J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
10 (1975) 61-84

SUR L'EXISTENCE D'IMMERSIONS ISOMETRIQUES LOCALES POUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

JACQUES GASQUI

Utilisant sa théorie des systèmes de Pfaff en involution, Elie Cartan démontre dans [1] que toute variété riemannienne analytique (X, g) de dimension n s'immerge isométriquement localement dans l'espace euclidien à $\frac{1}{2}n(n+1)$ dimensions ou, plus généralement, dans toute variété riemannienne analytique (Y, g') de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$. Nous nous proposons de donner une nouvelle version de ce théorème dans le cadre de la théorie des équations différentielles non-linéaires de [4]. Nous montrons qu'une certaine équation différentielle non-linéaire d'ordre 2, $\tilde{R}_2$, construite sur un sous-fibré ouvert du fibré trivial $pr_1 : X \times Y \to X$, et dont les solutions sont des immersions isométriques de X dans Y, est formellement intégrable (théorème 5.1).

L'équation différentielle $f^*g' = g$, dont les solutions f de rang maximal sont des immersions isométriques de X dans Y, n'est pas formellement intégrable. En calculant l'obstruction au relèvement d'une solution formelle 2 de cette équation en une solution formelle d'ordre 3, on voit qu'il faut rajouter à ce système les équations de Gauss-Weingarten et de Gauss et l'on obtient ainsi le système d'équations différentielles d'ordre 2 considéré par Cartan [1]. A ce système, on rajoute des "inéquations" en imposant à la deuxième forme fondamentale des immersions considérées de vérifier une condition générique (cf. § 4) afin d'obtenir une équation différentielle $\tilde{R}_2$ d'ordre 2 (corollaire 4.3).

Si T désigne le fibré tangent à X, soit G le sous-fibré de $\otimes^4 T^*$, dont les sections sont les double 2-formes sur X. On note H le sous-fibré de $T^* \otimes G$ des éléments vérifiant la deuxième identité de Bianchi (définition 2.1) et W' le fibré image réciproque du fibré quotient $T^* \otimes G/H$ par la projection $\pi : \tilde{R}_2 \to X$. Nous commençons par établir que toute solution formelle d'ordre 2 de $\tilde{R}_2$ se relève en une solution formelle d'ordre 3 en construisant une section Ω de W' sur $\tilde{R}_2$ qui est l'obstruction au relèvement des solutions formelles d'ordre 2, et ensuite en montrant qu'elle est nulle (corollaire 5.2), ce qui est une conséquence de la deuxième identité de Bianchi. Nous prouvons, au passage, que W' s'identifie canoniquement au deuxième groupe de cohomologie de Spencer $H^{1,2}(g_2)$, où g_2 est le symbole de $\tilde{R}_2$. La condition imposée à la deuxième forme fondamentale des jets d'immersions nous permet de montrer que le symbole

Communicated by D. C. Spencer, October 23, 1973, and, in revised form, January 15, 1974.

de $\tilde{R}_2$ est involutif (proposition 5.2), et le théorème 5.1 s'obtient donc comme conséquence du théorème 8.1 de [4].

Comme la plupart des difficultés que l'on rencontre dans le cas général disparaissent lorsque dim $X = 2$, nous donnons au § 6 un traitement à part de ce problème.

Le § 7 est consacré à une démonstration du théorème de Jacobowitz-Moore [7] sur les immersions conformes locales des variétés riemanniennes analytiques. La plupart des calculs se réduisent à ceux faits dans le cas isométrique. La seule différence essentielle avec la démonstration du théorème de Cartan se trouve dans la proposition 7.6.

Toute ma reconnaissance va au Professeur H. Goldschmidt qui m'a donné tant de précieux conseils tout au long de de travail.

0. Existence de solutions formelles pour les équations différentielles non-lineaires

Les résultats de ce paragraphe se trouvent dans [4] ou [5]. Soit X une variété différentiable (i.e., de classe C^∞) de dimension n: on note T (resp. T^*) le fibré tangent (resp. cotangent) à X.

Etant donné un entier positif k, on pose

$$\delta(l_1\bullet\cdots\bullet l_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} l_i \otimes l_1\bullet\cdots\bullet\hat{l}_i\bullet\cdots\bullet l_{k+1}$$

pour tout produit symétrique $l_1\bullet\cdots\bullet l_{k+1}$ de $k+1$ vecteurs cotangents en un même point de X, et l'on étend cette opération en un morphisme de fibrés vectoriels sur X

$$\delta\colon S^{k+1}T^* \to T^* \otimes S^kT^* .$$

On étend à son tour δ en un morphisme de fibrés vectoriels sur X

$$\delta\colon \Lambda^jT^* \otimes S^{k+1}T^* \to \Lambda^{j+1}T^* \otimes S^kT^*$$

envoyant $\omega \otimes u$ sur $(-1)^j\omega \wedge \delta u$, si $\omega \in \Lambda^jT^*$ et $u \in S^{k+1}T^*$.

Lemme 0.1. *Si $m \geq 1$, la suite*

$$0 \longrightarrow S^mT^* \xrightarrow{\delta} T^*\otimes S^{m-1}T^* \xrightarrow{\delta} \Lambda^2T^*\otimes S^{m-2}T^* \xrightarrow{\delta} \cdots$$
$$\xrightarrow{\delta} \Lambda^nT^*\otimes S^{m-n}T^* \longrightarrow 0$$

est exacte.

Soient $\xi\colon W \to X$ un fibré vectoriel, Y une variété différentiable, f une application différentiable de Y dans X et g_k un sous-fibré à fibre variable de $S^kT^* \otimes_Y W$, où $k \geq 1$. Si l est un entier positif, on définit le l-ième prolongement de g_k comme étant le sous-fibré à fibre variable g_{k+l} de $S^{k+l}T^* \otimes_Y W$, noyau du morphisme $\Delta_{l,k} \circ \psi$, où

$$\Delta_{l,k} : S^{k+l}T^* \otimes_Y W \to S^lT^* \otimes S^kT^* \otimes_Y W$$

est l'application naturelle, et

$$\psi : S^lT^* \otimes S^kT^* \otimes_Y W \to S^lT^* \otimes_Y ((S^kT^* \otimes_Y W)/g_k)$$

le morphisme induit par la projection canonique de $S^kT^* \otimes_Y W$ sur $(S^kT^* \otimes_Y W)/g_k$. On pose $g_{k-l} = S^{k-l}T^* \otimes_Y W$ pour $l > 0$. Il est facile de voir que $\delta(g_{k+l+1}) \subset T^* \otimes_Y g_{k+l}$ et, par conséquent, δ induit un morphisme

$$\delta : \Lambda^jT^* \otimes_Y g_{k+l+1} \to \Lambda^{j+1}T^* \otimes_Y g_{k+l} ;$$

pour $m \geq k$, on a donc un complexe

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow g_m \xrightarrow{\delta} T^* \otimes_Y g_{m-1} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda^{m-k}T^* \otimes_Y g_k \\ \xrightarrow{\delta} \Lambda^{m-k+1}T^* \otimes_Y S^{k-1}T^* \otimes_Y W , \end{aligned}$$

dont on note $H^{m-j,j}(g_k)$ la cohomologie en $\Lambda^jT^* \otimes_Y g_{m-j}$. On dira que g_k est r-acyclique si $H^{m,j}(g_k) = 0$ pour $m \geq k$ et $0 \leq j \leq r$, et que g_k est involutif s'il est n-acyclique. Soient $x \in X$ et $p \in Y$ tels que $f(p) = x$; on note pour le moment T, g_k, $\cdots$, etc., les fibres en x ou p de ces fibrés. Si $t \in T$, on note δ_t l'application linéaire de $S^{m+1}T^*$ dans S^mT^* définie par

$$(\delta_t u)(v_1, \cdots, v_m) = (\delta u)(t, v_1, \cdots, v_m) ,$$

pour tous $u \in S^{m+1}T^*$ et $v_i \in T$, $i = 1, \cdots, m$. Soient $\{t_1, \cdots, t_n\}$ une base de T et V un sous-espace vectoriel de $S^mT^* \otimes_Y W$; si i est un entier compris entre 1 et n, on désigne par $V\{t_1, \cdots, t_i\}$ ou $V(i)$ le sous-espace des éléments u de V tels que $\delta_{t_j} u = 0$ avec $j = 1, \cdots, i$; on posera, par convention, $V(\mathrm{O}) = V$. Comme les δ_t commutent entre elles, on a des applications

$$(0.1)_i \qquad \delta_{t_{i+1}} : g_{k+1\{t_1,\cdots,t_i\}} \to g_{k\{t_1,\cdots,t_i\}} .$$

Définition 0.1. Si les applications $(0.1)_i$ sont surjectives pour tout i, on dit que $\{t_1, \cdots, t_n\}$ est une base quasi-régulière pour g_k.

Le résultat suivant est classique.

Lemme 0.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\{t_1, \cdots, t_n\}$ *est une base quasi-régulière pour* g_k;

(b) *on a* $\sum_{i=0}^{n} \dim g_{k\{t_1,\cdots,t_i\}} = \dim g_{k+1}$.

Lemme 0.3, [6]. *Le sous-espace* g_k *est involutif si et seulement s'il existe une base quasi-régulière pour* g_k.

Soit $\pi : E \to X$ un fibré. On note $\pi : J_k(E) \to X$ le fibré des k-jets de sections de E. Le fibré

$$\pi_{k-1} : J_k(E) \to J_{k-1}(E)$$

est un fibré affine de fibré vectoriel associé $S^kT^* \otimes_{J_{k-1}(E)} V(E)$: on peut donc identifier le fibré $S^kT^* \otimes_{J_k(E)} V(E)$ à un sous-fibré du fibré vertical $V(J_k(E))$.

Définition 0.2. Une équation différentielle d'ordre k sur le fibré E est un sous-fibré R_k de $J_k(E)$; le l-ième prolongement R_{k+l} de R_k, est égal à $J_l(R_k) \cap J_{k+l}(E)$, où $J_l(R_k)$ est identifié à un sous-fibré de $J_l(J_k(E))$; enfin, le symbole de R_k est le sous-fibré à fibre variable $g_k = V(R_k) \cap S^kT^* \otimes_{R_k} V(E)$.

Remarque. S'il existe un fibré F de base X, une section s de F sur X et $\varphi : J_k(E) \to F$ un morphisme de fibrés sur X tels que $R_k = \mathrm{Ker}_s(\varphi)$, on a

$$(g_k)_p = \mathrm{Ker}\,(\varphi_* : (S^kT^* \otimes_{R_k} V(E))_p \to V_{\varphi(p)}(F)) ,$$

pour tout $p \in R_k$.

Définition 0.3. Une équation différentielle d'ordre k sur E, R_k, est formellement intégrable si, pour tout $l \geq 0$, on a

1) $\pi_{k+l} : R_{k+l+1} \to R_{k+l}$ est surjective, et

2) g_{k+l+1} est un fibré vectoriel sur R_k.

Le théorème qui suit donne un critère pour l'intégrabilité formelle.

Théorème 0.1, [4]. *Soit $R_k \subset J_k(E)$ une équation différentielle d'ordre k sur E telle que $\pi_k : R_{k+1} \to R_k$ soit surjective. Si g_k est 2-acyclique et si g_{k+1} est un fibré vectoriel sur R_k, alors R_k est formellement intégrable.*

Soit R_k une équation différentielle d'ordre k sur E, égale à $\mathrm{Ker}_s\,(\varphi : J_k(E) \to F)$, où F est un fibré sur X, où $\varphi : J_k(E) \to F$ est un morphisme de fibrés sur X de rang constant et s une section de F sur X. On note W le fibré vectoriel à fibre variable sur R_k, conoyau du morphisme

$$\varphi_* \circ \delta : S^{k+1}T^* \otimes_{R_k} V(E) \to T^* \otimes_{R_k} V(F) .$$

Le lemme qui suit permet de mesurer fibre par fibre l'obstruction à la surjectivité de l'application $\pi_k : R_{k+1} \to R_k$.

Lemme 0.4, [5]. *Il existe une section Ω de W telle que la suite*

$$R_{k+1} \xrightarrow{\pi_k} R_k \underset{0}{\overset{\Omega}{\rightrightarrows}} W$$

soit exacte.

Démonstration. Si τ désigne la projection canonique de $T^* \otimes_{R_k} V(F)$ sur W, alors Ω se définit par

$$\Omega(u) = \tau(u, p_1(\varphi)v - j_1(s)(x)) ,$$

si $u \in R_k$, où $x = \pi(u)$ et v est un élément quelconque de $J_{k+1}(E)$ tel que $\pi_k(v) = u$.

Supposons que X soit une variété analytique réelle et que le fibré E soit analytique; on dira qu'une équation R_k d'ordre k sur E est analytique si c'est un sous-fibré analytique de $J_k(E)$.

Théorème 0.2, [4]. *Soit R_k une équation analytique d'ordre k sur E qui est formellement intégrable. Alors, étant donné $p \in R_{k+l}$, avec $\pi(p) = x \in X$, il existe une solution analytique s de l'équation R_k snr un voisinage de x telle que $j_{k+l}(s)(x) = p$.*

1. La deuxième forme fondamentale d'une immersion

Soient (X, g) et (Y, g') deux variétés riemanniennes de dimension finie telles que $\dim X = n$ soit inférieur ou égal à $\dim Y = m$. On note

1) $\pi: E \to X$ le fibré trivial $pr_1: X \times Y \to X$; on ne distinguera pas, dans la suite, une application de X dans Y de son graphe, section du fibré $\pi: E \to X$;

2) T (resp. T_Y) le fibré tangent à X (resp. Y);

3) ∇ (resp. ∇') la dérivation covariante associée à la connexion riemannienne sur (X, g) (resp. (Y, g'));

4) R (resp. R') le tenseur de courbure de (X, g) (resp. (Y, g')), section de $\otimes^4 T^*$ (resp. $\otimes^4 T_Y^*$) sur X (resp. Y).

Si f est une application différentiable de X dans Y, de rang maximum en $x \in X$, on a le lemme suivant:

Lemme 1.1, [7]. *Si $\xi \in T_x$ et si $\tilde{\eta}$ est un champ de vecteurs sur X nul en x, alors le vecteur tangent $\nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\eta} - f_*\nabla_\xi\tilde{\eta}$ en $f(x)$ à Y, où f_* désigne la différentielle de f, est nul.*

Démonstration. Soient $x^1, \cdots, x^n$ des coordonnées locales sur un voisinage U de x dans X. Si $\tilde{\eta} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial/\partial x^j$ sur U, on a

$$\nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\eta} = \sum_{j=1}^{n} \{\alpha_j(x)\nabla'_{f_*\xi} f_*(\partial/\partial x^j) + (\xi\cdot\alpha_j) f_*(\partial/\partial x^j)_x\} ,$$

$$f_*\nabla_\xi\tilde{\eta} = \sum_{j=1}^{n} \{\alpha_j(x) f_*\nabla_\xi(\partial/\partial x^j) + (\xi\cdot\alpha_j) f_*(\partial/\partial x^j)_x\} ;$$

comme $\alpha_j(x) = 0$ pour tout j, les vecteurs $\nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\eta}$ et $f_*\nabla_\xi\tilde{\eta}$ sont égaux. q.e.d.

Ce résultat nous permet de construire une application

$$B_x^f : \otimes^2 T_x \to T_{Y,f(x)}$$

de la manière suivante: si ξ et $\eta \in T_x$, on pose

$$B_x^f(\xi, \eta) = \nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\eta} - f_*\nabla_\xi\tilde{\eta} ,$$

où $\tilde{\eta}$ est une extension quelconque de η sur un voisinage de x dans X; en fait, il est facile de constater que $B_x^f \in S^2T_x^* \otimes T_{Y,f(x)}$. La forme B_x^f est appelée *deuxième forme fondamentale* de l'immersion f en x; il est clair que B_x^f ne dépend que du 2-jet de f en x; plus précisément, on a le résultat suivant:

Lemme 1.2. *Soient $(x_i)_{1\le i\le n}$ (resp. $(y^\alpha)_{1\le\alpha\le m}$) des coordonnées locales au voisinage de $x \in X$ (resp. $f(x) \in Y$); si, dans ces systèmes de coordonnées, f est donnée par les applications $f^\alpha(x^1, \cdots, x^n)$, $\alpha = 1, \cdots, m$, on a*

$$B_x^f((\partial/\partial x^i)_x, (\partial/\partial x^j)_x) = \sum_{\gamma=1}^{m} \theta_\gamma (\partial/\partial y^\gamma)_{f(x)} , \tag{1.1}$$

où

$$\theta_\gamma = \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{1\le\alpha,\beta\le m} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j}(x)\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}(x)\Gamma'^\gamma_{\alpha\beta}(f(x)) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(x)\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^k}(x) \tag{1.2}$$

et les coefficients Γ^k_{ij} (resp. $\Gamma'^\gamma_{\alpha\beta}$) sont donnés par les égalités

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(resp.\ \nabla'_{\partial/\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\beta} = \sum_{\gamma=1}^{m} \Gamma'^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\right) .$$

Remarque. Si ξ et η sont des champs de vecteurs sur un voisinage de x dans X, l'application $y \to B_y^f(\xi_y, \eta_y)$ est définie sur un voisinage de x et sera notée $B^f(\xi, \eta)$.

2. Préliminaires algébriques

On désignera par G le sous-fibré de $\otimes^4 T^*$ des éléments ω de $\otimes^4 T^*$ vérifiant les identités de courbure

$$\begin{gathered} \omega(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = -\omega(\eta,\xi,\zeta,\lambda) , \\ \omega(\xi,\eta,\zeta,\lambda) + \omega(\eta,\zeta,\xi,\lambda) + \omega(\zeta,\xi,\eta,\lambda) = 0 , \\ \omega(\xi,\eta,\zeta,\lambda) = \omega(\zeta,\lambda,\xi,\eta) \end{gathered} \tag{2.1}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T$.

Soient $x \in X$ et $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de T_x. Si V est le sous-espace vectoriel de $\Lambda^2 T_x \otimes \Lambda^2 T_x$ ayant pour base les vecteurs $E_{ijkl} = e_i \wedge e_j \otimes e_k \wedge e_l$, avec $i < j$, $k < l$, $i \le k$, $j \le l$, on a le lemme suivant:

Lemme 2.1. *L'homomorphisme φ_1 de G_x dans V, défini par*

$$\varphi_1(\omega) = \sum_{\substack{i<j,k<l \\ i\le k, j\le l}} \omega(e_i, e_j, e_k, e_l)E_{ijkl}$$

pour tout $\omega \in G_x$, est un isomorphisme.

Démonstration. Montrons d'abord que φ_1 est injective. Soient $\omega \in G_x$ tel que $\varphi_1(\omega) = 0$ et i, j, k, l des entiers compris entre 1 et n tels que $i < j$ et $k < l$:

a) si $i \geq k$ et $j \geq l$, alors $\omega(e_i, e_j, e_k, e_l) = \omega_{ijkl} = \omega_{klij} = 0$ (par hypothèses);

b) si $i \geq k$ et $j \leq l$, on a $\omega_{ijkl} = \omega_{kjil} - \omega_{kijl}$ et les termes du membre de droite de cette égalité sont de la forme ω_{stuv}, avec $s \leq t$, $u \leq v$, $s \leq u$, $t \leq v$, donc nuls;

c) enfin, si $i \leq k$ et $j \geq l$, on a $\omega_{ijkl} = \omega_{klij}$, et on se ramène à la situation de b).

Il est donc clair que $\omega = 0$. La surjectivité de φ_1 s'obtient par la même méthode.

Lemme 2.2. *Soit α un entier compris entre* 0 *et* n: *le sous-espace* $G_{n-\alpha}(e_1, \cdots, e_n)$ *des élément* ω *de* G_x *vérifiant les égalités* $\omega(e_i, e_j, e_k, e_l) = 0$, *avec* $i < j \leq n - \alpha$ *est de dimension* $\frac{1}{12}\alpha(\alpha + 1)[3n^2 - (2\alpha + 1)n]$; *en particulier, ayant* $G_0(e_1, \cdots, e_n) = G_1(e_1, \cdots, e_n) = G_x$, *le sous-fibré* G *est de rang* $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$.

Démonstration. Il est évident que $\varphi_1 | G_{n-\alpha}(e_1, \cdots, e_n)$ réalise un isomorphisme de $G_{n-\alpha}(e_1, \cdots, e_n)$ sur le sous-espace V_α de V ayant pour base les vecteurs E_{ijkl} avec $i < j$, $k < l$, $i \leq k$, $j \leq l$, $j \geq n - \alpha + 1$. La différence $\dim G_{n-\alpha}(e_1, \cdots, e_n) - \dim G_{n-\alpha+1}(e_1, \cdots, e_n)$ est donc égale au nombre des $E_{in-\alpha+1kl}$ distincts tels que $i < n - \alpha + 1$, $i \leq k$, $k < l$, $l \geq n - \alpha + 1$: il y en a

$$\sum_{j=1}^{\alpha-1} \{(n-\alpha)(n-\alpha+j) - \tfrac{1}{2}(n-\alpha)(n-\alpha-1)\} = \tfrac{1}{2}n\alpha(n-\alpha) = a(\alpha);$$

d'un autre côté, $\dim G_{n-\alpha}(e_1, \cdots, e_n) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} a(\beta)$ ce qui, tous calculs faits, est égal à $\frac{1}{12}n\alpha(\alpha + 1)(3n - 2\alpha - 1)$.

Définition 2.1. On dira qu'un élément $\omega \in T^* \otimes G$ vérifie la deuxième identité de Bianchi si:

$$\omega(\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu) + \dot{\omega}(\eta, \zeta, \xi, \lambda, \mu) + \omega(\zeta, \xi, \eta, \lambda, \mu) = 0 \tag{2.2}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu \in T$.

Lemme 2.3. *Le sous-fibré* H *de* $T^* \otimes G$ *des éléments vérifiant la deuxième identité de Bianchi est de rang* $\frac{1}{24}n^2(n^2 - 1)(n + 2)$.

Démonstration. Elle se fait en trois étapes:

a) Si W est le sous-espace vectoriel de $T_x \otimes V$ ayant pour base les vecteurs $F_{hijkl} = e_h \otimes E_{ijkl}$ avec $h \leq j$, $i < j$, $k < l$, $i \leq k$, $j \leq l$, l'homomorphisme φ_2 de H_x dans W qui, à tout $\omega \in H_x$, associe l'élément

$$\sum_{\substack{h \leq j, i < j, k < l \\ i \leq k, j \leq l}} \omega(e_h, e_i, e_j, e_k, e_l) F_{hijkl}$$

est un isomorphisme; ce résultat se démontre par des méthodes analogues à celles utilisées dans le lemme 2.1.

b) Si $H_{n-\alpha}(e_1, \cdots e_n)$ est le sous-espace des éléments ω de H_x tels que

$$\omega(e_h, e_i, e_j, e_k, e_l) = 0 \,, \quad \text{avec } h \leq j \leq n-\alpha \quad \text{et} \quad i < j \,,$$

φ_2 réalise un isomorphisme de $H_{n-\alpha}(e_1, \cdots, e_n)$ sur le sous-espace de W ayant pour base les vecteurs

$$F_{hijkl}, \text{ avec } h \leq j, i < j, k < l, i \leq k, j \leq l, j \geq n-\alpha+1 \,.$$

c) A partir de là, on calcule les différences

$$\dim H_{n-\alpha}(e_1, \cdots, e_n) - \dim H_{n-\alpha+1}(e_1, \cdots, e_n)$$

et, par conséquent, les dimensions des sous-espaces $H_{n-\alpha}(e_1, \cdots, e_n)$.

Remarque. Il est bien connu que le tenseur de courbure (resp. la dérivée covariante du tenseur de courbure) de X est une section de G (resp. H) sur X.

3. Construction de l'équation fondamentale

Etant donné un entier positif k, on note $\tilde{J}_k(E)$ le sous-fibré ouvert de $J_k(E)$ formé des k-jets d'applications de rang maximum. On entend par là que

$$\tilde{J}_k(E) = \bigcup_{x \in X} \tilde{J}_k(E)_x \,,$$

où, pour tout $x \in X$, $\tilde{J}_k(E)_x$ désigne l'ensemble des k-jets d'applications différentiables de X dans Y de rang maximum en x. Pour simplifier, nous écrirons souvent dans la suite "soit $p = j_k(f)(x) \in \tilde{J}_k(E)_x$" pour "soit $p = j_k(f)(x) \in \tilde{J}_k(E)_x$, où f est une application de X dans Y de rang maximum sur un voisinage de $x \in X$".

Soit

$$\varphi' : \tilde{J}_1(E) \to S^2T^*$$

le morphisme de fibrés sur X défini par

$$\varphi'(p) = (f^*g' - g)(x) \,, \tag{3.1}$$

si $p = j_1(f)(x) \in \tilde{J}_1(E)_x$.

Proposition 3.1. *Si $p = j_1(f)(x) \in \tilde{J}_1(E)_x$ et $C \in T_x^* \otimes T_{Y,f(x)}$, on a*

$$\varphi'_{*p}(C)(\xi, \eta) = g'(C(\xi), f_*\eta) + g'(C(\eta), f_*\xi) \tag{3.2}$$

pour tous $\xi, \eta \in T_x$. De plus, $R'_1 = \mathrm{Ker}_0\, \varphi'$ est une équation différentielle.

Démonstration. La formule (3.2) montre que l'application

$$\varphi'_{*p} : T^*_x \otimes T_{Y,f(x)} \to S^2T^*_x$$

est surjective, donc R'_1 est le noyau d'un morphisme de rang constant.

Remarque. Nous verrons un peu plus loin que l'application $\pi_1 : R'_2 \to R'_1$, où R'_2 désigne le premier prolongement de R'_1, est surjective; par contre, le lecteur vérifiera facilement que le symbole de R'_1 n'est pas en général involutif, ni même 2-acyclique.

Soient

$$\varphi : \tilde{J}_2(E) \to S^2T^* , \qquad \psi : \tilde{J}_2(E) \to S^2T^* \otimes T^*$$

les morphismes de fibrés sur X définis par

$$\varphi = \varphi' \circ \pi_1 \tag{3.3}$$

et par

$$\psi(p)(\xi, \eta, \zeta) = g'(B^f_x(\xi, \eta), f_*\zeta) \tag{3.4}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T_x$, où $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$.

Proposition 3.2. *Le premier prolongement R'_2 de R'_1 est égal à* $\mathrm{Ker}_0(\varphi \oplus \psi)$.

Démonstration. Soit $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$ tel que $\pi_1(p) \in R'_1$, et soient $\xi, \eta, \zeta \in T_x$; on a:

$$\begin{aligned} \psi(p)(\xi, \eta, \zeta) &= g'(\nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\eta}, f_*\zeta) - g(\nabla_\xi \tilde{\eta}, \zeta) \\ &= \tfrac{1}{2}\{\xi \cdot [g'(f_*\tilde{\eta}, f_*\tilde{\zeta}) - g(\tilde{\eta}, \tilde{\zeta})] + \eta \cdot [g'(f_*\tilde{\xi}, f_*\tilde{\zeta}) \\ &\quad - g(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})] - \zeta \cdot [g'(f_*\tilde{\xi}, f_*\tilde{\eta}) - g(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})]\} , \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ sont respectivement des extensions quelconques de ξ, η, ζ sur un voisinage de x dans X; il est donc clair que, si $p \in R'_2$, alors $\psi(p) = 0$ et $p \in \mathrm{Ker}_0(\varphi \oplus \psi)$. Réciproquement, si $\psi(p) = 0$, on a, en égalant η et ζ dans (3.5),

$$\xi \cdot [g'(f_*\tilde{\eta}, f_*\tilde{\eta}) - g(\tilde{\eta}, \tilde{\eta})] = 0$$

pour tout $\xi \in T_x$ et tout champ $\tilde{\eta}$ sur un voisinage de x dans X, donc $p \in R'_2$.

Corollaire 3.1. *R'_2 est une équation différentielle.*

Démonstration. Soient $x \in X$, $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$ et $C \in S^2T^*_x \otimes T_{Y,f(x)}$; on a:

$$\psi_{*p}(C)(\xi, \eta, \zeta) = g'(C(\xi, \eta), f_*\zeta) \tag{3.6}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T_x$; l'application

$$\psi_{*p} : S^2T^*_x \otimes T_{Y,f(x)} \to S^2T^*_x \otimes T^*_x$$

est donc surjective. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & S^2T_x^* \otimes T_{Y,f(x)} & \xrightarrow{\psi_{*p}} & S^2T_x^* \otimes T_x^* & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow i & \\
 & V(\tilde{J}_2(E))_p & \xrightarrow{(\varphi \oplus \psi)_{*p}} & S^2T_x^* \oplus (S^2T_x^* \otimes T_x^*) & \\
 & \downarrow \pi_1^* & & \downarrow pr_1 & \\
 & V(\tilde{J}_1(E))_{\pi_1(p)} & \xrightarrow{\varphi'_{*\pi_1(p)}} & S^2T_x^* & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
\end{array}$$

où i est l'injection linéaire naturelle de $S^2T_x^* \otimes T_x^*$ dans $S^2T_x^* \oplus (S^2T_x^* \otimes T_x^*)$, est exact et commutatif ; par conséquent l'application

$$(\varphi \oplus \psi)_{*p} : V(\tilde{J}_2(E))_p \to S^2T_x^* \oplus (S^2T_x^* \otimes T_x^*)$$

est surjective : R_2' est donc le noyau d'un morphisme de rang constant. D'un autre côté, on peut toujours trouver une immersion à seconde forme fondamentale donnée au point x : plus précisément, étant donné $q \in \tilde{J}_1(E)_x$ et $\theta \in S^2T_x^* \otimes T_{Y,\pi_0(q)}$, il existe une application h de X dans Y telle que $j_1(h)(x) = q$ et que $B_x^h = \theta$. La fibre $R_{2,x}'$ n'est donc pas vide.

Remarque. L'application $\pi_1 : R_2' \to R_1'$ est surjective et le premier prolongement du symbole de R_1' est un fibré vectoriel sur R_1' : si l est un entier positif, le l-ième prolongement de R_2' est donc égal au $(l+1)$-ième prolongement de R_1'.

Soit

$$\rho : \tilde{J}_2(E) \to G$$

le morphisme de fibrés sur X défini par

$$\begin{aligned}\rho(p)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = (f^*R' - R)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) &+ g'(B_x^f(\xi, \lambda), B_x^f(\eta, \zeta)) \\ &- g'(B_x^f(\xi, \zeta), B_x^f(\eta, \lambda))\end{aligned} \tag{3.7}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T_x$, si $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$.

Proposition 3.3. *La suite de fibrés à fibre variable sur X*

$$R_3' \xrightarrow{\pi_2} R_2' \underset{0}{\overset{\rho}{\rightrightarrows}} G ,$$

où R_3' est le premier prolongement de R_2', est exacte.

Démonstration. Nous recopions ici, à quelques détails près, la démonstration de proposition 2.1 de [5]. Soient $p \in R_2'$ et q un élément quelconque de $J_3(E)$ tel que $\pi_2(q) = p$. On vérifie facilement que

$$\rho(p) = \delta(p_1(\psi)(q)); \tag{3.8}$$

l'application $\rho \circ \pi_2$ est donc nulle sur R_3'. Par ailleurs, si $\rho(p) = 0$, l'exactitude des suites

$$0 \longrightarrow S^3T^* \otimes T^* \xrightarrow{\delta} T^* \otimes S^2T^* \otimes T^* \xrightarrow{\delta} \Lambda^2T^* \otimes T^* \otimes T^* ,$$

$$S^2T^* \otimes_{R_2'} V(E) \xrightarrow{\psi_*} S^2T^* \otimes_{R_2'} T^* \longrightarrow 0$$

implique l'existence d'un élément a de $S^3T^* \otimes_{R_2'} V(E)$ tel que

$$\psi_* \circ \delta(a) = p_1(\psi)(q);$$

on a alors

$$p_1(\psi)((-a) + q) = -\psi_* \circ \delta(a) + p_1(\psi)(q) = 0 ,$$

donc $(-a) + q \in R_3'$ et l'on a $\pi_2((-a) + q) = p$, ce qui démontre le résultat.

Si $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$ et $C \in S^2T_x^* \otimes T_{Y,f(x)}$, on a

$$\begin{aligned} \rho_{*p}(C)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = {} & g'(B_x^f(\xi, \lambda), C(\eta, \zeta)) + g'(B_x^f(\eta, \zeta), C(\xi, \lambda)) \\ & - g'(B_x^f(\xi, \zeta), C(\eta, \lambda)) - g'(B_x^f(\eta, \lambda), C(\xi, \zeta)) \end{aligned} \tag{3.9}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T_x$.

Lemme 3.1. *Si $p = j_2(f)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$, l'image de l'application*

$$\rho_{*p} \circ \delta : S^3T_x^* \otimes T_{Y,f(x)} \to T_x^* \otimes G_x$$

est contenue dans le sous-espace H_x de $T_x^* \otimes G_x$ formé des tenseurs vérifiant la deuxième identité de Bianchi.

Démonstration. Si $C \in S^3T_x^* \otimes T_{Y,f(x)}$ et si $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu$ sont des vecteurs tangents en x à X, on a

$$\begin{aligned} \rho_{*p} \circ \delta(C)(\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu) = {} & g'(B_x^f(\zeta, \lambda), C(\xi, \eta, \mu)) + g'(B_x^f(\eta, \mu), C(\xi, \zeta, \lambda)) \\ & - g'(B_x^f(\zeta, \mu), C(\xi, \eta, \lambda)) - g'(B_x^f(\eta, \lambda), C(\xi, \zeta, \mu)) . \end{aligned} \tag{3.10}$$

En sommant l'expression ci-dessus par permutation circulaire sur ξ, η, ζ, on vérifie facilement qu'on obtient zéro.

La proposition 3.3 montre que l'équation R_2' n'est pas formellement intégrable. Le noyau $R_2 = \operatorname{Ker}_0 (\varphi \oplus \psi \oplus \rho)$ ne sera pas en général une équation différentielle; cependant nous allons montrer dans la suite que, si la dimension de Y est suffisamment grande, la restriction de R_2 à un certain sous-fibré ouvert de $\tilde{J}_2(\mathrm{E})$ est une équation différentielle formellement intégrable.

Remarque. Dans la terminologie classique des sous-variétés (voir [7, Ch. VII]) $\mathrm{Ker}_0\,\psi$ est l'équation de *Gauss-Weingarten* et $\mathrm{Ker}_0\,\rho$ l'équation de *Gauss*.

4. Calcul de certains caractères

Nous supposons désormais que $m \geq \frac{1}{2}n(n+1)$; $\mathcal{O} \subset \tilde{J}_2(E)$ désignera le sous-fibré ouvert de $\tilde{J}_2(E)$ construit de la manière suivante : un jet $j_2(f)(x)$ appartient à $\mathcal{O}_x$ si et seulement s'il existe un sous-espace U de dimension $n-1$ de T_x tel que f_*T_x et $B_x^f(S^2U)$ engendrent un sous-espace de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ de $T_{Y,f(x)}$. Remarquons tous de suite que cette condition équivaut à trouver une base $\{t_1, \cdots, t_n\}$ de T_x telle que les vecteurs $f_*t_1, \cdots, f_*t_n$ et $B_x^f(t_i, t_j)$, avec $1 \leq i \leq j \leq n-1$, soient linéairement indépendants.

Le fait qu'un jet $p = j_2(f)(x)$ appartienne à R_2' impose seulement à la deuxième forme fondamentale de f en x de prendre ses valeurs dans l'orthogonal $f_*T_x^\perp$ de f_*T_x dans $T_{Y,f(x)}$, qui est de dimension supérieure ou égale à $\frac{1}{2}n(n-1)$: quel que soit $x \in X$, on pourra donc toujours trouver des jets appartenant à $R_2' \cap \mathcal{O}_x$. Cette remarque étant faite, on se fixe, dans ce paragraphe et dans le suivant, un élément $p = j_2(f)(x) \in \mathcal{O}$; on note, pour le moment, $T, G, H, \cdots$, etc., les fibres en x de ces fibrés ; on posera, en outre, $B_x^f = B$, $T_{Y,f(x)} = T_Y$ et $f_*T_x^\perp = T_Y^\perp$.

Proposition 4.1 (*Elie Cartan* [1]). *Si $\{t_1, \cdots, t_n\}$ est une base de T telle que les vecteurs $B(t_i, t_j)$, avec $1 \leq i \leq j \leq n-1$, soient linéairement indépendants, alors*

$$\rho_{*p}(S^2T^*_{\{t_1,\cdots,t_{n-\alpha}\}} \otimes T_Y) = G_{n-\alpha}(t_1, \cdots, t_n)$$

pour tout entier α compris entre 0 et n.

Démonstration. Le cas $\alpha = 0$ étant trivial, nous supposerons dans la démonstration que $\alpha \geq 1$. L'inclusion

$$\rho_{*p}(S^2T^*_{\{t_1,\cdots,t_{n-\alpha}\}} \otimes T_Y) \subset G_{n-\alpha}(t_1, \cdots, t_n)$$

est évidente ; elle est d'ailleurs vraie pour n'importe quelle base de T. Réciproquement, si $\omega \in G_{n-\alpha}(t_1, \cdots, t_n)$, soit C l'élément de $S^2T^*_{\{t_1,\cdots,t_{n-\alpha}\}} \otimes T_Y$ dont les composantes $C(t_i, t_j)$ se calculent, à l'aide d'une double récurrence sur les indices i et j, comme suit :

1) le vecteur $C(t_{n-\alpha+1}, t_{n-\alpha+1})$ est choisi tel que les relations

$$g'(B(t_h, t_k), C(t_{n-\alpha+1}, t_{n-\alpha+1})) = -\omega(t_h, t_{n-\alpha+1}, t_k, t_{n-\alpha+1})$$

soient vérifiées pour tous entiers h, k tels que $h \leq k \leq n-\alpha$, ce qui est possible, puisque les relations ci-dessus signifient que le vecteur $C(t_{n-\alpha+1}, t_{n-\alpha+1})$ doit avoir des produits scalaires donnés avec les vecteurs $B(t_h, t_k)$, pour $1 \leq$

$h \leq k \leq n - \alpha$, qui sont linéairement indépendants.

2) Si $n - \alpha + 1 \leq i \leq j$, le vecteur $C(t_i, t_j)$ est choisi tel que les relations

$$g'(B(t_h, t_j), C(t_i, t_k)) + g'(B(t_i, t_k), C(t_h, t_j)) - g'(B(t_h, t_k), C(t_i, t_j)) \\ - g'(B(t_i, t_j), C(t_h, t_k)) = \omega(t_h, t_i, t_k, t_j)$$

soient vérifiées pour tous entiers h, k tels que $h \leq k$, $h < i$ et $k < j$; un tel choix est encore possible, puisque les relations ci-dessus signifient que le vecteur $C(t_i, t_j)$ doit avoir des produits scalaires donnés, dépendant des vecteurs $C(t_r, t_s)$, pour $r < i$, $s \leq j$ ou $r \leq i$, $s < j$, avec les vecteurs linéairement indépendants $B(t_h, t_k)$, pour $h < i$, $h \leq k < j$.

On a donc $\rho_{*p}(C)(t_i, t_j, t_k, t_l) = \omega(t_i, t_j, t_k, t_l)$ si $i < j$, $k < l$, $i \leq k$, $j \leq l$ et $j \geq n - \alpha + 1$; comme $\omega \in G_{n-\alpha}(t_1, \cdots, t_n)$ et $C \in S^2T^*_{\{t_1,\cdots,t_{n-\alpha}\}} \otimes T_Y$, on a

$$\rho_{*p}(C)(t_i, t_j, t_k, t_l) = \omega(t_i, t_j, t_k, t_l) = 0 \quad \text{si} \quad i < j \leq n - \alpha ,$$

quels que soient k et l: il s'ensuit que $\rho_{*p}(C) = \omega$ (voir le lemme 2.1).

Corollaire 4.1. *Si* $\{t_1, \cdots, t_n\}$ *est une base de* T *telle que les vecteurs* $f_*t_1, \cdots, f_*t_n$ *et* $B(t_i, t_j)$, *avec* $1 \leq i \leq j \leq n - 1$, *soient linéairement indépendants, on a*

$$(\psi \oplus \rho)_{*p}(S^2T^*_{\{t_1,\cdots,t_{n-\alpha}\}} \otimes T_Y) = S^2T^*_{\{t_1,\cdots,t_{n-\alpha}\}} \otimes T^*) \oplus G_{n-\alpha}(t_1, \cdots, t_n)$$

pour tout entier α *compris entre* 0 *et* n; *en particulier l'application*

$$(\psi \oplus \rho)_{*p} : S^2T^* \otimes T_Y \rightarrow (S^2T^* \otimes T^*) \oplus G$$

est surjective.

Démonstration. Reprenant la construction de la proposition 4.1, les vecteurs $C(t_i, t_j)$ pourront ici avoir, en plus, des produits scalaires donnés avec $f_*t_1, \cdots, f_*t_n$, d'où le résultat.

Comme cas particulier du corollaire 4.1, on obtient:

Corollaire 4.2. *Sous les hypothèses du corollaire* 4.1, *on a*

$$\rho_{*p}(S^2T^*_{\{t_1,\cdots,t_{n-\alpha}\}} \otimes T_Y^{\perp}) = G_{n-\alpha}(t_1, \cdots, t_n) , \tag{4.1}$$

pour tout entier α *compris entre* 0 *et* n; *en particulier, l'application*

$$\rho_{*p} : S^2T^* \otimes T_Y^{\perp} \rightarrow G$$

est surjective.

Corollaire 4.3. *Le noyau* $\mathrm{Ker}_0\,(\varphi \oplus \psi \oplus \rho \,|\, \mathcal{O}) = R_2 \cap \mathcal{O}$ *est une équation différentielle.*

Démonstration. L'application $\tilde{\rho}: S^2T^* \otimes T_Y^{\perp} \rightarrow G$ définie par

$$\tilde{\rho}(C)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = g'(C(\xi, \lambda), C(\eta, \zeta)) - g'(C(\xi, \zeta), C(\eta, \lambda))$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T$, si $C \in S^2T^* \otimes T_Y^\perp$, est surjective: en effet, si $\omega \in G$, on construit des solutions C de $\tilde{\rho}(C) = \omega$ telles que les vecteurs $C(e_i, e_j)$ avec $1 \leq i \leq j \leq n-1$, où $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de T, soient linéairement indépendants (on démontre ce résultat en utilisant, avec des modifications mineures, la construction donnée, pour $\alpha = n$, dans la propsition 4.1). Comme $f^*R' - R \in G$, on peut trouver $C \in S^2T^* \otimes T_Y^\perp$, dont la restriction au carré symétrique d'un sous-espace de dimension $n-1$ de T soit injective, telle que

$$\tilde{\rho}(C) = f^*R' - R;$$

par ailleurs, il existe $q = j_2(h)(x) \in \tilde{J}_2(E)_x$ tel que $\pi_1(q) = \pi_1(p)$ et que $B_x^h = C$: comme $\psi(q) = 0$ (puisque C prend ses valeurs dans $T_Y^\perp = h * T_x^\perp$) et que $\rho(q) = f^*R' - R - \tilde{\rho}(C) = 0$, le jet q appartient à R_2 et même à $R_2 \cap \mathcal{O}$. La fibre de $R_2 \cap \mathcal{O}$ au-dessus de chaque point de X n'est donc jamais vide. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & S^2T^* \otimes T_Y & \xrightarrow{(\psi \oplus \rho)_{*p}} & E' & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow i & \\
 & V(\mathcal{O})_p & \xrightarrow{(\varphi \oplus \psi \oplus \rho)_{*p}} & S^2T^* \oplus E' & \\
 & \downarrow \pi_1^* & & \downarrow pr_1 & \\
 & V(\tilde{J}_1(E))_{\pi_1(p)} & \xrightarrow{\varphi'_{*\pi_1(p)}} & S^2T^* & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
\end{array}$$

où $E' = (S^2T^* \otimes T^*) \oplus G$ et i est l'injection linéaire naturelle de E' dans $S^2T^* \oplus E'$, est exact et commutatif; par conséquent l'application

$$(\varphi \oplus \psi \oplus \rho)_{*p} : V(\mathcal{O})_p \to S^2T^* \oplus E'$$

est surjective; ainsi $R_2 \cap \mathcal{O}$ est le noyau d'un morphisme de rang constant, donc une équation différentielle.

On pose $\tilde{R}_2 = R_2 \cap \mathcal{O}$ et on appelle g_2 le symbole de $\tilde{R}_2$; on suppose dans la suite que le jet p défini au début du paragraphe est dans $\tilde{R}_2$.

Corollaire 4.4. *Le conoyau de l'application*

$$\rho_{*p} \circ \delta : S^3T^* \otimes T_Y^\perp \to T^* \otimes G$$

s'identifie canoniquement au deuxième groupe de cohomologie de Spencer $H^{1,2}(g_2)_p$.

Démonstration. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (g_3)_p \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & S^3T^* \otimes T_Y^{\perp} \arrow[r, "\rho_{*p} \circ \delta"] \arrow[d, "\delta"] & T^* \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T^* \otimes (g_2)_p \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & T^* \otimes S^2T^* \otimes T_Y^{\perp} \arrow[r, "\rho_{*p}"] \arrow[d, "\delta"] & T^* \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^2T^* \otimes T^* \otimes T_Y^{\perp} \arrow[r, "\mathrm{id.}"] \arrow[d, "\delta"] & \Lambda^2T^* \otimes T^* \otimes T_Y^{\perp} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & \Lambda^3T^* \otimes T_Y^{\perp} \arrow[r, "\mathrm{id.}"] & \Lambda^3T^* \otimes T_Y^{\perp} & &
\end{tikzcd}$$

est exact sauf en $T^* \otimes G$, dans sa première ligne, et en $\Lambda^2T^* \otimes T^* \otimes T_Y^{\perp}$, dans sa première colonne: il permet donc de construire l'identification souhaitée.

Corollaire 4.5. *Sous les hypothèses de la proposition* 4.1, *on a*

$$\dim (g_2)_{p\{t_1,\dots,t_{n-\alpha}\}} = \tfrac{1}{12}\alpha(\alpha + 1)[-3n^2 + (2\alpha - 5)n + 6m] , \tag{4.2}$$

pour tout entier α *compris entre* 0 *et* n.

Démonstration. Ce résultat s'obtient aisément en combinant le lemme 2.2, l'égalité 4.1 et l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow (g_2)_{p\{t_1 \cdots t_{n-\alpha}\}} \longrightarrow S^2T^*_{\{t_1,\dots,t_{n-\alpha}\}} \otimes T_Y^{\perp} \xrightarrow{\rho_{*p}} G_{n-\alpha}(t_1, \cdots, t_n) \longrightarrow 0 .$$

5. Le théorème de Cartan

Avant d'aller plus loin, nous énoncerons le théorème principal que nous avons en vue:

Théorème 5.1 (*Elie Cartan*). *L'équation différentielle* $\tilde{R}_2$ *est formellement intégrable.*

Soient W et W' les fibrés vectoriels sur $\tilde{R}_2$ définis par

$$W = \operatorname{Coker} (\Phi_* \circ \delta) , \qquad \text{où } \Phi = \varphi \oplus \psi \oplus \rho , \tag{5.1}$$

et par

$$W' = \operatorname{Coker} (\rho_* \circ \delta|_{\operatorname{Ker} (\psi_* \circ \delta)}) ; \tag{5.2}$$

appliquant le lemme 0.4, on construit une section Ω de W sur $\tilde{R}_2$ telle que la suite

$$(5.3) \qquad \tilde{R}_3 \xrightarrow{\pi_2} \tilde{R}_2 \underset{0}{\overset{\Omega}{\rightrightarrows}} W ,$$

où $\tilde{R}_3$ désigne le premier prolongement de $\tilde{R}_2$, soit exacte. Il existe $q \in R_3'$ tel que $\pi_2(q) = p$ (prop. 3.3), donc $p_1(\varphi)(q) = 0$ et $p_1(\psi)(q) = 0$; par conséquent, $\Omega(p)$ est la classe d'un élément de la forme $(0, 0, \theta) \in T^* \otimes (S_2T^* \oplus (S^2T^* \otimes T^*) \oplus G)$. Si $C \in S^3T^* \otimes T_Y^\perp$, on a toujours $\varphi_{*p} \circ \delta(C) = 0$ et $\psi_{*p} \circ \delta(C) = 0$: la classe $\Omega(p)$ sera donc nulle si et seulement si θ est dans l'image de l'homomorphisme

$$\rho_{*p} \circ \delta \colon S^3T^* \otimes T_Y^\perp \to T^* \otimes G ;$$

en d'autres termes, Ω prend ses valeurs dans W' identifié à un sous-fibré de W.

Lemme 5.1. *L'élément $\theta = p_1(\rho)(q)$ de $T^* \otimes G$, où q est un relèvement de p dans R_3', est un représentant de $\Omega(p)$dans W_p'; en outre, il vérifie la deuxième identité de Bianchi.*

Démonstration. Le fait que θ soit un représentant de $\Omega(p)$ est une conséquence triviale de la définition de Ω. On peut supposer, sans perte de généralité, que le relèvement q est égal à $j_3(f)(x)$; dans ces conditions, on a

$$(5.4) \qquad \begin{aligned} \theta(\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu) = \xi \cdot \{ &(f^*R' - R)(\tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) + g'(B^f(\tilde{\eta}, \tilde{\mu}), B^f(\tilde{\zeta}, \tilde{\lambda})) \\ &- g'(B^f(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}), B^f(\tilde{\zeta}, \tilde{\mu}))\} \end{aligned}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu \in T$, où $\tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ sont respectivement des extensions quelconques de $\eta, \zeta, \lambda, \mu$ sur un voisinage de x dans X. Le signe $\mathfrak{S}$ mis devant une fonction de ξ, η, ζ voudra dire que l'on somme par permutation circulaire sur ξ, η, ζ. Si on choisit les extensions des vecteurs $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu$ telles que le crochet de deux quelconques d'entre elles soit toujours nul, on a

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}\xi \cdot \{g'(B^f(\tilde{\eta}, \tilde{\mu}), B^f(\tilde{\zeta}, \tilde{\lambda})) - g'(B^f(\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}), B^f(\tilde{\zeta}, \tilde{\mu}))\} \\ &= \mathfrak{S}\xi \cdot \{g'(\nabla'_{f_*\tilde{\eta}} f_*\tilde{\mu}, \nabla'_{f_*\tilde{\zeta}} f_*\tilde{\lambda}) - g'(\nabla'_{f_*\tilde{\eta}} f_*\tilde{\lambda}, \nabla'_{f_*\tilde{\zeta}} f_*\tilde{\mu}) - g(\nabla_{\tilde{\eta}}\tilde{\mu}, \nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\lambda}) \\ &\qquad + g(\nabla_{\tilde{\eta}}\tilde{\lambda}, \nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\mu})\} \\ &= \mathfrak{S} g'(\nabla'_{f_*\xi}\nabla'_{f_*\tilde{\eta}} f_*\tilde{\mu}, \nabla'_{f_*\zeta} f_*\tilde{\lambda}) + g'(\nabla'_{f_*\xi}\nabla'_{f_*\tilde{\zeta}} f_*\tilde{\lambda}, \nabla'_{f_*\eta} f_*\tilde{\mu}) \\ &\quad - g'(\nabla'_{f_*\xi}\nabla'_{f_*\tilde{\eta}} f_*\tilde{\lambda}, \nabla'_{f_*\zeta} f_*\tilde{\mu}) - g'(\nabla'_{f_*\xi}\nabla'_{f_*\tilde{\zeta}} f_*\tilde{\mu}, \nabla'_{f_*\eta} f_*\tilde{\lambda}) - g(\nabla_{\xi}\nabla_{\tilde{\eta}}\tilde{\mu}, \nabla_{\zeta}\tilde{\lambda}) \\ &\quad - g(\nabla_{\xi}\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\lambda}, \nabla_{\eta}\tilde{\mu}) + g(\nabla_{\xi}\nabla_{\tilde{\eta}}\tilde{\lambda}, \nabla_{\zeta}\tilde{\mu}) + g(\nabla_{\xi}\nabla_{\tilde{\zeta}}\tilde{\mu}, \nabla_{\eta}\tilde{\lambda}) \\ &= \mathfrak{S} R'(f_*\xi, f_*\eta, f_*\mu, \nabla'_{f_*\zeta} f_*\tilde{\lambda}) - R'(f_*\xi, f_*\eta, f_*\lambda, \nabla'_{f_*\zeta} f_*\tilde{\mu}) \\ &\quad - R(\xi, \eta, \mu, \nabla_{\zeta}\tilde{\lambda}) + R(\xi, \eta, \lambda, \nabla_{\zeta}\mu) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathfrak{S} - R'(\nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\eta}, f_*\zeta, f_*\lambda, f_*\mu) - R'(f_*\eta, \nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\zeta}, f_*\lambda, f_*\mu) \\
&\quad - R'(f_*\eta, f_*\zeta, \nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\lambda}, f_*\mu) - R'(f_*\eta, f_*\zeta, f_*\lambda, \nabla'_{f_*\xi} f_*\tilde{\mu}) \\
&\quad + R(\nabla_\xi \tilde{\eta}, \zeta, \lambda, \mu) + R(\eta, \nabla_\xi \tilde{\zeta}, \lambda, \mu) + R(\eta, \zeta, \nabla_\xi \tilde{\lambda}, \mu) + R(\eta, \zeta, \lambda, \nabla_\xi \tilde{\mu}) \\
&= \mathfrak{S}\xi \cdot (R - f^* R')(\tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \ ,
\end{aligned}
$$

donc θ vérifie la deuxième identité de Bianchi.

Proposition 5.1. *L'image de l'application*

$$\rho_{*p} \circ \delta : S^3 T^* \otimes T_Y^\perp \to T^* \otimes G$$

est égale à H.

Démonstration. Soient $\{t_1, \cdots, t_n\}$ une base de T satisfaisant les conditons données dans la proposition 4.1, $\{t_1^*, \cdots, t_n^*\}$ sa base duale dans T^* et $\omega = \sum_{i=1}^n t_i^* \otimes \omega_i$ un élément de H: compte-tenu du lemme 3.1 et de la 1-acyclicité de l'opérateur δ, le résultat nous est acquis si nous prouvons que, pour tout entier h compris entre 1 et n, il existe $C^{(1)}, \cdots, C^{(h)} \in S^2 T^* \otimes T_Y^\perp$ tels que

$$\rho_{*p}(C^{(k)}) = \omega_k \ , \qquad \text{avec } k = 1, \cdots, h \ ,$$

et que

$$\delta_{t_i} C^{(j)} = \delta_{t_j} C^{(i)} \ , \qquad \text{avec } 1 \leq i, j \leq h \ .$$

Nous allons procéder par récurrence sur h. La propriété est vraie pour $h = 1$, puisque l'application $\rho_{*p} : S^2 T^* \otimes T_Y^\perp \to G$ est surjective; supposons-la vraie pour un entier $h \geq 1$: soit

$$C_1^{(h+1)} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ i \leq h}} t_i^* \cdot t_j^* \otimes C_{ij}^{(h+1)}$$

l'élément de $S^2 T^* \otimes T_Y^\perp$, dont les composantes sont données par les équations

$$\delta_{t_i} C_1^{(h+1)} = \delta_{t_{h+1}} C^{(i)} \ , \qquad \text{avec } i = 1, \cdots, h;$$

on a, pour tous entiers i, j, k, l tels que $1 \leq i, j \leq h$,

$$
\begin{aligned}
&\rho_{*p}(C_1^{(h+1)})(t_i, t_j, t_k, t_l) \\
&\quad = g'(B(t_i, t_l), C_1^{(h+1)}(t_j, t_k)) + g'(B(t_j, t_k), C_1^{(h+1)}(t_i, t_l)) \\
&\qquad - g'(B(t_i, t_k), C_1^{(h+1)}(t_j, t_l)) - g'(B(t_j, t_l), C_1^{(h+1)}(t_i, t_k)) \\
&\quad = g'(B(t_i, t_l), C^{(j)}(t_{h+1}, t_k)) + g'(B(t_j, t_k), C^{(i)}(t_{h+1}, t_l)) \\
&\qquad - g'(B(t_i, t_k), C^{(j)}(t_{h+1}, t_l)) - g'(B(t_j, t_l), C^{(i)}(t_{h+1}, t_k))
\end{aligned}
$$

$$= -\omega_i(t_j, t_{h+1}, t_k, t_l) + g'(B(t_{h+1}, t_k), C^{(i)}(t_j, t_l)) - g'(B(t_{h+1}, t_l), C^{(i)}(t_j, t_k))$$
$$+ g'(B(t_i, t_l), C^{(j)}(t_{h+1}, t_k)) - g'(B(t_i, t_k), C^{(j)}(t_{h+1}, t_l))$$
$$= -\omega_i(t_j, t_{h+1}, t_k, t_l) - \omega_j(t_{h+1}, t_i, t_k, t_l)$$
$$= \omega_{h+1}(t_i, t_j, t_k, t_l) ,$$

d'après la deuxième identité de Bianchi; le raisonnement se termine par la remarque suivante: si $C = \sum_{\substack{1 \le i \le j \le n \\ i \le h}} t_i^* \cdot t_j^* \otimes C_{ij} \in S^2T^* \otimes T_Y^\perp$ et $\varpi \in G$ sont tels que $\rho_{*p}(C)(t_i, t_j, t_k, t_l) = \varpi(t_i, t_j, t_k, t_l)$ pour tous entiers i, j, k, l tels que $1 \le i, j \le h$, il existe

$$\tilde{C} = \sum_{1 \le i \le j \le n} t_i^* \cdot t_j^* \otimes \tilde{C}_{ij} \in S^2T^* \otimes T_Y^\perp$$

tel que
1) $\rho_{*p}(C) = \varpi$,
2) $\tilde{C}_{ij} = C_{ij}$, si $i \le j$ et $i \le h$.
Ce résultat est une conséquence triviale de l'égalité

$$\rho_{*p}(S^2T^*_{\{t_1, \cdots, t_h\}} \otimes T_Y^\perp) = G_h(t_1, \cdots, t_n) .$$

Corollaire 5.1. *Le fibré vectoriel W' est égal au fibré image réciproque du fibré quotient $T^* \otimes G/H$ par la projection $\pi: \tilde{R}_2 \to X$.*

Corollaire 5.2. *L'application $\pi_2: \tilde{R}_3 \to \tilde{R}_2$ est surjective.*

Démonstration. Le lemme 5.1 et la proposition 5.1 montrent que Ω est la section nulle de W' sur $\tilde{R}_2$; l'exactitude de (5.3) entraîne le résultat.

Proposition 5.2. *Une base $\{t_1, \cdots, t_n\}$ de T, satisfaisant les conditions données dans la proposition* 4.1, *est quasi-régulière pour $(g_2)_p$.*

Démonstration. Utilisant le lemme 2.3 et la proposition 5.1, on trouve que $(g_3)_p = \operatorname{Ker}(\rho_{*p} \circ \delta: S^3T^* \otimes T_Y^\perp \to T^* \otimes G)$ a pour dimension

$$\tfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(-n^2 - 3n + 4m);$$

d'un autre côté,

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \dim (g_2)_{p\{t_1, \cdots, t_{n-\alpha}\}} = \tfrac{1}{12} \sum_{\alpha=0}^{n} \alpha(\alpha+1)[-3n^2 + (2\alpha - 5)n + 6m]$$
$$= \tfrac{1}{24}n(n+1)(n+2)(-n^2 - 3n + 4m) ,$$

d'où le résultat cherché.

Démonstration du théorème 5.1. D'après la proposition 5.2, $\tilde{R}_2$ est une équation involutive. L'application $\pi_2: \tilde{R}_3 \to \tilde{R}_2$ est surjective (Cor. 5.2). Enfin, le premier prolongement du symbole de $\tilde{R}_2$ est le noyau du morphisme de fibrés vectoriels sur $\tilde{R}_2$

$$(\psi \oplus \rho)_* \circ \delta : S^3T^* \underset{\tilde{R}_2}{\otimes} V(E) \to T^* \underset{\tilde{R}_2}{\otimes} ((S^2T^* \otimes T^*) \oplus G) ,$$

qui est de rang constant: c'est un fibré vectoriel. L'équation $\tilde{R}_2$ remplit donc les conditions données dans le théorème 0.1; ainsi $\tilde{R}_2$ est formellement intégrable.

Comme corollaire des théorèmes 0.2 et 5.1, on a le résultat suivant:

Corollaire 5.3 (*Théorème de Janet-Cartan*). *Si X et Y sont des variétés riemanniennes analytiques, alors X s'immerge isométriquement localement dans Y.*

Remarque. Tout comme celle d'Elie Cartan, cette démonstration s'applique aux variétés pseudo-riemanniennes puisque, nulle part, nous ne faisons intervenir le caractère positif des métriques.

6. Le probléme a deux dimensions

Nous allons donner une démonstration du théorème 5.1, dans le cas où $\dim X = 2$, indépendante de la démonstration de ce dernier. Soit $p = j_2(f)(x) \in \tilde{R}_2$: on note pour le moment T, G, g_2, g_3 les fibres en x ou p de ces fibrés; on posera encore $B^f_x = B$ et $f_* T^\perp_X = T^\perp_Y$.

Lemme 6.1. *Une base $\{t_1, t_2\}$ de T telle que le vecteur $B(t_1, t_1\}$ soit non nul est quasi-régulière pour g_2.*

Démonstration. Soient $C \in g_2$ et $\tilde{C} \in S^3T^* \otimes T^\perp_Y$ tels que $\delta_{t_1}\tilde{C} = C$. Puisque $B(t_1, t_1)$ n'est pas nul, on peut choisir $\tilde{C}$ tel que

$$\begin{aligned} g'(B(t_1, t_1), \delta_{t_2}\tilde{C}(t_2, t_2)) &= 2g'(B(t_1, t_2), \delta_{t_2}\tilde{C}(t_1, t_2)) \\ &\quad - g'(B(t_2, t_2), \delta_{t_2}\tilde{C}(t_1, t_1)) . \end{aligned} \tag{6.1}$$

L'égalité (6.1) signifie que $\delta_{t_2}\tilde{C} \in g_2$: nous avons donc montré que l'application $\delta_{t_1}: g_3 \to g_2$ est surjective. D'un autre côté, la surjectivé de l'application $\delta_{t_2}: g_{3\{t_1\}} \to g_{2\{t_1\}}$ est triviale, d'où le résultat.

Lemme 6.2. *L'application $\rho_{*p} \circ \delta : S^3T^* \otimes T^\perp_Y \to T^* \otimes G$ est surjective.*

Démonstration. Soit $\{t_1, t_2\}$ une base de T telle que $B(t_1, t_1)$ soit non nul. Un élément C de $S^2T^* \otimes T^\perp_Y$ appartient à g_2 si et seulement si la relation

$$g'(B(t_1, t_1), C(t_2, t_2)) = 2g'(B(t_1, t_2), C(t_1, t_2)) - g'(B(t_2, t_2), C(t_1, t_1))$$

est satisfaite. Il est donc clair que $\dim g_2 = 3(m-2) - 1$ et que $\dim g_{2\{t_1\}} = m - 3$; par conséquent, $\dim g_3 = \dim g_2 + \dim g_{2\{t_1\}} = 4m - 10$. Par ailleurs, on a $\dim T^* \otimes G = 2$ et $\dim S^3T^* \otimes T^\perp_Y = 4m - 8$, donc $\rho_* \circ \delta$ est de rang 2. q.e.d.

L'intégrabilité formelle de $\tilde{R}_2$ découle aisément de ces deux lemmes.

Lemme 6.3. *Supposons que la variété Y soit de dimension* 3: *si, pour tout couple de points $(x, x') \in X \times Y$, les courbures sectionnelles de Y en x' sont* *strictement supérieures à la courbure gaussienne de X en x, alors l'équation $\tilde{R}_2$ est elliptique.*

Démonstration. Soit $\{t_1, t_2\}$ une base de T telle que $B(t_1, t_1)$ soit non nul et que $B(t_1, t_2) = 0$. Soient $\lambda \in T^* - \{0\}$ et $v \in T_Y^\perp$: si $\lambda^2 \otimes v \in g_2$, on a

$$\lambda(t_2)^2 g'(B(t_1, t_1), v) + \lambda(t_1)^2 g'(B(t_2, t_2), v) = 0 .$$

Comme dim $T_Y^\perp = 1$, il existe un nombre réel α tel que $B(t_2, t_2) = \alpha B(t_1, t_1)$: on a

$$\alpha \|B(t_1, t_1)\|^2 = g'(B(t_1, t_1), B(t_2, t_2)) = (f^*R' - R)(t_1, t_2, t_1, t_2) ;$$

par hypothèses, $(f^*R' - R)(t_1, t_2, t_1, t_2) > 0$, donc $\alpha > 0$. On a

$$[\alpha\lambda(t_2)^2 + \lambda(t_1)^2] g'(B(t_1, t_1), v) = 0 ,$$

par conséquent $v = 0$.

7. Immersions conformes

Nous supposons que les dimensions de X et Y sont à nouveau quelconques.

Définition 7.1. Une immersion f de X dans Y est conforme si $f^*g' = ug$, où u est une application différentiable de X dans $\boldsymbol{R}$ appelée rapport de l'immersion conforme f.

On vérifie facilement la

Proposition 7.1. *Si $f: X \to Y$ est une immersion conforme de rapport u, on a l'équation de Gauss-Weingarten*:

$$(7.1) \qquad g'(B(\xi, \eta), f_*\zeta) = \tfrac{1}{2}\{(\xi \cdot u)g(\eta, \zeta) + (\eta \cdot u)g(\xi, \zeta) - (\zeta \cdot u)g(\xi, \eta)\}$$

pour tous champs ξ, η, ζ sur X, si B désigne la seconde forme fondamentale de l'immersion f.

Si $x \in X$ et $u \in C^\infty(X, \boldsymbol{R})$, on définit une forme bilinéaire symétrique $H_{u,x}$ sur T_x en posant

$$H_{u,x}(\xi, \eta) = \xi \cdot \tilde{\eta} \cdot u - \nabla_\xi \tilde{\eta} \cdot u$$

pour tous $\xi, \eta \in T_x$, où $\tilde{\eta}$ est une extension quelconque du vecteur η sur un voisinage de x dans X. La forme $H_{u,x}$, qui est bien définie, est appelée Hessien de u en x; il est clair que $H_{u,x}$ ne dépend que du 2-jet de u en x. On note H_u la section

$$x \to H_{u,x}$$

de S^2T^* sur X ainsi obtenue.

Un calcul analogue à celui de la proposition 7.1 permet d'énoncer

Proposition 7.2. *Sous les hypothèses de la proposition* 7.1, *on a l'équation de Gauss*:

$$\begin{aligned}(f^*R' - uR)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) &+ g'(B(\eta, \zeta), B(\xi, \lambda)) - g'(B(\eta, \lambda), B(\xi, \zeta)) \\ &= \tfrac{1}{2}\{H_u(\xi, \zeta)g(\eta, \lambda) + H_u(\eta, \lambda)g(\xi, \zeta) - H_u(\xi, \lambda)g(\eta, \zeta) \\ &\quad - H_u(\eta, \zeta)g(\xi, \lambda)\}\end{aligned} \tag{7.2}$$

pour tous champs $\xi, \eta, \zeta, \lambda$ *sur* X.

Les deux membres de l'égalité (7.2) sont clairement des sections de G sur X. Les équations (7.1) et (7.2) sont les généralisations des équations de Gauss-Weingarten et de Gauss au cas conforme.

On désigne par F le fibré trivial sur X

$$pr_1 : X \times Y \times \boldsymbol{R}^* \to X ,$$

par τ la projection canonique de $J_k(F)$ sur $J_k(E)$ et par $\tilde{J}_k(F)$ le sous-fibré ouvert de $J_k(F)$ des k-jets p tels que $\tau(p) \in \tilde{J}_k(E)$, si $k \geq 1$. Si $p \in J_k(F)$, on identifiera toujours $V(E)_{\pi_0(\tau(p))} = T_{Y,\pi_0(\tau(p))}$ au sous-espace $T_{Y,\pi_0(\tau(p))} \oplus \{0\}$ de $V(F)_{\pi_0(p)} = T_{Y,\pi_0(\tau(p))} \oplus \boldsymbol{R}$.

Soit

$$\bar{\varphi}' : \tilde{J}_1(F) \to S^2T^*$$

le morphisme de fibrés sur X défini par

$$\bar{\varphi}'(p) = (f^*g' - ug)(x) , \tag{7.3}$$

si $p = j_1(f, u)(x) \in J_1(F)_x$, où f est une application de X dans Y de rang maximum en $x \in X$ et u une application de X dans $\boldsymbol{R}$ non nulle en x.

Proposition 7.3. *Le morphisme de fibrés sur* $\bar{\varphi}'$

$$\bar{\varphi}'_* : T^* \underset{\tilde{J}_1(F)}{\otimes} V(F) \to V(S^2T^*)$$

est surjectif; *de plus* $N_1' = \mathrm{Ker}_0\,(\bar{\varphi}')$ *est une équation différentielle.*

Démonstration. Si $p \in \tilde{J}_1(F)$, la restriction de $\bar{\varphi}'_{*p}$ à $T^*_{\pi(p)} \otimes T_{Y,\pi_0(\tau(p))}$ est égale à $\varphi'_{*\tau(p)}$; comme $\varphi'_{*\tau(p)}$ est surjective, $\bar{\varphi}'_{*p}$ l'est aussi. A partir de là, l'on montre facilement que N_1' est une équation différentielle.

Soient

$$\bar{\varphi} : \tilde{J}_2(F) \to S^2T^* , \quad \bar{\psi} : \tilde{J}_2(F) \to S^2T^* \otimes T^* , \quad \bar{\rho} : \tilde{J}_2(F) \to G$$

les morphismes de fibrés sur X définis respectivement par

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}' \circ \pi_1 , \tag{7.4}$$

par

$$
(7.5)\qquad \begin{aligned}\bar{\psi}(p)(\xi,\eta,\zeta) &= g'(B_x^f(\xi,\eta), f_*\zeta)\\ &\quad - \tfrac{1}{2}\{(\xi\cdot u)g(\eta,\zeta) + (\eta\cdot u)g(\xi,\zeta) - (\zeta\cdot u)g(\xi,\eta)\}\,,\end{aligned}
$$

et par

$$
(7.6)\qquad \begin{aligned}\bar{\rho}(p)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) &= (f^*R' - uR)(\xi,\eta,\zeta,\lambda) + g'(B_x^f(\eta,\zeta), B_x^f(\xi,\lambda))\\ &\quad - g'(B_x^f(\eta,\lambda), B_x^f(\xi,\zeta)) + \tfrac{1}{2}\{H_{u,x}(\xi,\lambda)g(\eta,\zeta) + H_{u,x}(\eta,\zeta)g(\xi,\lambda)\\ &\quad - H_{u,x}(\xi,\zeta)g(\eta,\lambda) - H_{u,x}(\eta,\lambda)g(\xi,\zeta)\}\,,\end{aligned}
$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T_x$, si $p = j_2(f, u)(x) \in \tilde{J}_2(F)$, où f est une application de rang maximum de X dans Y dèfinie sur un voisinage de x et u une application de X dans $\boldsymbol{R}$ non nulle en x.

Par un calcul analogue à celui de la proposition 3.2, on a:

Proposition 7.4. *Le premier prolongement N_2' de N_1' est égal à* $\operatorname{Ker}_0(\bar{\varphi}\oplus\bar{\psi})$.

Si $p \in \tilde{J}_2(F)$, on a

$$
\bar{\psi}_{*p}|_{S^2T^*_{\pi(p)}\otimes T_{Y,\pi_0(\tau(p))}} = \psi_{*\tau(p)}\ ,
$$

donc le morphisme de fibrés sur $\bar{\psi}$

$$
\bar{\psi}_* : S^2T^* \underset{\tilde{J}_2(F)}{\otimes} V(F) \to V(S^2T^* \otimes T^*)
$$

est surjectif; ainsi, d'après la démonstration du corollaire 3.1, N_2' est une équation différentielle. Par ailleurs, si l est un entier positif, le l-ième prolongement de N_2' est égal au $(l+1)$-ième prolongement de N_1'.

Proposition 7.5. *La suite de fibrés à fibre variable sur X*

$$
N_3' \xrightarrow{\pi_2} N_2' \underset{0}{\overset{\bar{\rho}}{\rightrightarrows}} G
$$

où N_3' est le premier prolongement de N_2', est exacte.

Démonstration. Soient $p \in N_2'$ et q un élément de $J_3(F)$ tels que $\pi_2(q) = p$. On a la formule

$$
(7.7)\qquad \bar{\rho}(p) = \delta(p_1(\bar{\psi})(q))\ ,
$$

qui est l'analogue de la formule (3.8) du cas isométrique, d'où le résultat (cf. Prop. 3.3).

Soit $\bar{g} = g' \times g_0$ la métrique produit sur $Y \times \boldsymbol{R}$, où g_0 est la métrique euclidienne sur $\boldsymbol{R}$. Si $p = j_2(f, u)(x) \in \tilde{J}_2(F)$, soient $B_x^{f,u}$ et $\bar{B}_x^f$ les éléments de $S^2T_x^* \otimes (T_{Y,f(x)} \oplus \boldsymbol{R})$ respectivement égaux à $B_x^f \oplus H_{u,x}$ et $B_x^f \oplus \frac{1}{2}g_x$. Avec ces notations on a

$$\bar{\rho}(p)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = (f^*R' - uR)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) + \bar{g}(\bar{B}^f_x(\eta, \zeta), B^{f,u}_x(\xi, \lambda)) - \bar{g}(\bar{B}^f_x(\xi, \zeta), B^{f,u}_x(\eta, \lambda)) + \tfrac{1}{2}\{H_{u,x}(\eta, \zeta)g(\xi, \lambda) - H_{u,x}(\xi, \zeta)g(\eta, \lambda)\}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T_x$.

Supposons désormais que $m \geq \frac{1}{2}n(n+1) - 1$; on peut alors construire un sous-fibré ouvert $\bar{\mathcal{O}}$ de $\tilde{J}_2(F)$ de la manière suivante: un jet $j_2(f, u)(x)$ de $\tilde{J}_2(F)$ appartient à $\bar{\mathcal{O}}_x$ si et seulement s'il existe un sous-espace U de dimension $n-1$ de T_x tel que f_*T_x et $\bar{B}^f_x(S^2U)$ engendrent un sous-espace de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ de $T_{Y,f(x)} \oplus \boldsymbol{R}$.

Proposition 7.6. *Il existe* $q \in \bar{\mathcal{O}}_x \cap \operatorname{Ker}_0(\bar{\varphi} \oplus \bar{\psi} \oplus \bar{\rho})$, *quel que soit* $x \in X$.

Démonstration. Soient $p = j_1(f, u)(x) \in N_1'$ et $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de T_x. Avec les techniques de la proposition 4.1 et du corollaire 4.3, on peut construire des formes $C \in S^2T^*_x \otimes T_{Y,f(x)}$ et $H \in S^2T^*_x$ telles que

$$\bar{g}(\bar{C}(e_i, e_k), \tilde{C}(e_j, e_l)) = (f^*R' - uR)(e_i, e_j, e_k, e_l) + \bar{g}(\bar{C}(e_j, e_k), \tilde{C}(e_i, e_l)) + \tfrac{1}{2}\{H(e_j, e_k)g(e_i, e_l) - H(e_i, e_k)g(e_j, e_l)\} \tag{7.8}$$

pour tous entiers i, j, k, l compris entre 1 et n, où $\tilde{C} = C \oplus H$ et $\bar{C} = C \oplus \frac{1}{2}g_x$. On détermine les vecteurs $\tilde{C}(e_i, e_j)$ par une double récurrence sur les indices i et j à partir des équations (7.8) en prenant soin de choisir les vecteurs

$$f_*e_1, \cdots, f_*e_n \quad \text{et} \quad \bar{C}(e_i, e_j) \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq j \leq n-1\,,$$

linéairement indépendants. On peut alors imposer aux vecteurs $C(e_i, e_j)$ de vérifier en plus les équations

$$g'(C(e_i, e_j), f_*e_k) = \tfrac{1}{2}\{(e_i \cdot u)g(e_j, e_k) + (e_j \cdot u)g(e_i, e_k) - (e_k \cdot u)g(e_i, e_j)\}$$

pour tous entiers i, j, k. Si $q = j_2(h, v)(x) \in \tilde{J}_2(F)_x$ est un jet tel que $\pi_1(q) = p$, $B^h_x = C$ et que $H_{v,x} = H$, alors q est par construction dans $\bar{\mathcal{O}}_x \cap \operatorname{Ker}_0(\bar{\varphi} \oplus \bar{\psi} \oplus \bar{\rho})$.

Nous pouvons maintenant énoncer:

Théorème 7.1. *Le sous-fibré* $N_2 = \bar{\mathcal{O}} \cap \operatorname{Ker}_0(\bar{\varphi} \oplus \bar{\psi} \oplus \bar{\rho})$ *est une équation différentielle involutive et formellement intégrable.*

Démonstration. Soit $p = j_2(f, u)(x) \in N_2$; si $C \in S^2T^*_x \otimes (T_{Y,f(x)} \oplus \boldsymbol{R})$, on a

$$\bar{\psi}_{*p}(C)(\xi, \eta, \zeta) = \bar{g}(C(\xi, \eta), f*\zeta), \tag{7.9}$$

$$\bar{\rho}_{*p}(C)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = \bar{g}(\bar{B}^f_x(\xi, \lambda), C(\eta, \zeta)) + \bar{g}(\bar{B}^f_x(\eta, \zeta), C(\xi, \lambda)) - \bar{g}(\bar{B}^f_x(\xi, \zeta), C(\eta, \lambda)) - \bar{g}(\bar{B}^f_x(\eta, \lambda), C(\xi, \zeta)) \tag{7.10}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T_x$. Ces formules sont les analogues des formules (3.6) et (3.9) du cas isométrique: à ce moment là, en recopiant les calculs du lemme 3.1, du corollaire 4.2 et de la proposition 5.1 en remplaçant g' par $\bar{g}$, B^f_x par

$\bar{B}^f_x$, T_Y par $T_Y \oplus \boldsymbol{R}$ et $T_Y^\perp$ par $T_Y^\perp \oplus \boldsymbol{R}$, on en déduit immédiatement que N_2 est une équation différentielle involutive. D'autre part, d'après le lemme 0.4 et la proposition 7.5, on construit une section $\bar{\Omega}$ de $\overline{W}' = \bar{\pi}^1(T^* \otimes G/H)$, où $\pi : N_2 \to X$ est la projection naturelle, telle que la suite

$$N_3 \xrightarrow{\pi_2} N_2 \underset{0}{\overset{\bar{\Omega}}{\rightrightarrows}} \overline{W}'$$

soit exacte. Si $q \in N_2$, l'élément $\theta = p_1(\bar{\rho})(q) \in T^* \otimes G$, où q est un jet de N_3' tel que $\pi_2(q) = p$, est un représentant de $\bar{\Omega}(p)$ dans $\overline{W}'_p$: un calcul analogue à celui du lemme 5.1 montre que $\theta \in H$ (i.e. : vérifie la deuxième identité de Bianchi), par conséquent $\bar{\Omega}$ est la section nulle du fibré $\overline{W}'$; ainsi N_2 est formellement intégrable.

Si l'on impose aux variétés riemanniennes (X, g) et (Y, g') d'être analytiques, on retrouve le théorème de Jacobowitz-Moore [7]. Comme dans le cas isométrique, cette démonstration s'applique aux variétés pseudo-riemanniennes puisque nous n'avons pas fait intervenir le caractère positif des métriques.

Bibliographie

[1] E. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien,* Ann. Soc. Polon. Math. **6** (1927) 1–7.

[2] ——, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques,* Hermann, Paris, 1945.

[3] H. Goldschmidt, *Existence theorems for analytic linear partial differential equations,* Ann. of Math. **86** (1967) 246–270.

[4] ——, *Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations,* J. Differential Geometry **1** (1967) 269–307.

[5] ——, *Sur la structure des équations de Lie*: I. *Le troisimème théorème fondamental,* J. Differential Geometry **6** (1972) 357–373.

[6] V. Guillemin & S. Sternberg, *An algebraic model of transitive differential geometry,* Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) 16–47.

[7] H. Jacobowitz & J. D. Moore, *The Cartan-Janet theorem for conformal embeddings,* Indiana Univ. Math. J. **23** (1973) 187–203.

[8] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* Vol. II, Wiley-Interscience, New York, 1969.

Université Scientifique et Médicale de Grenoble