**  $\ker p_k^s = \ker \Phi$ .

Remarquons maintenant que

$$p_k^b : \ker b_k \rightarrow WJ_k(M, N)$$

est un isomorphisme où  $WJ_k(M, N)$  est le sous-fibré de  $TJ_k(M, N)$  formé par les vecteurs  $(\alpha'_k \times \beta'_k)$ -verticaux. Si  $X \in J_k(M, N)$  est injectif alors la restriction  $\Phi_X$  de  $\Phi$  à la fibre au dessus de  $X$  est aussi injective et par conséquent  $(p_k^s)_X$  est injectif. Si  $X$  est surjectif il en est de même de  $\Phi_X$ . Montrons que dans ce cas  $(p_k^s)_X$  est aussi surjectif. En effet, sur la fibre

$$(J_k^0 TM \times_M J_k(M, N))_X$$

on a  $p_k^s = p_k^b \circ \Phi_X$  donc l'image de cette fibre par  $p_k^s$  est égale à  $WJ_k(M, N)_X$ . D'autre part

$$(T\alpha'_k) \circ p_k^s = \beta_k : J_k TM \times_M J_k(M, N) \rightarrow TM$$

où  $\beta_k$  est la projection but du premier facteur. Ceci entraîne que  $T\alpha'_k(\text{im } p_k^s) = TM$  d'où

$$\text{im } (p_k^s)_X = HJ_k(M, N)_X$$

car  $T\alpha'_k(WJ_k(M, N)) = 0$ . Ceci montre bien que  $(p_k^s)_X$  est surjectif lorsque  $X$  est surjectif. Considérons la restriction de  $p_k^s$  aux fibrés induits sur l'ouvert dense  $\Pi_k(M, N)$ , i.e.,

$$\begin{array}{ccc} J_k TM \times_M \Pi_k(M, N) & \xrightarrow{p_k^s} & HJ_k(M, N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_k(M, N) & \xrightarrow{\text{Id}} & \Pi_k(M, N) \end{array}$$

où  $HJ_k(M, N) | \Pi_k(M, N) = H\Pi_k(M, N) =$  sous-fibré des vecteurs  $\beta'_k$ -verticaux.

**Corollaire 2.** *Si  $\dim M \leq$  (resp.  $\geq$ )  $\dim N$  alors la restriction  $\mathfrak{p}_k^s$  est injective (resp. surjective). Si  $\dim M = \dim N$  alors  $\mathfrak{p}_k^s$  est un isomorphisme (comparer avec le corollaire de la proposition 16.2).*

Rappelons que  $J_k TM$  est le fibré des  $k$ -jets de champs de vecteurs locaux de  $M$ . Si  $\theta$  est un tel champ défini dans l'ouvert  $U$ , nous lui associons le champ  $\tilde{\mathfrak{p}}_k^s \theta$  défini dans  $(\alpha'_k)^{-1}U$  en posant

$$(\tilde{\mathfrak{p}}_k^s \theta)_X = \mathfrak{p}_k^s(j_k \theta(\alpha'_k X), X) \in HJ_k(M, N)_X .$$

Si  $\theta'$  est le champ horizontal dans  $\pi^{-1}U$  qui se projette sur  $\theta$  alors

$$TJ_k \pi_2(\tilde{\mathfrak{p}}_k^s \theta') = \tilde{\mathfrak{p}}_k^s \theta .$$

L'application  $\theta \mapsto \tilde{\mathfrak{p}}_k^s \theta$  est un morphisme du pré-faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie des champs locaux de  $M$  vers le pré-faisceau des champs locaux de  $J_k(M, N)$  définis sur les ouverts  $\alpha'_k$ -saturés. La limite inductive des dérivations de Lie associées aux champs  $\tilde{\mathfrak{p}}_k^s \theta$  donne un morphisme injectif de  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie

$$\mathfrak{p}^s : \chi(M) \rightarrow \chi(\wedge J^*(M, N)) .$$

Tout le chapitre I se recopie dans le contexte présent du prolongement par la source. En particulier on démontre l'analogie du théorème 6.2 pour  $\mathfrak{p}^s$  en remplaçant la dernière condition par

$$[\partial_\xi, \mathfrak{p}_\theta^s] | A' = \partial_{[\xi, \theta]} | A'$$

où  $[\xi, \theta]$  est le crochet de Lie dans  $\chi(M)$ . Le champ  $\tilde{\mathfrak{p}}_k^s \theta$  est le prolongement usuel de  $\theta$  par la source c'est-à-dire, on prend le groupe local (ou une famille locale) à un paramètre  $(\phi_t)$  engendré par  $\theta$ , on le prolonge à  $J_k(M, N)$  on posant

$$(16.4) \quad \phi_t^s(X) = X \cdot [j_k \phi_t(\alpha'_k X)]^{-1}$$

et on dérive par rapport à  $t$  en 0. Notre discussion montre que l'aspect infinitésimal de ce prolongement, i.e.,

$$\mathfrak{p}_k^s : J_k TM \times_M J_k(M, N) \rightarrow HJ_k(M, N)$$

n'est pas régulier.

On relie facilement  $\tilde{\mathfrak{p}}_k^s$  avec  $\tilde{\mathfrak{p}}_k^0$ . En effet, soit  $\theta$  un champ local de  $P$  qui est projetable dans  $M$  et  $N$ , i.e.,  $\theta = T\pi\theta \times T\pi_2\theta$ . Alors

$$TJ_k \pi_2(\tilde{\mathfrak{p}}_k^s \theta) = \tilde{\mathfrak{p}}_k^s(T\pi\theta) + \tilde{\mathfrak{p}}_k^0(T\pi_2\theta) .$$

Si  $\xi$  est un champ local de  $M$  et  $\theta$  un champ local de  $N$  alors

$$[\tilde{p}_k^{\xi}, \tilde{p}_k^{\theta}] = 0 .$$

En effet, si  $\xi'$  est le champ horizontal de  $P$  qui se projette en  $\xi$  et  $\theta'$  le champ vertical qui se projette en  $\theta'$  alors  $[\xi', \theta'] = 0$  et par conséquent

$$[\tilde{p}_k^{\xi}, \tilde{p}_k^{\theta}] = TJ_k \pi_2[\tilde{p}_k \xi', \tilde{p}_k \theta'] = TJ_k \pi_2(\tilde{p}_k[\xi', \theta']) = 0 .$$

Cette dernière propriété est aussi une conséquence triviale de l'associativité de la loi de composition des jets car celle-ci entraîne la commutativité des groupes à un paramètre prolongés par la source avec ceux prolongés par le but. Lorsqu'on restreint toutes les considérations à  $\Pi_k(M, N)$  avec  $\dim M = \dim N$ , on passe du prolongement par la source à celui par le but et réciproquement par l'inversion

$$X \in \Pi_k(M, N) \rightarrow X^{-1} \in \Pi_k(N, M) .$$

### 17. Linéarisation d'un opérateur différentiel

Soit

$$\eta: E \xrightarrow{p} P \xrightarrow{\pi} M$$

une fibration de Lie. Nous indiquons par  $\underline{E}$  le faisceau des germes de sections locales de  $\eta$ . Alors  $\underline{p}: \underline{E} \rightarrow \underline{P}$  est un faisceau en  $\mathcal{O}_{\underline{P}}$ -modules canoniquement isomorphe au faisceau des germes de sections du fibré vectoriel  $\underline{P} \times_P E$  de base  $\underline{P}$ . Remarquons en outre que

$$\mathcal{O}_{\underline{P}} \simeq \underline{P} \times_M \mathcal{O}_M$$

et que

$$(X, Y) \in \underline{P} \times_P J_\lambda E \xrightarrow{\#} YX \in \underline{E}$$

est un morphisme surjectif de faisceaux en  $\mathcal{O}_{\underline{P}}$ -modules où  $J_\lambda E$  est le faisceau des germes de sections de  $p$ .  $\tilde{j}_k: \underline{E} \rightarrow \underline{J}_k E$  est un morphisme  $\mathbf{R}$ -linéaire injectif.

Soit  $F \xrightarrow{q} Q \xrightarrow{\omega} M$  une deuxième fibration de Lie.

**Définition.** Un opérateur différentiel  $D: \underline{E} \rightarrow \underline{F}$  est dit linéaire si pour deux sections locales quelconques  $s$  et  $s'$  de  $E$  avec  $p \circ s = p \circ s'$  on a  $q \circ D(s) = q \circ D(s')$  et  $D(as + bs') = aD(s) + bD(s')$  où  $a, b \in \mathbf{R}$ .

Si l'on considère  $\underline{E}$  et  $\underline{F}$  comme des faisceaux de base  $\underline{P}$  et  $\underline{Q}$  respectivement, alors  $D: \underline{E} \rightarrow \underline{F}$  est linéaire si  $D \in \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\underline{E}, \underline{F})$ . L'opérateur  $D$  induit, à l'aide de  $p$  et  $q$ , un opérateur  $\mathcal{D}: \underline{P} \rightarrow \underline{Q}$  dont l'ordre est inférieur ou égal à l'ordre de  $D$ . Si  $D$  est d'ordre  $\leq k$  alors

$$\tau_{k+l}(D): J_{k+l} E \rightarrow F, \quad l \geq 0,$$

est un morphisme de fibrations de Lie qui induit  $\tau_{k+i}(\mathcal{D})$  (cf. § 2). Réciproquement, tout morphisme

$$J_k E \xrightarrow{\phi} F$$

définit, à l'aide de  $\tilde{j}_k$ , un opérateur différentiel linéaire d'ordre  $\leq k$ . Le composé de deux opérateurs linéaires ainsi que le prolongement sont des opérateurs linéaires.  $\tilde{j}_k$  est un opérateur linéaire d'ordre  $k$ . A l'aide de la suite exacte

$$0 \longrightarrow J_k \times_P (S^k T^* \otimes E) \xrightarrow{\varepsilon_k} J_k E$$

on peut définir la partie principale d'un opérateur linéaire d'ordre  $\leq k$  ainsi que les notions qui s'y rattachent.

**Définition.** Soit  $\mathcal{D} : \underline{P} \rightarrow \underline{Q}$  un opérateur différentiel. Une linéarisation de  $\mathcal{D}$  est un opérateur différentiel linéaire  $D : \underline{E} \rightarrow \underline{F}$  qui induit  $\mathcal{D}$ .

Si  $D$  linéarise  $\mathcal{D}$  et  $D'$  linéarise  $\mathcal{D}'$  alors  $D' \circ D$  linéarise  $\mathcal{D}' \circ \mathcal{D}$ . En outre,  $D^{(l)}$  linéarise  $\mathcal{D}^{(l)}$  et  $\tilde{j}_k$  linéarise  $j_k$ . Soit

$$\zeta : TP \xrightarrow{q} P \xrightarrow{\pi} M$$

la fibration de Lie tangente et  $s$  une section locale de  $\zeta$ .

**Théorème.** Soit  $\mathcal{D} : \underline{P} \rightarrow \underline{Q}$  un opérateur différentiel d'ordre fini. Il existe un opérateur différentiel linéaire unique  $T\mathcal{D} : \underline{TP} \rightarrow \underline{TQ}$  qui linéarise  $\mathcal{D}$  et qui vérifie

$$T\mathcal{D}(s) = (\partial/\partial t)\{[\mathcal{D}(\sigma_t \circ \psi_t^{-1})] \circ \psi_t\}_{t=0}$$

pour toute variation projetable  $(\sigma_t)$  associée à  $s$  (cf. § 12).

On définit  $T\mathcal{D}$  par le composé

$$\tau_k(T\mathcal{D}) : J_k TP \xrightarrow{p_k} TJ_k P \xrightarrow{T\tau_k(\mathcal{D})} TQ .$$

$\mathcal{D}$  et  $T\mathcal{D}$  sont de même ordre,  $T(\mathcal{D}' \circ \mathcal{D}) = T\mathcal{D}' \circ T\mathcal{D}$ ,  $Tj_k = p_k \circ \tilde{j}_k$  et  $T(\mathcal{D}^{(l)}) = p_l \circ (T\mathcal{D})^{(l)}$ . Soit  $\Phi(M)$  la catégorie dont les objets sont les fibrations  $P \xrightarrow{\pi} M$  et les morphismes sont les opérateurs différentiels d'ordre fini. Soit  $T$  le foncteur qui à l'objet  $P$  associe la fibration de Lie  $TP$  et au morphisme  $\mathcal{D}$  associe  $T\mathcal{D}$ . La restriction de  $T$  à la sous-catégorie des opérateurs de degré zéro n'est autre que le foncteur qui au morphisme fibré  $P \xrightarrow{\phi} Q$  associe le morphisme de fibrations de Lie  $TP \xrightarrow{T\phi} TQ$ . Remarquons finalement que la restriction de  $T\mathcal{D}$  à la fibration de Lie verticale  $VP$  définit une linéarisation verticale

$$V\mathcal{D}: VP \rightarrow VQ$$

de  $\mathcal{D}$  dont l'ordre est celui de  $\mathcal{D}$ . On a  $V\mathcal{D}(s) = (\partial/\partial t)(\mathcal{D}\sigma_t)_{t=0}$  où  $(\sigma_t)$  est une variation verticale associée à  $s$ .

### 18. Prolongement de groupoïdes de Lie

A l'aide du morphisme  $p_k$  nous allons donner une démonstration simple d'un théorème bien connu d'Ehresmann sur le prolongement de groupoïdes de Lie. Nous rappelons ici les quelques définitions et propriétés nécessaires à l'énoncé du théorème. Pour une discussion plus détaillée ainsi que des exemples, nous renvoyons le lecteur à [9], [10], [26], [28], [34], [35] et [53].

**Définition.** Un groupoïde différentiable est la donnée d'un ensemble  $G$  muni d'une structure de groupoïde et d'une structure différentiable vérifiant les conditions de compatibilité suivantes :

- 1) L'ensemble  $M$  des unités de  $G$  est une sous-variété.
- 2) Les applications source et but  $\alpha, \beta: G \rightarrow M$  sont différentiables et transverses.
- 3) L'application  $(X, Y) \in G \times_M G \rightarrow XY \in G$  est différentiable où  $G \times_M G$  est le produit fibré de  $\alpha$  et  $\beta$ .
- 4) L'application  $X \in G \rightarrow X^{-1} \in G$  est différentiable.

Un groupoïde de Lie est un groupoïde différentiable pour lequel  $\alpha: G \rightarrow M$  est une fibration. On remarquera que, pour tout groupoïde différentiable  $G$ , la propriété ci-dessus est toujours vérifiée pour la composante  $\alpha$ -connexe  $G_0$  de  $M$  car  $\alpha$  admet l'inverse à droite  $\iota: M \rightarrow G$  (cf. [26]). Soit  $G$  un groupoïde de Lie. Par inversion,  $\beta$  est également une fibration et on voit que la condition 2) de la définition est conséquence de cette hypothèse. En outre,  $M$  est régulièrement plongée car  $\alpha$  (et  $\beta$ ) est une rétraction. On indique par  $G_x$  la fibre de  $\alpha: G \rightarrow M$  au dessus de  $x$ . Tout  $X \in G$  définit un difféomorphisme

$$\phi_X: Y \in G_y \rightarrow YX \in G_x$$

où  $x = \alpha(X)$  et  $y = \beta(X)$ . Un champ de vecteurs local  $\theta$  de  $G$  est dit invariant à droite si  $\theta$  est  $\alpha$ -vertical et  $T\phi_X\theta = \theta$  pour tout  $X \in G$  (chaque fois que la relation a un sens). Si  $\theta$  est invariant à droite et défini dans l'ouvert  $\mathcal{U}$ , il s'étend en un champ invariant à droite  $\theta'$  défini dans  $\mathcal{V} = \beta^{-1}(\beta\mathcal{U})$ . En effet, pour  $Z \in \mathcal{V}$  et  $X \in \mathcal{U}$  avec  $\beta(Z) = \beta(X)$  on pose  $\theta'_Z = T\phi_W\theta_X$  où  $W = X^{-1}Z$ . Par restriction de  $\theta'$ ,  $\theta$  détermine un champ de vecteurs  $\alpha$ -vertical  $\theta_0$  le long de  $U = \beta(\mathcal{U})$ . Réciproquement, si  $\theta_0$  est un champ de vecteurs  $\alpha$ -vertical défini le long d'un ouvert  $U$  de  $M$  alors il existe un champ invariant à droite unique  $\theta$  défini dans  $\beta^{-1}(U)$  et qui induit  $\theta_0$ . On voit ainsi que les domaines de définition naturels pour les champs invariants à droite sont les ouverts  $\beta$ -saturés de  $G$ . En outre, le pré-faisceau des champs de vecteurs invariants à droite et définis dans les ouverts  $\beta$ -saturés est isomorphe au pré-faisceau des sections locales du

fibré vectoriel  $VG|M$ , restriction à  $M$  du fibré des vecteurs  $\alpha$ -verticaux de  $G$ . Il est clair que le crochet de champs invariants à droite est encore invariant à droite d'où, par transport, une structure de  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie sur le pré-faisceau  $\Gamma_{\text{loc}}(VG|M)$ . En passant aux germes, on obtient un faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  de base  $M$  qui est par définition l'algèbre de Lie de  $G$ .

Soit  $\alpha: G \rightarrow M$  la fibration source. La variété  $J_k G$  des  $k$ -jets de sections locales de  $\alpha$  admet une structure naturelle de catégorie différentiable:  $j_k \tau(y)$  est composable avec  $j_k \sigma(x)$  si et seulement si  $y = \beta \circ \sigma(x)$  et on pose

$$[j_k \tau(y)][j_k \sigma(x)] = j_k s(x)$$

où  $s(z) = \tau(\beta \circ \sigma(z))\sigma(z)$  est défini à l'aide du produit de  $G$ . Les unités de  $J_k G$  sont les jets  $j_k \iota(x)$  où  $x \in M$  et  $\iota: M \rightarrow G$  est l'inclusion donc peuvent être identifiées aux éléments de  $M$ . Le groupoïde des éléments inversibles de  $J_k G$  est, suivant Ehresmann, le prolongement d'ordre  $k$  du groupoïde  $G$  et sera noté  $G_k$ . C'est un ouvert de  $J_k G$  et, muni de la structure induite, devient un groupoïde de Lie avec  $M$  pour variété d'unités. On vérifie que  $G_k$  est l'ensemble des jets  $j_k \sigma(x)$  tel que  $T_x(\beta \circ \sigma)$  est inversible. On note par  $\mathfrak{g}_k$  l'algèbre de Lie.

Considérons maintenant le fibré vectoriel  $J_k \mathfrak{g}$ . Il existe une structure unique de  $\mathbf{R}$ -algèbre de Lie sur le faisceau  $J_k \mathfrak{g}$  tel que

$$[f j_k \mu, g j_k \eta] = f g j_k [\mu, \eta] + f[(T\beta \circ \mu)g] j_k \eta - g[(T\beta \circ \eta)f] j_k \mu$$

où  $\mu, \eta \in \mathfrak{g}$ ,  $f, g \in \mathcal{O}_M$  et  $(T\beta \circ \mu)g$  est la dérivée de Lie de  $g$  suivant le champ  $T\beta \circ \mu$ .

**Théorème.**  $\mathfrak{g}_k$  est canoniquement isomorphe à  $J_k \mathfrak{g}$ .

Pour le démontrer, considérons la fibration  $\alpha: G \rightarrow M$  et la fibration de Lie verticale  $VG \rightarrow G \rightarrow M$ . Alors  $\mathfrak{p}_k: J_k VG \rightarrow VJ_k G$  est un isomorphisme de fibrés vectoriels de base  $J_k G$ . Soit  $M' = \text{im } j_k \iota$  la sous-variété des unités de  $G_k$ . Comme  $J_k VG|M' = J_k \mathfrak{g}$  et  $VJ_k G|M' = VG_k|M'$ , on obtient par restriction l'isomorphisme de fibrés vectoriels  $\mathfrak{p}_k: J_k \mathfrak{g} \rightarrow VG_k|M'$  qui par extension aux germes donne l'isomorphisme

$$\mathfrak{p}_k: J_k \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_k$$

de faisceaux  $\mathcal{O}_M$ -linéaires. Reste à vérifier que  $\mathfrak{p}_k$  préserve le crochet. Or, si  $\theta$  et  $\theta'$  sont des champs invariants à droite de  $G$ , les prolongements  $\tilde{\mathfrak{p}}_k \theta$  et  $\tilde{\mathfrak{p}}_k \theta'$  sont des champs invariants à droite de  $G_k$ . Comme  $\tilde{\mathfrak{p}}_k[\theta, \theta'] = [\tilde{\mathfrak{p}}_k \theta, \tilde{\mathfrak{p}}_k \theta']$  on en déduit que

$$\mathfrak{p}_k(j_k[\mu, \eta]) = [\mathfrak{p}_k j_k \mu, \mathfrak{p}_k j_k \eta]$$

où  $\mu, \eta \in \mathfrak{g}$  donc  $\mathfrak{p}_k$  préserve le crochet de germes holonomes. L'assertion générale en résulte en utilisant la linéarité de



$$p_k : J_k VG \rightarrow VJ_k G$$

et, en particulier, la relation  $p_k(fj_k\mu) = fp_k(j_k\mu)$ . Remarquons finalement que l'identification  $g_k \simeq J_k g$  est naturelle par rapport aux foncteurs  $\rho_{hk}$  et par rapport à l'exponentielle de groupoïdes de Lie (cf. loc. cit.).

### 19. Structure affine de $J_k$

A l'aide des parties principales, nous allons définir la structure affine bien connue de  $J_k$ , [14], [30]. Soit  $A \rightarrow M$  une fibration et  $F \rightarrow M$  un fibré vectoriel. Rappelons qu'une structure affine de  $A$  sur  $F$  est la donnée d'un morphisme de fibrations  $A \times_M F \rightarrow A$  tel que pour chaque  $x \in M$  la restriction  $A_x \times F_x \rightarrow A_x$  est une structure d'espace affine de  $A_x$  sur l'espace vectoriel  $F_x$ . Prenons maintenant la fibration  $J_k \rightarrow J_{k-1}$ ,  $k \geq 1$ , et soit  $Q_Y$ ,  $Y \in J_{k-1}$ , la fibre au dessus de  $Y$ . Comme le fibré vectoriel

$$J_k \times_P (S^k T^* \otimes VP) | Q_Y$$

est trivial, il en est de même du sous-fibré

$$\varepsilon_k(J_k \times_P (S^k T^* \otimes VP) | Q_Y = TQ_Y \subset TJ_k .$$

Chaque vecteur  $v \in (S^k T^* \otimes VP)_y$ ,  $y = \beta_{k-1} Y$ , définit un champ de vecteurs  $\nu$  de  $Q_Y$  qui engendre un groupe global à un paramètre  $\phi_i(v)$ . On définit le morphisme

$$J_k \times_P \mathfrak{f}(S^k T^* \otimes VP) \xrightarrow{\exp \varepsilon_k} J_k$$

par  $(X, v) \rightarrow \phi_i(v)(X)$ . En remarquant que

$$J_k \times_P (S^k T^* \otimes VP) = J_k \times_{J_{k-1}} [J_{k-1} \times_P (S^k T^* \otimes VP)]$$

on vérifie que  $\exp \varepsilon_k$  définit une structure affine de la fibration  $J_k \rightarrow J_{k-1}$  sur le fibré vectoriel

$$J_{k-1} \times_P (S^k T^* \otimes VP) \mathfrak{f}.$$

En prenant des coordonnées locales, chaque fibre  $Q_Y$  devient un espace numérique,  $\nu$  devient le champ constant associé à un vecteur  $\varepsilon_k(v) \in Q_Y$  et  $\phi_i(v)$  devient la translation par  $t\varepsilon_k(v)$ .

