J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
6 (1971) 47-94

VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES À PREMIÈRE CLASSE DE CHERN NON NEGATIVE ET VARIÉTÉS RIEMANNIENNES À COURBURE DE RICCI GÉNÉRALISEE NON NEGATIVE

ANDRE LICHNEROWICZ

Introduction

Le présent article est divisé en deux parties: l'une (Chap. I à V) est consacrée aux variétés kählériennes compactes à première classe de Chern C_1 non négative, l'autre (Chap. VI à VIII) aux variétés riemanniennes compactes à tenseur $\mathbf{C}$ (voir formule (20–10)) non négatif. L'un de ses buts est d'explorer l'analogie existant entre l'étude des applications holomorphes d'une variété kählérienne compacte dans un tore complexe et celle des applications harmoniques d'une variété riemannienne compacte dans un tore réel. On notera que $\mathbf{C}=0$ entraine la nullité du tenseur de Ricci $\mathbf{R}$ de la variété riemannienne envisagée (voir [15] a).

Les principaux résultats de la première partie sont énoncés dans les théorèmes des § 13 et § 16. Certains de ces résultats apparaissent dans [14] et [15] b. Le § 15 tire son importance d'une conjecture qu'il nous faut énoncer: considérons une variété kählérienne compacte de structure complexe fixée, de 2-forme fondamentale F. Faisons varier cette 2-forme dans sa classe de cohomologie réelle; si nous introduisons l'intégrale du carré du tenseur de Ricci (ou celle du carré de la courbure scalaire), les équations d'Euler correspondantes expriment que $d'(\operatorname{Tr}\mathbf{R})$ définit une transformation infinitésimale holomorphe. C'est pourquoi il est possible d'émettre la conjecture suivante.

(C) Sur toute variété kählérienne compacte, il existe une structure kählérienne telle que $d'(\operatorname{Tr}\mathbf{R})$ définisse une transformation infinitésimale holomorphe.

Si cette conjecture, que j'ai énoncée il y a une dizaine d'années, était exacte les résultats du § 16 seraient valables pour toute variété kählérienne compacte à $C_1 \geq 0$ (voir aussi [5]).

Les principaux résultats de la seconde partie sont énoncés dans les théorèmes du § 23 (qui correspondent à l'analogie énoncée) et dans ceux des § 26 et 27 qui constituent, en un certain sens, une extension de résultats de Cheeger-Gromoll. On peut en déduire un théorème concernant la simple connexité de certaines variétés kählériennes.

Communicated October 23, 1970.

Dans un but de simplicité, on a regroupé dans les Chapitres I, II et IV les notations, formules et rappels utilisés. Je tiens à remercier Y. Matsushima et D. Gromoll pour d'intéressants échanges de vues.

I. VARIÉTÉS COMPLEXES

1. Définitions concernant les variétés complexes

a) Soit W une variété complexe connexe de dimension réelle $2n$. Un système de coordonnées complexes est défini sur un domaine U de W par $\psi_U: z \in U \to \{z^\alpha\} \in C^n$ (α, β, tout indice grec $= 1, 2, \cdots, n$). Nous posons $z^{\bar\alpha} = \bar z^\alpha$ ($\bar\alpha, \bar\beta, \cdots = n+1, \cdots, 2n$). Sur l'intersection $U \cap V$ des domaines de deux systèmes de coordonnées complexes, les coordonnées $\{z^\alpha\}$ du point z dans U sont des fonctions holomorphes, à jacobien $J_V^U \neq 0$, des coordonnées complexes du même point z dans V. Nous notons $\mathscr{J}$ ($\mathscr{J}^2 = -\mathrm{Id.}$) l'opérateur de structure complexe sur les vecteurs, éléments de l'espace vectoriel tangent T_z ou de son complexifié T_z^c. Si S_z^c et $\bar S_z^c$ sont les deux sous-espaces propres de $\mathscr{J}_z$ correspondant aux valeurs propres i et $-i$, on a:

$$T_z = S_z^c \oplus \bar S_z^c .$$

L'existence de cette décomposition conduit à la notion de type pour les tenseurs complexes et pour les opérateurs.

Une r-forme de W est une forme différentielle extérieure complexe d'ordre r. Une forme de type (s, t) a des composantes à s indices α et t indices $\bar\beta$. Si d est l'opérateur de différentiation extérieure sur les formes, $d = d' + d''$, où d' est de type $(1, 0)$ et d'' de type $(0, 1)$. Une *r-forme holomorphe* β est une r-forme de type $(r, 0)$ telle que $d''\beta = 0$. Soit M l'opérateur linéaire sur les formes défini, pour les formes de type (s, t) par

$$M\alpha_{s,t} = (s\text{-}t)i\alpha_{s,t} .$$

Si f est un scalaire, on a trivialement:

$$id'd''f = -\tfrac{1}{2}dMdf . \tag{1.1}$$

Pour abréger, nous appelons *r-tenseur A* un r-tenseur complexe contravariant antisymétrique de W. Un *r-tenseur holomorphe* est un r-tenseur de type $(r, 0)$ qui admet, en coordonnées complexes, des composantes qui sont des fonctions holomorphes locales des z^α.

b) Une transformation holomorphe de W est une transformation de W laissant invariants la structure complexe ou le tenseur $\mathscr{J}$. *Une transformation infinitésimale* définie par le champ vectoriel réel X est *holomorphe* si $\mathscr{L}(X)\mathscr{J} = 0$

(où $\mathscr{L}(X)$ est l'opérateur de dérivation de Lie). Il est équivalent de dire que la partie $X^{1,0}$ de X de type $(1,0)$ est une vecteur holomorphe; $\mathscr{J}X$ définit donc aussi une transformation infinitésimale holomorphe.

Soit L l'algèbre de Lie de toutes les transformations infinitésimales holomorphes de W; $\mathscr{J}$ définit sur L une structure d'algèbre de Lie complexe.

c) *Nous supposons désormais W compacte.*

Le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W admet une structure naturelle de groupe de Lie complexe, $G \times W \to W$ étant holomorphe et l'algèbre de Lie de G peut être identifiée à l'algèbre complexe L.

2. L'idéal I de L et les espaces I^r

a) Soit $\mathbf{T}^r$ l'espace vectoriel complexe des *r-tenseurs holomorphes*, $\mathbf{H}^r$ celui des *r-formes holomorphes*. Pour $r = 1$, $\mathbf{T}^1$ coïncide avec l'espace des vecteurs holomorphes définissant L. Si $A \in \mathbf{T}^r$ et $\beta \in \mathbf{H}^r$, le scalaire $i(A)\beta$ (où $i(A)$ désigne le produit intérieur) est holomorphe sur W compacte. Par suite $i(A)\beta = \text{const}$. Nous désignons par I^r le sous-espace complexe de $\mathbf{T}^r$ défini par les éléments A tels que $i(A)\beta = 0$ pour toute r-forme holomorphe *fermée* β.

b) En particulier I est le sous-espace complexe de L défini par les éléments X tels que: $i(X)\beta = 0$ pour toute 1-forme *fermée* β. On vérifie immédiatement que si $L' = [L, L]$ est l'idéal dérivé de L, on a $L' \subset I$ et *I est un idéal tel que L/I soit abélien.* On notera que si X, élément de L, admet un zéro sur W, il appartient nécessairement à I.

Si $X \in L$ et $A \in \mathbf{T}^r$ $(r > 1)$, on vérifie de même que $\mathscr{L}(X)A \in I^r$ si W est *kählérienne*.

3. La première classe de Chern

Soit K une $2n$-forme réelle sur W. Sur un domaine U de coordonnées:

$$K_U = \varepsilon_n k_U dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge dz^{\bar{n}} ,$$

où $\varepsilon_n = (-1)[n(n-1)/2]i^n$ et où k_U est à valeurs réelles. Dans $U \cap V$, on a:

$$k_V = k_U J_V^U \bar{J}_V^U . \tag{3.1}$$

L'ensemble des k_U définit sur W une desité scalaire de poids 1, ou -pour abréger- un *noyau*; K ou k sont dits ≥ 0 (resp > 0) si les k_U sont ≥ 0 (resp > 0).

Soit k un noyau *strictement positif*. D'aprés (3.1), les 2-formes réelles locales:

$$\tau_U = id'd'' \log k_U = -\tfrac{1}{2} dMd \log k_U$$

définissent sur W une 2-forme τ réelle, fermée de type $(1,1)$. En substituant à k un autre noyau strictement positif, on voit que la classe de cohomologie réelle de τ dépend seulement de la structure complexe de W. La forme $(2\pi)^{-1}\tau$ ayant, selon Chern, ses périodes entières, on peut définir *la première classe de Chern* $C_1(W)$ comme la classe de cohomologie entière (ou réelle) déterminée par $(2\pi)^{-1}\tau$.

II. GENERALITES SUR LES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

4. Variétés kählériennes

a) Soit t un 2-tenseur covariant réel de type $(1, 1)$ sur W. Sur de tels tenseurs, introduisons l'opérateur réel $\mathbf{J}(\mathbf{J}^2 = -\mathrm{Id})$ défini par:

$$\mathbf{J}t(V, W) = t(\mathcal{J}V, W)$$

pour tout couple de vecteurs V, W. Si t est symétrique, $\mathbf{J}t$ est antisymétrigue et inversement.

Soit $\mathbf{g}$ une métrique hermitienne sur W, c'est-à-dire une métrique riemannienne telle que $\mathbf{g}$ soit de type $(1, 1)$. A $\mathbf{g}$ correspond par $\mathbf{J}$ une 2-forme F de type $(1, 1)$ et rang $2n$. Localement:

$$ds^2 = 2g_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha \otimes dz^{\bar\beta} , \qquad F = ig_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha \wedge dz^{\bar\beta} .$$

b) $\mathbf{g}$ définit une métrique *kählérienne* si la forme F est fermée; F est alors à dérivée covariante nulle dans la connexion définie par la métrique. Le tenseur de Ricci correspondant $\mathbf{R}$ est de type $(1, 1)$ et localement:

$$R_{\alpha\bar\beta} = -\partial_\alpha\partial_{\bar\beta} \log \sqrt{g_U} , \tag{4.1}$$

où g_U est, pour U, le discriminant de la métrique. Les $\sqrt{g_U}$ définissant le noyau associé à la forme élément de volume η de la variété kählérienne $(W, \mathbf{g})$, $C_1(W)$ peut être considéré comme la classe de cohomologie de $-(2\pi)^{-1}\mathbf{JR}$.

Si (α, β) représente le produit intérieur de deux r-formes, $\langle\alpha, \beta\rangle$ est le produit scalaire hermitien:

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \int_W (\alpha, \beta)\eta . \tag{4.2}$$

Si δ est l'opérateur de codifférentiation sur les formes, on a $\delta = \delta' + \delta''$ où δ' est de type $(-1, 0)$ et δ'' de type $(0, -1)$; $\delta, \delta', \delta''$ sont respectivement les opérateurs transposés par rapport à (4.2) de d, d', d''. Le laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$ de Hodge-de Rham peut s'écrire sur une variété kählérienne:

$$\Delta = 2(d'\delta' + \delta'd') = 2(d''\delta'' + \delta''d'') . \tag{4.3}$$

De (4.3) il résulte que, sur une variété kählérienne compacte, toute forme holomorphe β est harmonique donc fermée $(d\beta = 0)$; par suite *toute forme* *holomorphe est invariante* par l'algèbre de Lie L. La partie de type $(1, 0)$ d'une 1-forme harmonique réelle est holomorphe. Notons $b_{r,0}(w)$ la dimension complexe de $\mathbf{H}^r$; le premier nombre de Betti de W est $b_1(w) = 2b_{1,0}(w)$.

c) Soit A un r-tenseur de type $(r, 0)$. Le dualité définie par la métrique et la conjugaison permettent de déduire de A une forme $\alpha(A)$ de type (r, O); α est une application bijective antilinéaire des r-tenseurs de type (r, O) sur les r-formes de type (r, O). Pour que $A \in \mathbf{T}^r$, il faut et il suffit que la partie de $\nabla\alpha(A)$ (où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante) de type $(r + 1, O)$ soit nulle:

$$(4.4) \qquad \{\nabla_\alpha(A)\}_{r+1,0} = 0 \ .$$

On voit par antisymétrisation que $\alpha(A)$ est nécessairement d'-fermée ($d'\alpha(A) = 0$). Il résulte de la décomposition globale complexe de G. de Rham que:

$$(4.5) \qquad \alpha(A) = d'\mu + H\alpha(A) \qquad (A \in \mathbf{T}^r) \ ,$$

où $H\alpha(A)$ est une r-forme holomorphe. Introduisons le scalaire holomorphe, donc constant:

$$k(A) = i(A)H\alpha(A) = (H\alpha(A), \alpha(A)) \ .$$

Par intégration on voit que pour que $A \in \mathbf{T}^r$, il faut et il suffit que $k(A) = 0$ *ou que $\alpha(A)$ soit d'-homologue à* 0. En particulier si X est un élément de L, pour qu'il appartienne à I, il faut et il suffit que la 1-forme $\xi = \alpha(X^{1,0})$ de type $(1, 0)$ soit *d'-homologue à* 0.

d) Pour abréger, nous notons $\mathbf{H}$ l'espace vectoriel complexe $\mathbf{H}^1$ de dimension complexe $p = b_{1,0}(w)$; l'entier p sera appelé *l'irrégularité* de W. La dimension réelle de $\mathbf{H}$ est égale à $b_1(w) = 2p$. Posons:

$$q = \dim_c L - \dim_c I \ .$$

Soit $\mathbf{H}_{(0)}$ le sous-espace complexe de $\mathbf{H}$ défini par les 1-formes holomorphes telles que $i(X)\beta = 0$ pour tout $X \in L$. On a:

$$\dim_c L - \dim_c I = \dim \mathbf{H} - \dim \mathbf{H}_{(0)} = q \ ,$$

ce qui montre que $q \leq p$ et fournit une interprétation de la différence $(p - q)$.

L'image de l'espace complexe des vecteurs holomorphes $X^{1,0}$ par l'application antilinéaite $X^{1,0} \to H\alpha(X^{1,0})$ est un sous-espace vectoriel Q de $\mathbf{H}$ de dimension complexe q. Si $\beta \in Q$, il existe $X^{1,0}$ tel que $\beta = H\alpha(X^{1,0})$ et si $\beta \not\equiv 0$, on a $i(X)\beta \neq 0$; sinon on aurait $\langle\beta, \alpha(X^{1,0})\rangle = \langle\beta, \beta\rangle = 0$. Par suite *aucune 1-forme $\beta \in Q$ ne peut s'annuler sur W sans* être *identiquement nulle.*

Soit $\{\beta^A\}$ $(A = 1, \cdots, q)$ une base de Q. La forme $\sum a_A\beta^A$ de Q ne peut s'annuler en aucun point z de W sans être identiquement nulle. Par suite les 1-*formes $\beta^A(z)$ sont linéairement indépendantes en tout point z de W* et l'on a $q \leq n$.

Un cas particulièrement intéressant est celui où $q = p$, c'est-à-dire où $\mathbf{H}_{(0)} = 0$. Aucune 1-forme holomorphe de W ne peut alors s'annuler sans être identiquement nulle. Il en est ainsi par exemple:

1°) *si L est une algèbre de Lie transitive sur W.* Si $\beta \in \mathbf{H}$, la relation $(i(X)\beta)(z) = 0$ pour tout $X \in L$ et tout $z \in W$ implique $\beta = 0$ et l'on a $\mathbf{H}_{(0)} = 0$.

2°) *si la première classe de Chern $C_1(W)$ est* ≥ 0 en un sens que nous rappellerons. Le premier cas correspond à celui d'une variété kählérienne compacte qui est *espace homogène complexe*, cas qui a été étudié par A. Borel et Remmert [4]. Le second cas est celui que nous étudions ([13], [14]).

5. Variété d'Albanese d'une variété kählérienne

Rappelons la définition de la variété d'Albanese et précisons certaines de ses propriétés.

a) Soit $(\tilde{W}, \pi)$ le revêtement universel de W considéré comme réalisé au moyen des chemins de W issus d'un point fixe z_0. Nous notons $\tilde{z} \in \tilde{W}$ un point de $\tilde{W}$ au dessus de $z \in W$, $\tilde{z}_0$ correspondant au chemin nul. Désignons par s l'automorphisme de la variété complexe $\tilde{W}$ correspondant à un élément du groupe fondamental $\pi_1(W)$. Une fonction holomorphe ρ sur $\tilde{W}$, à valeurs dans un espace vectoriel complexe E, est dite additive si:

$$\rho(s\tilde{z}) - \rho(\tilde{z}) = \varphi(s) ,$$

où $\varphi(s)$ est une représentation de $\pi_1(W)$ dans E.

Si $\beta \in \mathbf{H}$, on a $\pi^*\beta = d'\rho$, où ρ est *une fonction holomorphe additive* sur $\tilde{W}$, à valeurs complexes. Avec les notations précédentes, on a en effet:

$$\rho(s\tilde{z}) - \rho(\tilde{z}) = \int_{C^1} \beta ,$$

où C^1 est le cycle défini par $\tilde{z}^{-1} \cdot s\tilde{z}$.

Soit $\mathbf{H}^*$ l'espace vectoriel complexe dual de $\mathbf{H}$. A tout point $\tilde{z}$ correspond par la différence $\rho(\tilde{z}) - \rho(\tilde{z}_0)$ (avec $\pi^*\beta = d\rho$) une forme linéaire sur $\mathbf{H}$, c'est-à-dire un élément de $\mathbf{H}^*$. Avec une notation évidente, nous définissons ainsi par:

$$(5.1) \qquad (\tilde{J}(\tilde{z}), \beta) = \rho(\tilde{z}) - \rho(\tilde{z}_0) \qquad (\pi^*\beta = d\rho) ,$$

une *application holomorphe additive* $\tilde{J}$ de $\tilde{W}$ dans $\mathbf{H}^*$. Si $\tilde{z}_0'$ est substitué à $\tilde{z}_0$, $\tilde{J}(\tilde{z}) - \tilde{J}(\tilde{z}_0')$ est substitué à $\tilde{J}(\tilde{z})$.

A tout cycle C^1 d'une classe d'homologie réelle, élément de $H^1(W, R)$ correspond par l'intégrale $\int_{C^1} \beta$ un élément de $\mathbf{H}^*$ qui ne dépend que de la classe envisagée. On définit ainsi un *isomorphisme* de $H^1(W, R)$ sur l'espace vectoriel réel déterminé par $\mathbf{H}^*$. L'image correspondante de $H^1(W, Z)$ est un sous-groupe P discret de $\mathbf{H}^*$, de rang $2p$. De la définition de $\tilde{J}$ et de P, il résulte que pour l'automorphisme s de $\tilde{W}$, on a:

$$\tilde{J}(s\tilde{z}) - \tilde{J}(\tilde{z}) \in P \ . \tag{5.2}$$

On appelle *variété d'Albanese* le tore complexe $A(W) = \mathbf{H}^*/P$ que l'on considère comme une variété kählérienne pour sa métrique plate naturelle. D'après (5.2), $\tilde{J}$ passe au quotient et définit une *application holomorphe* J de W dans $A(W)$, le diagramme suivant étant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W} & \xrightarrow{\tilde{J}} & \mathbf{H}^* \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ W & \xrightarrow{J} & A(W) = \mathbf{H}^*/P \end{array}$$

On a donc:

$$p \circ \tilde{J} = J \circ \pi \ . \tag{5.3}$$

L'application J sera appelée dans la suite *application de Jacobi.*

b) Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie, E^* l'espace vectoriel complexe dual. Désignons par $\tilde{\mu}$ une *application holomorphe additive* de $\tilde{W}$ dans E telle que $\tilde{\mu}(\tilde{z}_0) = 0$. Si $a \in E^*$, la fonction ρ: $\tilde{z} \to (\tilde{\mu}(\tilde{z}), a)$ est une fonction holomorphe additive sur $\tilde{W}$, nulle en z_0, à valeurs complexes et il existe un élément β de $\mathbf{H}$ tel que $\pi^*\beta = d\rho$. On détermine ainsi une application linéaire complexe de E^* dans $\mathbf{H}$ qui à $a \in E^*$ fait correspondre $\beta \in \mathbf{H}$ (avec $\pi^*\beta = d\rho$). Si $\tilde{\nu}$: $\mathbf{H}^* \to E$ est l'application transposée, il vient d'après (5.1):

$$(\tilde{\mu}(\tilde{z}), a) = \rho(\tilde{z}) = (\tilde{J}(\tilde{z}), \beta) = (\tilde{\nu}_0\tilde{J}(\tilde{z}), a) \ .$$

Ainsi il existe une application linéaire $\tilde{\nu}$ de $\mathbf{H}^*$ dans E, déterminée visiblement de manière unique, telle que:

$$\tilde{\mu} = \tilde{\nu} \circ \tilde{J} \ . \tag{5.4}$$

Soit $\Theta = E/R$ un tore complexe, quotient d'un espace vectoriel complexe E par un sous-groupe discret de rang maximum et soit p_1 la projection canonique $E \to \Theta$. Si μ est une *application holomorphe* nulle en z_0, de W dans Θ, μ se remonte sur $\tilde{W}$ en une application holomorphe additive de $\tilde{W}$ dans E, nulle en $\tilde{z}_0$, avec:

$$\mu \circ \pi = p_1 \circ \tilde{\mu} \ . \tag{5.5}$$

L'application $p_1 \circ \tilde{\nu}$ est une application de $\mathbf{H}^*$ dans Θ nulle sur P et il existe un homomorphisme unique ν de $A(W)$ dans Θ tel que:

$$\nu \circ p = p_1 \circ \tilde{\nu} \ . \tag{5.6}$$

On en déduit d'aprés (5.3), (5.4), (5.5), (5.6):

$$\mu \circ \pi = p_1 \circ \tilde{\nu} \circ \tilde{J} = \nu \circ J \circ \pi \ ,$$

et il vient

$$\mu = \nu \circ J \ . \tag{5.7}$$

Si on considère maintenant une application holomorphe μ de W dans Θ, sans supposer que z_0 soit envoyé à l'origine de Θ, on peut composer l'application donnée avec une translation convenable de Θ et l'on se trouve ramené à la relation (5.7), où ν est maintenant une application affine de $A(W)$ dans Θ. On en déduit que J possède le *caractère universel* traduit par le théorème suivant:

Théorème. *Toute application holomorphe d'une variété kählérienne compacte W dans un tore complexe Θ est composée de manière unique de l'application de Jacobi J de W dans la variété d'Albanese $A(W)$ et d'une application affine de $A(W)$ dans Θ.*

c) Soient W_1 et W_2 deux variété kählériennes compactes, J_1 et J_2 les applications de Jacobi correspondantes. Si μ: $W_1 \to W_2$ est une application holomorphe de W_1 daus W_2, $J_2 \circ \mu$ est une application holomorphe de W_1 dans le tore complexe $A(W_2)$. D'après le théorème précédent, il existe une application affine unique $\hat{\mu}$: $A(W_1) \to A(W_2)$ telle que:

$$J_2 \circ \mu = \hat{\mu} \circ J_1 \ .$$

Si μ_{21} (resp. μ_{32}) est une application holomorphe de W_1 dans W_2 (resp. W_2 dans W_3) à l'application $\mu_{31} = \mu_{32} \circ \mu_{21}$ de W_1 dans W_3 correspond une application affine $\hat{\mu}_{31}$: $A(W_1) \to A(W_3)$ donnée par:

$$\hat{\mu}_{31} = \hat{\mu}_{32} \circ \hat{\mu}_{21} \ . \tag{5.8}$$

Prenons $W_1 = W_2 = W$ et sur g une transformation holomorphe de W. Des considérations précédentes, il résulte qu'il existe une transformation affine unique $\hat{g}$ de $A(W)$ telle que:

$$J \circ g = \hat{g} \circ J \ , \tag{5.9}$$

et l'application $g \to \hat{g}$ définit un *homomorphisme canonique* du groupe de toutes les transformations holomorphes de W dans le groupe des transformations affines de $A(W)$. Nous préciserons ce résultat au § 6 dans le cas où g est un élément du plus grand groupe *connexe* G des transformations holomorphes de W.

d) Soit $\{\beta^A\}$ (avec $\pi^*\beta^A = d\rho^A$; $A = 1, 2, \cdots, p$) une base de $\mathbf{H}$. Dans la base de $\mathbf{H}^*$ duale de $\{\beta^A\}$, $\tilde{J}$ est défini par ses composantes:

$$\tilde{z} \to \{\tilde{J}^A(\tilde{z}) = \rho^A(\tilde{z}) - \rho^A(\tilde{z}_0)\} .$$

Par dérivation nous obtenons en coordonnées locales complexes

$$(5.10) \qquad (\partial_\alpha \tilde{J}^A)(\tilde{z}) = \beta^A_\alpha(z) , \qquad (z = \pi(\tilde{z}), \partial_\alpha = \partial/\partial z^\alpha, \partial_{\bar{\beta}} = \partial/\partial z_{\bar{\beta}}) .$$

Si $X \in L$, X définit une transformation infinitésimale holomorphe $\tilde{X}$ sur $\tilde{W}$. De $i(X)\beta^A =$ const. on déduit d'après (5.10):

$$\tilde{X}^\alpha \partial_\alpha \tilde{J}^A = \text{const.} , \qquad (A = 1, 2, \cdots, p) .$$

Si $\tilde{J}_*$ (resp. J_*) sont les applications linéaires tangentes correspondant à $\tilde{J}$(resp J), on voit que $\tilde{J}_*(\tilde{X})$ définit un champ de vecteurs uniforme dans $\mathbf{H}^*$ et que $J(X)$, *où* $X \in L$, *définit un champ de vecteurs uniforme dans* $A(W)$. Pour que $X \in L$ appartienne à I, il faut et il suffit que $\tilde{J}_*(\tilde{X}) = 0$, ce qui équivaut à $J_*(X) = 0$. Ainsi, dans le cas kählérien, *l'idéal I de L peut être défini par les éléments de L dont l'image dans la variété d'Albanese par l'application de Jacobi est nulle.*

6. Le groupe G et l'application de Jacobi

a) Soit G_A le groupe des translations de $A(W)$, qui est le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de cette variété. On note L_A son algèbre de Lie qui peut être identifiée à l'algèbre commutative des champs de vecteurs uniformes de $A(W)$. On a la proposition suivante:

Proposition. *L'application de Jacobi J de W dans* $A(W)$ *définit un homomorphisme canonique* $\hat{J}$ *de G dans* G_A *tel que*:

$$(6.1) \qquad J \circ g = \hat{J}(g) \circ J .$$

En effet si $X \in L$, $J_*(X) \in L_A$. Pour tout $z \in W$, on a:

$$(6.2) \qquad J(\exp(uX)z) = \exp(uJ_*(X))J(z) .$$

Soit V un voisinage de l'identité dans G; de (6.2) on déduit que si $g \in V$ il existe $\hat{g} \in G_A$ tel que

$$J \circ g = \hat{g} \circ J .$$

Par produit d'un nombre fini d'éléments de V, on en déduit que si $g \in G$, il existe $\hat{g} \in G_A$ tel que la relation précédente soit vérifiée. Ainsi l'élément $\hat{g}$ de G_A ainsi défini est la transformation unique de $A(W)$ vérifiant (5.9). L'application $\hat{J}$: $g \in G \to \hat{g} \in G_A$ est un homomorphisme de G dans G_A vérifiant (6.1), ce qui démontre la proposition.

b) Soit Γ *le noyau* de $\hat{J}$, Γ_0 sa composante connexe de l'identité. Pour que $X \in L$ soit élément de l'algèbre de Lie de Γ, il faut et il suffit que pour tout z:

$$J(\exp(uX)z) = \exp(uJ_*(X))J(z) = J(z)$$

donc que $\exp(uJ_*(X)) = e$, c'est-à-dire que $J_*(X) = 0$. Ainsi l'algèbre de Lie de Γ coïncide avec I et Γ_0 est le sous-groupe invariant connexe de G admettant I pour algèbre de Lie. Le groupe quotient G/Γ, isomorphe à $\hat{J}(G)$ est donc de dimension complexe q.

$\tilde{L} = J_*(L)$ est une sous algèbre complexe de L_A de dimension complexe q. Soit $\tilde{G}$ le sous-groupe connexe de G_A admettant $\tilde{L}$ pour algèbre de Lie. On vérifie immédiatement que $\tilde{G} = \tilde{J}(G)$. Pour $q = p$, on a $\tilde{G} = G_A$. Pour $q < p$, on ignore sous quelles conditions $\tilde{G}$ serait fermé dans G_A. Nous serons aussi amenés à introduire le groupe $\tilde{G}_1 = G/\Gamma_0$ ainsi que la projection λ: $G \to \tilde{G}_1$ correspondante. En particulier, le groupe discret $\tilde{H} = \lambda(\Gamma) = \Gamma/\Gamma_0$ jouera un rôle important.

III. VARIÉTÉS DE HODGE

7. L'idéal *I* pour une variété de Hodge

a) On appelle *variété de Hodge* une variété compacte admettant une structure kählérienne telle que F définisse une classe de cohomologie entière. Il en est en particulier ainsi pour toute variété complexe compacte admettant un plongement holomorphe dans un espace projectif complexe $PC(N)$; c'est le cas pour une sous-variété algébrique sans singularités de $PC(N)$ (variété algébrique projective). Inversement, d'après un célèbre théorème de Kodaira, toute variété de Hodge est une *variété algébrique projective*.

b) Nous avons vu que si W est une variété complexe compacte, tout élément X de L admettant un zéro sur W appartient nécessairement à I. Il est naturel d'examiner la réciproque de cette propriété, dans le cas où W est *une variété de Hodge*, ce qui a été fait par Matsushima (voir [16]) dont nous allons analyser les résultats.

A cet effet on fait usage d'un résultat de A. Borel et du théorème suivant dû à Blanchard [2, Théorème principal I]:

Théorème de Blanchard. *W étant une variété de Hodge, considérons un plongement holomorphe de W dans un espace projectif complexe. Soit K le groupe de toutes les transformations projectives de l'espace laissant W invariante. Une telle transformation induisant une transformation holomorphe* *de W, désignons par K' le groupe des transformations holomorphes de W induites par les éléments de K. Alors il existe un plongement holomorphe de W dans un espace projectif complexe $PC(N)$ (plongement de Blanchard) tel que, pour le sous-groupe Γ de $G(\hat{J}(\Gamma) = \{e\})$, on ait:*

$$\Gamma \subset K' . \tag{7.1}$$

c) Cela posé, étudions le groupe K qui est un groupe algébrique complexe au sens de Borel et désignons par K_0 sa composante connexe de l'identité; K a un nombre fini de composantes. Soit $L(K')$ l'algèbre de Lie de K'.

D'après le théorème de point fixe de Borel, si $X \in L(K')$, *X s'annule certainement en un point au moins de W et appartient à I.* On voit que

$$L(K') \subset I .$$

Inversement pour un plongement de Blanchard, on déduit de (7.1) que $\Gamma_0 \subset K_0'$, soit en passant aux algèbres de Lie $I \subset L(K')$. On a donc $I = L(K')$ ou, en termes de groupes $\Gamma_0 = K_0'$. De plus tout élément de I étant un élément de $L(K')$ admet un zéro au moins sur W. Nous énonçons.

Théorème. *Soit W une variété de Hodge.*

1°) *Pour qu'un élément X de l'algèbre des transformation infinitésimales holomorphes appartienne à l'idéal I, il faut et il suffit que X admette au moins un zéro sur W.*

2°) *Le sous-groupe invariant connexe Γ_0 de G, d'algèbre de Lie I, coïncide avec le groupe K_0' induit par le plus grand groupe connexe K_0 de transformations projectives qui laissent W invariante dans un plongement de Blanchard.*

8. Le groupe $\tilde{H}$ pour une variété de Hodge

W étant toujours variété de Hodge, étudions le groupe $\tilde{H} = \lambda(\Gamma) = \Gamma/\Gamma_0$. Pour un plongement de Blanchard, on a $\Gamma \subset K'$ et par suite $\lambda(\Gamma) \subset \lambda(K')$. Mais comme $\Gamma_0 = K_0'$, le groupe $\lambda(K') = K'/K_0'$ est fini. Il en résulte que $\tilde{H}$ est fini, c'est-à-dire que Γ a un nombre fini de composantes connexes.

Reprenons les groupes quotients $\tilde{G} = G/\Gamma$ et $\tilde{G}_1 = G/\Gamma_0$; on a immédiatement $\tilde{G} = \tilde{G}_1/\tilde{H}$ et $\tilde{G}_1$ est un revêtement fini de $\tilde{G}$.

Proposition. *Si W est une variété de Hodge, le groupe $\tilde{H} = \Gamma/\Gamma_0$ est fini et le groupe $\tilde{G}_1 = G/\Gamma_0$ est un revêtement fini du groupe $\tilde{G} = G/\Gamma$.*

Cela posé si $q = p$ (notation du § 4), $\tilde{G}_1 = G/\Gamma_0$ est revêtement fini du groupe G_A d'après la proposition précédente. Comme G_A est une variété abélienne, il en est de même de $\tilde{G}_1$.

IV. THÉORÈMES SUR LES TENSEURS ET FORMES HOLOMORPHES

9. Cas où une classe de cohomologie de type $(1, 1)$ est ≥ 0

Nous nous proposons dans cette partie IV de rappeler brièvement certains résultats de [13] en les adaptant au but poursuivi.

Soit W une variété kählérienne compacte, γ une réelle 2-forme *fermée* sur W de type $(1, 1)$. On sait que pour que γ soit homologue à 0, il faut et il suffit qu'il existe sur W un scalaire $f > 0$ tel que:

$$\gamma = -\tfrac{1}{2} dMd \log f = id'd'' \log f \ .$$

On dit que γ est ≥ 0 (resp. ≤ 0) si le tenseur $\mathbf{C} = \mathbf{J}\gamma$ définit une forme hermitienne ≥ 0 (resp. ≤ 0) en tout point de W.

On dit qu'une classe de type $(1, 1)$ est ≥ 0 (resp. ≤ 0) s'il existe dans la classe une 2-forme ≥ 0 (resp. ≤ 0) de type $(1, 1)$. Une classe à la fois ≥ 0 et ≤ 0 est certainement nulle. Naturellement une classe de type $(1, 1)$ n'admet pas toujours un signe au sens précédent.

Nous nous intéressons particulièrement aux variétés kählériennes compactes W telles que $C_1(W)$ soit ≥ 0; f étant un scalaire > 0, posons sur W:

$$R_{\alpha\bar\beta} = C_{\alpha\bar\beta} + \partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log f \ . \tag{9.1}$$

Pour que $C_1(W)$ soit ≥ 0, il faut et il suffit qu'il existe un scalaire $f > 0$ tel que le tenseur $\mathbf{C}$ défini par (9.1) détermine une forme hermitienne ≥ 0 en tout point de W.

10. Lemme et identités relatifs aux tenseurs holomorphes

a) Soit L_1 une sous-algèbre complexe de L qui laisse invariante une $2n$-forme $K \geq 0$; on a $K = f\eta$, où f est ≥ 0. Si $X \in L_1$, K est invariant à la fois par X et $\mathcal{J}X$, ce qui se traduit par:

$$\delta'(f\xi) = 0 \ ,$$

où $\xi = \alpha(X^{1,0})$. Cette situation conduit à introduire le sous-espace complexe $U^r(f)$ de $\mathbf{T}^r$ défini par les r-tenseurs holomorphes A vérifiant

$$\delta'(f\alpha(A)) = 0 \ .$$

On a établi le lemme suivant [13]:

Lemme. *Si f est un scalaire ≥ 0 sur W:*

1°) *on a $U^r(f) \cap I^r = 0$ et par suite* $\dim_C U^r(f) \leq b_{r,0}(W)$.

2°) *Une sous-algèbre complexe L_1 de L qui laisse invariante la forme $K =$*

$f\eta \geq 0$ est telle que $L_1 \cap I = 0$ et en particulier est abélienne. Elle laisse invariant chaque élément de $U^r(f)$.

b) Associons à chaque r-forme α de type $(r, 0)$ la partie de type $(r+1, 0)$ de sa dérivée covariante

$$a(\alpha) = (\nabla\alpha)_{r+1,0} .$$

D'après (4.4) le r-tenseur A de type $(r, 0)$ est holomorphe si $a\{\alpha(A)\} = 0$. Un tenseur covariant $\mathbf{t}$ de type $(1, 1)$ étant donné, introduisons l'opérateur $Q(\mathbf{t})$ sur les formes α de type $(r, 0)$ défini localement par:

$$Q(\mathbf{t})\alpha = \frac{2}{(r-1)!} t^{\mu}_{\lambda}\alpha_{\mu\sigma_2\cdots\sigma_r} dz^{\lambda} \wedge dz^{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge dz^{\sigma_r} .$$

Cela posé, si $\mathbf{R}$ est le tenseur de Ricci de W on a [13]:

Proposition 1. *Pour toute forme α de type $(r, 0)$, on a l'identité:*

$$\langle \Delta\alpha - Q(\mathbf{R})\alpha, \alpha \rangle = 2(r+1)\langle a(\alpha), a(\alpha) \rangle .$$

Un r-tenseur A de type $(r, 0)$ est holomorphe si et seulement si $\alpha(A)$ vérifie:

$$\langle \Delta\alpha(A) - Q(\mathbf{R})\alpha(A), \alpha(A) \rangle = 0 ,$$

ou est solution de l'équation:

$$(\Delta - Q(\mathbf{R}))\alpha(A) = 0 .$$

c) Un scalaire $f > 0$ étant donné, introduisons le nouveau produit scalaire:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_f = \langle \alpha, f\beta \rangle . \tag{10.1}$$

L'opérateur δ'_f, transposé de d' par rapport à (10.1) est donné par $\alpha \to \delta'_f\alpha = f^{-1}\delta'(f\alpha)$. Si $\Delta'_f = 2(d'\delta'_f + \delta'_f d')$, désignons par $\mathbf{H}^r_f$ l'espace des formes α de type $(r, 0)$ vérifiant $\Delta'_f\alpha = 0$, c'est-à-dire telles que $d'\alpha = 0$, $\delta'_f\alpha = 0$. Si $\alpha \in \mathbf{H}^r_f$, il résulte de la décomposition complexe de G. de Rham:

$$\alpha = d'\mu + H\alpha \qquad (H\alpha \in \mathbf{H}^r) .$$

L'application $\alpha \in \mathbf{H}^r_f \to H\alpha \in \mathbf{H}^r$ définit un isomorphisme de $\mathbf{H}^r_f$ sur $\mathbf{H}^r$ et l'on a

$$\dim_C \mathbf{H}^r_f = b_{r,0}(W) .$$

On a [13] la généralisation suivante de la Proposition 1.

Proposition 2. *Si f est un scalaire > 0 sur W, on a pour toute forme α de type $(r, 0)$, l'identité:*

$$\langle \Delta'_f\alpha - Q(\mathbf{C})\alpha, f\alpha \rangle = 2(r+1)\langle a(\alpha), fa(\alpha) \rangle , \tag{10.2}$$

où **C** *est donné par* (9.1). *Un r-tenseur A de type* $(r, 0)$ *est holomorphe si et seulement si* $\alpha(A)$ *vérifie*:

$$\langle \Delta'_f \alpha(A) - Q(\mathbf{C})\alpha(A), f\alpha(A) \rangle = 0 ,$$

ou est solution de l'équation:

$$\Delta'_f \alpha(A) - Q(\mathbf{C})\alpha(A) = 0 . \tag{10.3}$$

11. Applications au cas où $C_1(W)$ est ≤ 0

a) Supposons $C_1(W) \leq 0$. Nous pouvons écrire (9.1) où **C** est ≤ 0 en tout point de W et où $f > 0$ est un scalaire convenable. En appliquant la proposition précédente, on voit que $\mathbf{T}^r$ coïncide avec $U^r(f)$. On déduit alors du lemme du § 10

Théorème. *Sur une variété kählérienne compacte W telle que* $C_1(W)$ *est* ≤ 0, *un tenseur holomorphe* $A \neq 0$ *ne peut s'annuler en aucun point de W et est invariant par le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W. De plus*:

$$\dim_C \mathbf{T}^r \leq b_{r,0}(W) .$$

En particulier G est abélien et:

$$\dim_C G \leq b_{r,0}(W) = p .$$

b) Le lemme précédent et le théorème du a s'appliquent en particulier dans un cas intéressant. Soit V une variété complexe (en général non compacte) de dimension complexe n et soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des n-formes holomorphes β de V telles que: $\left| \int_V \beta \wedge \bar{\beta} \right| < \infty$. On sait que le produit scalaire

$$\langle\!\langle \alpha, \beta \rangle\!\rangle = \varepsilon_n \int_V \alpha \wedge \bar{\beta} \qquad (\alpha, \beta \in \mathscr{H}) \tag{11.1}$$

est invariant par toute transformation holomorphe de V. Par des raisonnements classiques dûs à S. Bergman on établit que $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire (11.1) et que si $\{\beta_A\}$ $(A = 1, \cdots, \infty)$ est une base orthonormée de $\mathscr{H}$, la $2n$-forme réelle

$$K = \varepsilon_n \sum_{A=1}^{\infty} \beta_A \wedge \bar{\beta}_A$$

est indépendante du choix de la base et invariante par toute transformation holomorphe de V. Le noyau $k \geq 0$ correspondant est dit le *noyau de Bergman* de V. Nous le supposons non identiquement nul.

Soit D un groupe proprement discontinu de transformations holomorphes de V tel que V/D soit une variété complexe *compacte*, sans singularités. Nous dirons dans ce cas que D est un *groupe discontinu uniforme*. de transformations holomorphes de V. Si $p: V \to V/D$ est la projection canonique, (V, p) définit un revêtement de $V/D = W$. Le noyau k étant invariant par D est l'image inverse par p d'un noyau k' défini sur W. Si X est une transformation infinitésimale holomorphe de W, on démontre [12] que k' est invariant par X. S'il existe sur W une métrique kählérienne $\mathbf{g}$, on déduit du lemme du § 10.

Proposition 1. *Soit V une variété complexe admettant un noyau de Bergman $k \not\equiv 0$ et soit D un groupe discontinu uniforme de transformations holomorphes de V. Si $W = V/D$ admet une structure kählérienne, le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W est abélien et $\dim_R G \leq b_1(W)$.*

c) Nous dirons que la variété complexe V est *normale* si le noyau invariant k de Bergman est strictement positif sur V. S'il en est ainsi, nous pouvons introduire sur V la 2-forme réelle fermée τ de type $(1, 1)$ définie par:

$$\tau = (2\pi)^{-1} i d'd'' \log k \ .$$

Il est connu que la forme τ est ≤ 0, [9].

Une transformation infinitésimale holomorphe de V est dite *complète* si X engendre un groupe à un paramètre $\exp(uX)$ de transformations holomorphes globales de V. Si X et $\mathcal{J}X$ sont complètes, on déduit de l'invariance de k par les transformations holomorphes qu'on a $i(X)\tau = 0$, [12].

Si D est un groupe discontinu uniforme de transformations holomorphes de V, τ invariant par D est l'image inverse par p de la 2-forme de W:

$$\tau' = (2\pi)^{-1} i d'd'' \log k' \ .$$

τ est ≤ 0 et ainsi $C_1(W)$ est ≤ 0. On déduit du théorème du a:

Proposition 2. *Sous les hypothèses de la proposition 1 et si de plus V est normale, un r-tenseur holomorphe de W ne peut s'annuler en aucun point de W sans être identiquement nul et est invariant par le groupe G de W. On a:*

$$\dim_C \mathbf{T}^r \leq b_{r,0}(W) \ .$$

Si $X \in L$, il vient $i(X)\tau' = 0$.

12. Variétés kählériennes compactes avec $C_1(W) \geq 0$

a) Supposons maintenant W kählérienne compacte avec $C_1(W) \geq 0$. On peut encore écrire (9.1) où $\mathbf{C}$ est ≥ 0 en tout point de W. Si $\alpha \in \mathbf{H}^r_f$, il résulte de (10.2) que $a(\alpha) = 0$ et α correspond à un r-tenseur A holomorphe, élément de $U^r(f)$. On a:

$$\dim_C U^r(f) = \dim_C \mathbf{H}^r_f = b_{r,0}(W) \ .$$

$A \to H\alpha(A)$ définit une bijection de $U^r(f)$ sur $\mathbf{H}^r$. Il résulte du lemme du § 10 qu'une r-forme holomorphe $\beta \not\equiv 0$ ne peut s'annuler sur W. En particulier $b_{r,0}(W) \leq C_n^r$.

b) Si $A \in \mathbf{T}^r$, on a la décomposition $\alpha(A) = d'\mu + H\alpha(A)$. Mais il existe un élément $B \in U^r(f)$ et un seul tel que:

$$\alpha(B) = d'\nu + H\alpha(A) ,$$

et par suite:

$$\alpha(A) = d'(\mu - \nu) + \alpha(B) .$$

Le premier terme du second membre correspond à un élément de I^r. Comme $U^r(f) \cap I^r = 0$, on a $\mathbf{T}^r = I^r + U^r(f)$.

On a

Théorème. *Sur une variété kählérienne compacte W avec* $C_1(W) \geq 0$, *une r-forme holomorphe* $\beta \not\equiv 0$ *ne peut s'annuler en aucun point de W. Si* $f > 0$ *est le scalaire vérifiant* (9.1):

$$\mathbf{T}^r = I^r \oplus U^r(f) ,$$

où $\dim_C U^r(f) = b_{r,0}(W) \leq C_n^r$. *Un élément non nul de* $U^r(f)$ *ne peut s'annuler sur W.*

En particulier, pour l'algèbre de Lie L, on a la décomposition:

$$L = I \oplus L_1 ,$$

où L_1 *est une sous-algèbre complexe abélienne de L, de dimension complexe* $p = b_{1,0}(W) \leq n$, *qui laisse invariants la forme* $K = f\eta$ *et aussi chaque élément de* $U^r(f)$. *Un élément non nul de* L_1 *ne peut s'annuler en aucun point de W.*

On voit en particulier que si $C_1(W)$ est ≥ 0, on a $q = p$ (notations du § 6). On peut montrer que L_1 est toujours un *idéal* de L.[1]

V. FIBRATION HOLOMORPHE D'UNE VARIÉTÉ KÄHLÉRIENNE COMPACTE W A $C_1(W) \geq 0$

13. Variété d'Albanese et fibration holomorphe

a) Soit W une variété kählérienne compacte à $C_1(W) \geq 0$, $A(W)$ sa variété d'Albanese. De $q = p$ on déduit deux conséquences simples. Etudions le rang de l'application de Jacobi ou—ce qui est équivalent—le rang de l'application $\tilde{J}$ (§ 5). Si $\{\beta^A\}(A = 1, 2, \cdots, p)$ est une base de $\mathbf{H}$, on a selon (5.10)

$$\partial_\alpha \tilde{J}^A(\tilde{z}) = \beta^A_\alpha(z) \qquad (z = \pi(\tilde{z})) .$$

[1] Voir *sur les variétés kählériennes,* C. R. Acad. Sci. Paris, sous presse.

Or d'après le § 5, le rang de la matrice (β^A_α) est partout $q = p$. *Ainsi* $\tilde{J}$ *et* J *sont partout de rang* p.

D'autre part $\hat{J}$ définit un homomorphisme de G sur G_A de noyau Γ. Soit z_0 un point fixe de W. Si $\zeta \in A(W)$, il existe un élément g_A de G_A tel que $\zeta = g_A J(z_0)$. Mais $\hat{J}$ étant surjectif, il existe $g \in G$ tel que $\hat{J}(g) = g_A$. De la relation: $J \circ g = \hat{J}(g) \circ J$, on déduit que ζ est l'image de gz_0 par J. Ainsi *l'application de Jacobi, partout de rang* p, *est surjective.*

b) Introduisons le sous-groupe abélien connexe G_1 de G, de dimension complexe p, admettant L_1 pour algèbre de Lie. Nous pouvons écrire:

$$G = G_1 \cdot \Gamma_0 \tag{13.1}$$

au sens suivant: tout élément g de G peut se mettre sous la forme $g_1\gamma$, où $g_1 \in G_1$ et $\gamma \in \Gamma_0$. En effet ceci est une conséquence immédiate du théorème du § 12 si g appartient à un voisinage convenable V de l'unité de G. Si g est un élément arbitraire de G, on peut l'écrire comme le produit d'un nombre fini d'éléments de V. Par suite:

$$g = g_1^1\gamma_1 g_1^2\gamma_2 \cdots g_1^k\gamma_k = g_1^1 g_1^2 \gamma_1\gamma_2 \cdots g_1^k\gamma_k \, ,$$

où l'on a utilisé le caractère invariant de Γ_0. En poursuivant on obtient la propriété.

Il en résulte que la restriction $\hat{J}_1$ de $\hat{J}$ à G_1 est un homomorphisme de G_1 sur G_A qui est un isomorphisme local admettant pour noyau un sous-groupe abélien discret H de G_1 de telle sorte que: $G_1/H \simeq G_A$; G_A étant compact, H admet un système fini de générateurs. De (13.1) on déduit:

$$\Gamma = H \cdot \Gamma_0 \, , \tag{13.2}$$

puis que $H = G_1 \cap \Gamma$.

c) Nous avons vu que J est une application holomorphe de W sur $A(W)$ qui est partout de rang p. Si $\zeta \in A(W)$, il en résulte que $J^{-1}(\zeta)$ est une sous-variété complexe fermée de W, de dimension complexe $n - p$ et les composantes connexes de cette sous-variété sont certainement sans singularités.

D'après la théorème du § 12, un élément $X \neq 0$ de L_1 n'admet jamais de zéro sur W: Soit U un voisinage géodésiquement convexe suffisamment petit de $\zeta \in A(W)$. L'ensemble V des translations de $A(W)$ qui appliquent le point ζ sur un point de U est un voisinage de l'identité pour G_A. Désignons par $\hat{J}_1^{-1}(V)$ un voisinage de l'identité pour le groupe G_1 qui corresponde à V par l'isomorphisme local défini par $\hat{J}_1$. L'action de $\hat{J}_1^{-1}(V)$ amène chaque point de $J^{-1}(\zeta)$ dans une section holomorphe de $J^{-1}(U)$ et chaque élément de $\hat{J}_1^{-1}(V)$ applique holomorphiquement la fibre $J^{-1}(\zeta)$ sur une fibre convenable $J^{-1}(\zeta')$, où $\zeta' \in U$. Nous avons ainsi défini une application bijective holomorphe de $J^{-1}(U)$ sur $U \times J^{-1}(\zeta)$.

Il en résulte que J *définit la variété* W *comme espace fibré holomorphe sur l'espace de base* $A(W)$. Le noyau H de $\hat{J}_1$: $G_1 \to G_A$ est défini par les éléments h de G_1 tels que $J(hz) = J(z)$ pour tout $z \in W$. Ainsi $hz \in J^{-1}\{J(z)\}$ et h applique chaque fibre $J^{-1}(\zeta)(\zeta \in A(W))$ sur elle-même. De la définition de W comme espace fibré, il résulte que cet espace fibré *admet* H *pour groupe structural.*

Nous voulons maintenant montrer que les fibres qui sont des variétés compactes sont aussi connexes. Une telle fibre admet un nombre fini de composantes connexes. Si nous identifions les différents points de W appartenant à la même composante connexe d'une fibre, nous obtenons une variété complexe compacte B de dimension p, sur laquelle W est fibrée en variétés connexes et qui est elle-même, de manière naturelle, un revêtement fini de $A(W)$, donc un tore complexe. On a les applications holomorphes

$$W \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\sigma} A(W)$$

avec $\sigma \circ \mu = J$. Du caractère universel de J, on déduit qu'il existe une *application affine* ν *de* $A(W)$ *sur* B telle que: $\mu = \nu \circ J$. Il en résulte $\sigma \circ \nu \circ J = J$, et $\sigma \circ \nu$ définit l'identité sur $A(W)$. On voit que le revêtement fini défini par σ est l'identité et que $B = A(W)$.

Ainsi pour la fibration envisagée, *la fibre-type est définie par une variété kählérienne compacte, connexe* W' *de dimension* $n - p$.

d) Pour qu'un élément g de G laisse invariant chaque fibre $J^{-1}(\zeta)$ de W, il faut et il suffit que si $z \in J^{-1}(\zeta)$ on ait pour tout ζ:

$$J(gz) = \hat{J}(g)\zeta = \zeta ,$$

c'est-à-dire que $\hat{J}(g) = e$. Le noyau Γ de $\hat{J}$ peut ainsi être considéré comme le plus grand sous-groupe de G dont les éléments laissent invariants chaque fibre $J^{-1}(\zeta)$ de la fibration envisagée.

Ainsi le sous-groupe Γ *est fermé dans* G *et il en est de même de sa composante connexe* Γ_0 *de l'identité.*

e) Soit $\{z^A\}$ $(A = 1, 2, \cdots, p)$ un système de coordonnées "plates" pour le tore complexe $A(W)$. Une base des 1-formes holomorphes de $A(W)$ est définie par les $\alpha^A = dz^A$ et une base pour les 1-formes holomorphes de W est donnée par les $\beta^A = J^*\alpha^A$ $(A = 1, 2, \cdots, p)$.

Soit $\{z^a\}(a = p + 1, \cdots, n)$ un système de coordonnées locales complexes de W'. L'application bijective holomorphe $U \times W' \to J^{-1}(U)$ correspondant à la structure d'espace fibré, définit l'ensemble $\{z^A, z^a\}$ comme un système de coordonnées locales complexes de W, *adapté à la structure d'espace fibré*: pour ce choix de coordonnées, J est défini par:

$$J^A(z) = z^A \qquad (z \in J^{-1}(U)) .$$

Il en résulte $\partial_\alpha J^A = \delta^A_\alpha$. Si $X \in L_1$, on a:

$$X^A = X^\alpha \partial_\alpha J^A = J_*(X)^A \ .$$

Les composantes d'un élément $J_*(X)$ de L_A sont des constantes complexes arbitraires. Par suite si $X \in L_1$, il résulte de la remarque précédente et de la définition du système de coordonnées locales, que ses composantes vérifient:

$$X^A = C^A \ , \qquad X^a = 0 \ , \tag{13.3}$$

où les constantes complexes C^A sont arbitraires.

Si $Y \in I$, on a $J_*(Y) = 0$ et Y est tangent aux fibres. Par suite: $Y^A = 0$. Revenons maintenant à la relation (9.1), soit

$$R_{\alpha\bar\beta} = C_{\alpha\bar\beta} + \partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log f \ ,$$

où la forme hermitienne définie par $\mathbf{C}$ est ≥ 0. Si k est le noyau $f\sqrt{g}$, il vient:

$$C_{\alpha\bar\beta} = -\partial_\alpha \partial_{\bar\beta} \log k \ .$$

D'après le théorème du § 12, si X et $\mathscr{J}X$ appartiennent à L_1, ils laissent invariant le noyau k et l'on a en coordonnées locales:

$$X^\alpha \partial_\alpha \log k + \partial_\alpha X^\alpha = 0 \ .$$

Par dérivation, il en résulte $i(X)\mathbf{C} = 0$. De manière plus précise, il résulte de (13.3): $\partial_A \log k = 0$. Ainsi le noyau k dépend seulement des coordonnées locales $(z^a, z^{\bar b})$. Il vient:

$$C_{A\bar B} = 0 \ , \quad C_{A\bar b} = 0 \ , \quad C_{a\bar b} = -\partial_a \partial_{\bar b} \log k(z^c, z^{\bar d}) \ .$$

On voit qu'on peut définir la première classe de Chern de W' à partir de la restriction $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ à une fibre W' et que, par suite, $C_1(W')$ est encore ≥ 0. Nous énonçons (voir [14])

Théorème. *Soit W une variété kählérienne compacte, de dimension complexe n et d'irrégularité $p = b_{1,0}(W)$. Si la première classe de Chern $C_1(W)$ est ≥ 0:*

1°) *Le noyau $\Gamma \subset G$ de $\hat J$ et la composante connexe Γ_0 de e de Γ qui est le sous-groupe connexe de G admettant pour algèbre de Lie l'idéal I, sont des sous-groupes invariants fermés dans G.*

2°) *L'application de Jacobi J définit W comme un espace fibré holomorphe sur la variété d'Albanese $A(W)$, à groupe structural H abélien, discret. La fibre-type est une variété kählérienne W' compacte connexe, de dimension complexe $n - p$, telle que $C_1(W')$ soit ≥ 0. Si $\gamma \geq 0$ définit la première classe de Chern de W, la restriction de γ à une fibre définit la première classe de Chern de W'.*

Nous avons vu que Γ_0 et $\Gamma = H \cdot \Gamma_0$ sont fermés dans G. Il en résulte que *le groupe $\tilde H = \lambda(\Gamma) = \lambda(H)$ est fermé dans le groupe $\tilde G_1 = \lambda(G)$.*

D'après $G = G_1 \cdot \Gamma_0$ la restriction λ_1 de λ à G_1 définit un homomorphisme de G_1 sur $\tilde{G}_1 = \lambda(G) = \lambda(G_1)$. Le noyau de cet homomorphisme est le groupe $N = G_1 \cap \Gamma_0$, qui peut s'écrire aussi $N = H \cap \Gamma_0$. N est discret, de telle sorte que (G_1, λ_1) est un revêtement de $\tilde{G}_1$.

On notera que $\tilde{H} = \lambda(H) = \lambda_1(H)$ est isomorphe à H/N. Par suite G_1/H est isomorphe à $\tilde{G}_1/\tilde{H}$, lui-même isomorphe à G_A.

f) On a le lemme suivant qui nous sera utile.

Lemme. *Soit W une variété kählérienne compacte à $C_1(W) \geq 0$. Si $Y \in I$, la restriction de Y à une fibre $J^{-1}(\zeta_0)$ définit un élément Y' de l'idéal I' de l'algèbre L' des transformations infinitésimales holomorphes de W'.*

$\exp(uY) \subset \Gamma$ laisse invariant chaque fibre de la fibration introduite. Considérons une fibre déterminée $J^{-1}(\zeta_0)$ identifiée à la fibre-type W'; si $Y \in I$, la 1-forme $\xi = \alpha(Y^{1,0})$ est d'-homologue à 0 sur W: $\xi = d'\rho$.

En coordonnées privilègiées (z^A, z^a), on a:

$$\xi_A = g_{A\bar{b}} Y^{\bar{b}} = \partial_A \rho , \qquad \xi_a = g_{a\bar{b}} Y^{\bar{b}} = \partial_a \rho .$$

La restriction de Y à $J^{-1}(\zeta_0)$ définit un élément de L$'$ pour lequel la 1-forme associée ξ' est donnée localement par:

$$\xi'_a = (g_{a\bar{b}} Y^{\bar{b}})(z_0^A, z_0^{\bar{A}}, z^c, z^{\bar{c}}) ,$$

donc est telle que $\xi' = d'\rho'$, où ρ' est la restriction de ρ à $J^{-1}(\zeta_0)$. Ainsi ξ' est d'-homologue à 0 sur W' et Y' appartient à I'.

14. Variété kählérienne compacte à tenseur de Ricci ≥ 0

a) Soit W une variété kählérienne compacte admettant un tenseur de Ricci $R_{\alpha\bar{\beta}}$ $(\alpha, \beta = 1, \cdots, n)$ définissant une forme hermitienne ≥ 0 en tout point de W. La théorie des deux § 12 et § 13 s'applique ici avec $f = 1$ ce qui entraîne des conséquences plus précises. Si $A \in U^r(1)$ on a $\delta'\alpha(A) = 0$. Comme $d'\alpha(A) = 0$, la forme $\alpha(A)$ de type $(r, 0)$ est harmonique, donc holomorphe. On en déduit:

$$\{\nabla\alpha(A)\}_{r+1,0} = 0 , \qquad \{\nabla\alpha(A)\}_{r,1} = 0 ,$$

et $\alpha(A)$ est à dérivée covariante nulle dans la connexion kählérienne de W. D'après le théorème du § 12, nous pouvons énoncer:

Proposition. *Sur une variété kählérienne compacte W admettant un tenseur de Ricci $\mathbf{R} \geq 0$, toute r-forme holomorphe est à dérivée covariante nulle. Si $U^r(1)$ est l'espace des r-tenseurs de type $(r, 0)$ à dérivée covariante nulle*:

$$\mathbf{T}^r = I^r \oplus U^r(1) ,$$

où $\dim_c U^r(1) = b_{r,0}(W)$.

En particulier, pour l'algèbre de Lie L, on a la décomposition:

$$L = I \oplus L_1 ,$$

où L_1 est la sous-algèbre complexe abélienne de L, de dimension complexe $p = b_{1,0}(W)$, définie *par les champs de vecteurs à dérivée covariante nulle*. En particulier le groupe G_1 est un *groupe d'isométries* de W.

Le plus grand groupe connexe G_i d'isométries de W est un sous-groupe compact de G et l'on a:

$$\lambda(G_i) \subset \lambda(G) = \tilde{G}_1 ,$$

G_1 étant un groupe connexe d'isométries, on a $G_1 \subset G_i$ et il vient:

$$\lambda(G_1) = \lambda(G) = \tilde{G}_1 \subset \lambda(G_i) .$$

Ainsi $\tilde{G}_1 = \lambda(G_i)$; Γ_0 étant fermé dans G, le groupe $\lambda(G_i) = \tilde{G}_1$ est compact. Le groupe $\bar{H}$ discret et fermé dans $\tilde{G}_1$ compact, est compact donc *fini*.

b) Reprenons un système de coordonnées locales complexes (z^A, z^a) $(A, B = 1, 2, \cdots, p; a, b = p+1, \cdots n)$ adapté à la fibration de W comme au § 13. Si $X \in L_1$, ses composantes sont $X^A = C^A$, $X^a = 0$, où les C^A sont des constantes complexes arbitraires. La 1-forme holomorphe correspondante $\xi = \alpha(X^{1,0})$ admet les composantes:

$$\xi_A = g_{A\bar{B}} C^{\bar{B}} = \text{const.} , \qquad \xi_a = g_{a\bar{B}} C^{\bar{B}} = 0 .$$

Il en résulte:

$$g_{A\bar{B}} = \text{const.} , \qquad g_{a\bar{B}} = 0 \quad (\text{ou } g_{aB} = 0) .$$

La métrique de W étant kählérienne, il vient:

$$\partial_B g_{a\bar{b}} = \partial_a g_{B\bar{b}} = 0 , \qquad \partial_{\bar{B}} g_{a\bar{b}} = \partial_{\bar{b}} g_{a\bar{B}} = 0 .$$

La métrique est réductible et peut s'écrire dans les coordonnées privilégiées choisies:

$$ds^2 = 2g_{A\bar{B}} dz^A dz^{\bar{B}} + 2g_{a\bar{b}} dz^a dz^{\bar{b}} , \tag{14.1}$$

où les $g_{A\bar{B}}$ sont les constantes et où les $g_{a\bar{b}}$ ne dépendent que des coordonnées $(z^c, z^{\bar{c}})$. Le noyau $k = \sqrt{g}$ ne dépend que de ces coordonnées et:

$$R_{A\bar{B}} = 0 , \quad R_{a\bar{B}} = 0 , \quad R_{a\bar{b}} = -\partial_a \partial_{\bar{b}} \log \sqrt{g} .$$

La restriction à une fibre $J^{-1}(\zeta)$ du tenseur de Ricci de W n'est autre que le tenseur de Ricci de cette fibre et est ≥ 0. Ainsi *la fibre-type W' jouit de la même propriété que la variété initiale W.*

Si $Y \in I$, les composantes de Y ne dépendent que des coordonnées (z^b). En effet ∇Y appartient en chaque point à l'espace de tenseurs de type (1,1) en gendré par l'algèbra d'holonomie et $\nabla_A Y^a = 0$. Si $X \in L_1$, on a:

$$[Y, X]^a = Y^\alpha \nabla_\alpha X^a - X^\alpha \nabla_\alpha Y^a = -X^A \nabla_A Y^a = 0 ,$$

et L_1 est un idéal de l'algèbre L. Nous pouvons ainsi compléter le théorème du § 13 de la manière suivante:

Théoréme. *Soit W une variété kählérienne compacte admettant un tenseur de Ricci* $\mathbf{R} \geq 0$. *La fibration mise en évidence au* § 13 *pour les variétés telles que* $C_1(W) \geq 0$ *jouit alors des proprétés suivantes*:

1°) *Le groupe G_1 appartient au centre du groupe G.*

2°) *Le groupe $\tilde{H} = \Gamma / \Gamma_0$ est fini.*

3°) *La fibre-type W' est aussi à tenseur de Ricci* ≥ 0.

15. Variétés kählériennes compactes à $C_1(W) \geq 0$, telles que $d'(\mathrm{Tr\,R})$ définisse une transformation infinitésimale holomorphe

Etant donnée une variété kählérienne W, soit $\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}$ sa courbure scalaire. Nous n'envisageons ici que des variétés kählériennes compactes pour lesquelles la 1-forme $d'(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R})$ est associée à une transformation infinitésimale holomorphe. Nous posons donc $d'(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}) = \alpha(Z^{1,0})$, où Z définit une transformation infinitésimale holomorphe qui admet nécessairement un zéro sur W, donc appartient à I. On sait (voir [11]) que $Md'(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R})$ est une 1-forme associée à une isométrie infinitésimale.

a) Nous nous proposons d'abord d'établir le lemme suivant:

Lemme. *Soit W une variété kählérienne compacte telle que la* 1*-forme* $d'(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R})$ *soit associée à une transformation infinitésimale holomorphe*:

1°) *Pour toute r-forme holomorphe* β: $\delta' Q(\mathbf{R})\beta = 0$.

2°) *Pour tout r-tenseur holomorphe* A, $\alpha(A)$ *admet la décomposition*:

$$\alpha(A) = d'\mu + H\alpha(A) \qquad (H\alpha(A) \in \mathbf{H}^r) ,$$

où $H\alpha(A)$ est à dérivée covariante nulle

En effet si $\beta \in \mathbf{H}^r$, on a par un calcul direct (voir [13])

$$\delta' Q(\mathbf{R})\beta = -i(Z^{1,0})\beta ,$$

où le second membre est une $(r-1)$ forme holomorphe. Le premier membre étant δ'-cohomologue à 0, il vient

$$\delta' Q(\mathbf{R})\beta = 0 .$$

Si $A \in \mathbf{T}^r$, la r-forme associée $\alpha(A) = d'\mu + H\alpha(A)$ vérifie, d'après la proposition 1 du § 10:

$$\Delta\alpha(A)\_Q(\mathbf{R})\alpha(A) = 0 \; .$$

On en déduit:

$$\langle \Delta d'\mu - Q(\mathbf{R})d'\mu, d'\mu\rangle = -\langle \Delta H\alpha(A) - Q(\mathbf{R})H\alpha(A), d'\mu\rangle$$
$$= \langle Q(\mathbf{R})H\alpha(A), d'\mu\rangle \; ,$$

soit

$$\langle \Delta d'\mu - Q(\mathbf{R})d'\mu, d'\mu\rangle = \langle \delta' Q(\mathbf{R})H\alpha(A), \mu\rangle = 0 \; .$$

Il résulte de la même proposition que $d'\mu$ et par suite $H\alpha(A)$ sont associées à des transformations infinitésimales holomorphes. On en déduit que $H\alpha(A)$ est à dérivée covariante nulle

b) *Si en outre* $q = p$ (notations du § 6), l'algèbre de Lie L admet une décomposition

$$L = I \oplus L_2 \; ,$$

où L_2 est une sous-algèbre complexe abélienne de L, de dimension complexe p, dont les éléments sont les vecteurs à dérivée covariante nulle.

Les raisonnements du § 13 demeurent valables en substituant systématiquement au groupe G_1 le sous groupe connexe G_2 de G d'algèbre L_2. Ainsi le noyau Γ de $\hat{J}$ et sa composante connexe Γ_0 de e sont fermés dans G. L'application J définit W comme espace fibré holomorphe sur $A(W)$, à groupe structural H abélien, discret. La fibre-type est une variété kählérienne W' compacte, connexe, de dimension complexe $n-p$, que nous allons étudier. Le raisonnement du § 14.b établit que la métrique de W est réductible et qu'avec des notation évidentes, on a en coordonnées privilégiées:

$$ds^2 = 2g_{A\bar{B}}dz^A dz^{\bar{B}} + 2g_{a\bar{b}}dz^a dz^{\bar{b}} \; , \tag{15.1}$$

où les $g_{A\bar{B}}$ sont des constantes et où les $g_{a\bar{b}}$ ne dépendent que des coordonnées $(z^c, z^{\bar{c}})$. Le scalaire de courbure $\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}$ de W en z vaut:

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{R} = 2g^{a\bar{b}}R_{a\bar{b}} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{R}' \; ,$$

où $\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}'$ est le scalaire de courbure en z de la fibre de z. La 1-forme $d'(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R})$ est associée à l'élément de I tangent à la fibre, de composantes:

$$Z^A = 0 \; , \qquad Z^a = g^{a\bar{b}}\partial_{\bar{b}}(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}) = g^{a\bar{b}}\partial_{\bar{b}}(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}')$$

dont la restriction à la fibre définit une transformation infinitésimale holomorphe de celle-ci.

Le raisonnement du § 14 monte que G_2 appartient au centre de G et que $\tilde{H}$ est fini.

Si $C_1(W) \geq 0$, on a $q = p$ et l'on sait qu'il en est de même pour fibretype W' de la fibration. Nous pouvons énoncer:

Théorème. *Soit W une variété kählérienne compacte à $C_1(W) \geq 0$ telle que la 1-forme $d'(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R})$ soit associée à une transformation infinitésimale holomorphe de W. Soit G_2 le sous-groupe connexe de G admettant pour algèbre celle L_2 définie par les champs de vecteurs à dérivée covariante nulle. La fibration $J = W \to A(W)$ mise en évidence au § 13 jouit alors en outre des propriétés suivantes:*

1°) *Le groupe G_2 appartient au centre de G.*

2°) *Le groupe $\tilde{H} = \Gamma / \Gamma_0$ est fini.*

3°) *La fibre-type W', à $C_1(W') \geq 0$, est aussi telle que sa 1-forme $d'(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}')$ soit associée à une transformation infinitésimale holomorphe de W.*

En outre si $U^r(1)$ est l'espace des r-tenseurs de type $(r, 0)$ à dérivée covariante nulle

$$\mathbf{T}^r = I^r \oplus U^r(1) ,$$

où $\dim_c U^r(1) = b_{r,0}(W)$.

c) En particulier si $\mathrm{Tr}\,\mathbf{R} = \text{const.}$ sur W, on a $\mathrm{Tr}\,\mathbf{R}' = \text{const.}$ sur W'. Dans ce cas, on sait (voir [14]) que l'algèbre L est donnée par la somme (non directe)

$$L = L_i + \mathscr{J} L_i ,$$

où L_i est l'algèbre des isométries infinitésimales et où $L_2 = L_i \cap \mathscr{J} L_i$.

16. Variétés kählériennes compactes à $C_1(W) \geq 0$ et $\tilde{H}$ fini

a) Soit W une variété kählérienne compacte à $C_1(W) \geq 0$ et considérons la fibration J: $W \to A(W)$ mise en évidence au § 13. La fibre-type W' étant à $C_1(W') \geq 0$, son irrégularité p' vérifie:

$$p' \leq \dim_c W' = n - p .$$

Si p' est $\neq 0$, il existe une fibration J': $W' \to A(W')$ de W' sur sa variété d'Albanese dont la fibre-type W'' est toujours à $C_1(W'') \geq 0$.

Cela posé, chaque fibre de W étant elle-même fibrée en fibres W'', identifions les points de W appartenant à une même fibre de cette fibration en fibres W''. On obtient ainsi une variété complexe compacte U telle que W est fibré holomorphiquement sur U par des fibres de fibre-type W'', tandis que U est fibré holomorphiquement sur $A(W)$ par des fibres de fibre-type $A(W')$. On a les applications holomorphes:

$$W \xrightarrow{\mu} U \xrightarrow{\sigma} A(W) \qquad (\sigma \circ \mu = J) .$$

Le groupe structural de la fibration J: $W \to A(W)$ est H. Etudions le groupe structural de la fibration σ: $U \to A(W)$. Si $Y \in I$, la restriction Y' de Y à une fibre W' vèrifie $J'_*(Y') = 0$, d'après le lemme du § 13. Or I est l'algèbre de Lie de Γ_0; le noyau $N = H \cap \Gamma_0$ opère ainsi naturellement sur W' en préservant ses fibres et $\hat{J}'(N) = \{e\}$. L'action de N par $\hat{J}'$ sur $A(W')$ est réduite à l'identité et le groupe structural de la fibration σ: $U \to A(W)$ en tores $A(W')$ est le groupe quotient $\tilde{H} = H/N$

b) *Supposons $\tilde{H}$ fini* et soit $\tilde{A}(W)$ le fibré principal sur $A(W)$ associé au fibré $U \to A(W)$; $\tilde{A}(W)$ admet $\tilde{H}$ pour fibre et est donc un tore complexe. Sur le produit $U^{(1)} = A(W') \times \tilde{A}(W)$, $\tilde{H}$ opère à droite de la manière suivante: un élément $h \in \tilde{H}$ applique le point $(\zeta', v) \in A(W') \times \tilde{A}(W)$ sur le point $(h^{-1}\zeta', vh)$ et U peut être identifié au quotient de $U^{(1)}$ par l'action de $\tilde{H}$, le diagramme suivant étant commutatif

$$\begin{tikzcd} U^{(1)} \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d, "\sigma"] \\ \tilde{A}(W) \arrow[r] & A(W) \end{tikzcd}$$

où $U^{(1)}$ est un tore complexe de dimension $(p + p')$.

Considérons le fibré principal $U^{(1)} \to U$ de groupe structural $\tilde{H}$. Soit $\mu^{-1}U^{(1)}$ le fibré sur W induit du fibré précédent par μ: $W \to U$. On obtient un revêtement fini $W^{(1)}$ de W fibré sur $U^{(1)}$ par l'application holomorphe $\mu^{(1)}$: $W^{(1)} \to U^{(1)}$ conformément au diagramme

$$\begin{tikzcd} W^{(1)} \arrow[r, "\mu^{(1)}"] \arrow[d] & U^{(1)} \arrow[d] \\ W \arrow[r, "\mu"] & U \end{tikzcd}$$

La variété $W^{(1)}$, munie de la métrique image réciproque de celle de W, est encore une variété kählérienne compacte à première classe de Chern $C_1(W^{(1)}) \geq 0$. L'image réciproque dans $W^{(1)}$ des 1-formes holomorphes de $U^{(1)}$ donne un espace de dimension complexe $(p + p')$ de 1-forme holomorphes de $W^{(1)}$. Ainsi si $A(W^{(1)})$ est la variété d'Albanese de $W^{(1)}$, on a:

$$\dim_c A(W^{(1)}) \geq p + p' .$$

c) Supposons que la variété kählérienne W initiale à $C_1(W) \geq 0$ vérifie l'une des trois hypothèses suivantes:

1°) W est variété de Hodge (§ 8),

2°) le tenseur de Ricci de W est ≥ 0 (§ 14),

3°) la 1-forme $d'(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R})$ de W définit une transformation infinitésimale holomorphe (§ 15), qui toutes entraînent que *le groupe $\tilde{H}$ est fini.* S'il en est ainsi, il est clair que $W^{(1)}$, revêtement fini de W, vérifie la même hypothèse et nous avons vu qu'il en est de même pour les fibres W', donc pour les fibres W''.

Nous pouvons alors poursuivre l'opération du b à partir de la fibration $W^{(1)} \to A(W^{(1)})$ dont les fibres satisfaisant à la même hypothèse que W, sont de dimension complexe $\leq n - (p + p')$. Au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtient une fibre-type d'irrégularité nulle (qui peut être de dimension nulle).

Nous aboutissons ainsi au théorème suivant:

Théorème. *Soit W une variété kählérienne compacte à première classe de Chern $C_1(W) \geq 0$ vérifiant l'une des trois hypothèses suivantes*:

1°) *W est variété de Hodge.*

2°) *Le tenseur de Ricci de W est ≥ 0.*

3°) *La 1-forme $d'(\mathrm{Tr}\,\mathbf{R})$ de W définit une transformation infinitésimale holomorphe.*

Il existe alors un revêtement fini V de W fibré holomorphiquement sur $A(V)$ en variétés kählériennes compactes connexes F, à $C_1(F) \geq 0$ et à irrégularité $b_{1,0}(F) = 0$ vérifiant la même hypothèse. Le groupe relatif de revêtement est résoluble.

Cette dernière remarque tient au fait que, chaque $\tilde{H}$ étant fini abélien, le groupe de revêtement admet une suite normale de groupes finis abéliens.

VI. APPLICATIONS HARMONIQUES ET ISOMETRIES POUR DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES COMPACTES

17. L'idéal I_i pour une variété riemannienne

a) Soit $(W, \mathbf{g})$ une variété riemannienne connexe, *compacte*, orientée, de dimension réelle n, de tenseur métrique $\mathbf{g}$, d'élément de volume $\eta(\mathbf{g})$. En coordonnées locales, on peut écrire:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \qquad (i, j = 1, \cdots, n) .$$

Une r-forme est ici une forme différentielle extérieure *réelle* d'ordre r. Si (α, β) représente le produit intérieur de deux r-formes, $\langle\alpha, \beta\rangle$ est le produit scalaire global:

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \int_W (\alpha, \beta)\eta(\mathbf{g}) \ . \tag{17.1}$$

Nous notons encore δ l'opérateur de codifférentiation extérieure, c'est-à-dire le transposé de d par rapport au produit scalaire (17.1). La dualité définie par la métrique détermine un isomorphisme $\alpha: X \to \xi = \alpha(X)$ du module des champs de vecteurs X de W sur le module des 1-formes ξ.

Soit G_i le plus grand groupe connexe des *isométries* de $(W, \mathbf{g})$. C'est un groupe de Lie compact dont nous désignons par L_i l'algèbre de Lie. Celle-ci peut être identifiée à *l'algèbre des isométries infinitésimales*. Pour que $X \in L_i$, il faut et il suffit que la dérivée covariante $\nabla \cdot \alpha(X)$ soit antisymétrique (∇ opérateur de dérivation covariante riemannienne), c'est-à-dire soit une 2-forme. Il en résulte en particulier que $\xi = \alpha(X)$ est nécessairement cofermée ($\delta\xi = 0$).

Nous désignons par $\mathbf{H}$ l'espace des 1-formes harmoniques de $(W, \mathbf{g})$ de dimension $p = b_1(W)$. On sait que toute forme harmonique est invariante par l'algèbre de Lie L_i. Si $X \in L_i$ et $\beta \in \mathbf{H}$ il en résulte:

$$i(X)\beta = \text{const.}$$

Nous somme conduits à introduire le sous-espace I_i de L_i défini par les éléments X tels que:

$$i(X)\beta = 0$$

pour toute 1-*forme harmonique* β. Si $X, Y \in L_i$, on déduit d'un calcul identique à celui du § 2, b, que pour tout $\beta \in \mathbf{H}$

$$i([X, Y])\beta = 0 \ .$$

En effet localement:

$$i([X, Y])\beta = X^i \nabla_i (Y^j \beta_j) - Y^i \nabla_i (X^j \beta_j) - X^i Y^j (\nabla_i \beta_j - \nabla_j \beta_i) \ ,$$

où chacun des trois termes du second membre est nul.

Par suite si $L'_i = [L_i, L_i]$ est l'idéal dérivé de L_i, on a $L'_i \subset I_i$ et I_i *est un idéal de* L_i *tel que* L_i/I_i *soit abélien*. Tout élément X de L_i admettant un zéro sur W appartient nécessairement à I_i ([15]c).

b) Soit X un élément de L_i; la 1-forme $\xi = \alpha(X)$ étant cofermée admet la décomposition de G. de Rham:

$$\xi = \delta\lambda + H\xi \qquad (H\xi \in \mathbf{H}) \ , \tag{17.3}$$

où λ est une 2-forme et $H\xi$ la partie harmonique de ξ. Introduisons le scalaire constant:

$$k(X) = i(X)H\xi = (\xi, H\xi) \ .$$

On deduit de (17.3):

$$\langle H\xi, H\xi \rangle = \langle \xi, H\xi \rangle = k(X) \int_W \eta(\mathbf{g}) \ .$$

Par suite, pour que $X \in I_i$, il faut et il suffit que $k(X) = 0$ ou que $\alpha(X)$ *soit cohomologue à* 0.

c) Soit $\mathbf{H}_{(0)}$ le sous-espace de $\mathbf{H}$ defini par les 1-formes harmoniques β telles que $i(X)\beta = 0$ pour tout $X \in L_i$.
On a:

$$(17.4) \qquad q = \dim L_i - \dim I_i = \dim \mathbf{H} - \dim \mathbf{H}_{(0)} \qquad (q \leq p) .$$

L'image de L_i par l'application linéaire $X \in L_i \to H\alpha(X) \in \mathbf{H}$ est un sous-espace vectoriel Q de $\mathbf{H}$ de dimension q. Si $\beta \not\equiv 0$ appartient à Q, il existe $X \in L_i$ tel que $\beta = H\alpha(X)$ et l'on a $i(X)\beta \neq 0$. Par suite *aucune forme de Q ne peut s'annuler sur W sans* être *identiquement nulle.*

Soit $\{\beta^A\}(A = 1, \cdots, q)$ une base de Q. De la propriété précédente, il résulte comme au § 4 que les $\beta^A(x)$ sont linéairement indépendants en tout point x de W et qu'on a, en particulier, $q \leq n$.

18. Notion d'application harmonique ([7], [15]a)

a) Soit $(W, \mathbf{g})$ une variété riemannienne orientée, compacte ou non, de dimension n, et $(W', \mathbf{g}')$ une seconde variété riemannienne de dimension m. Localement, on peut écrire respectivement pour W et W':

$$ds^2 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \qquad (i, j = 1, \cdots, n) ,$$

et

$$ds'^2 = g'_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, m) .$$

Soit $\mu: W \to W'$ une application différentiable de classe C^2. Si $T(W')$ est le fibré vectoriel tangent relatif à W', nous introduisons le fibré vectoriel $F = \mu^{-1}T(W') \to W$ induit par μ, ainsi que les tenseurs sur W à valeurs dans F. Si Φ est un tel tenseur, on peut le représenter sur un ouvert U de W par:

$$\Phi_U = \{\Phi^\alpha_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_r}\}$$

et il existe pour tout $x \in W$ un produit scalaire naturel en x qui peut s'exprimer pour $x \in U$ par:

$$(\Phi, \Psi)_x = \frac{1}{r!} \Phi^\alpha_{i_1 \cdots i_r}(x) \Psi^\beta_{j_1 \cdots j_r} g^{i_1 j_1}(x) \cdots g^{i_r j_r}(x) g'_{\alpha\beta}(\mu(x)) .$$

Si l'intersection des supports de Φ et Ψ est compacte, on en déduit, pour de tels tenseurs, le produit scalaire global

$$(18.1) \qquad \langle \Phi, \Psi \rangle = \int_W (\Phi, \Psi) \eta(\mathbf{g}) .$$

La différentielle de μ définit une 1-forme sur W à valeurs dans F, notée μ_*. Sur U:

$$(\mu_*)_U = \{\mu_i^\alpha dx^i\} \ .$$

b) Sur F existe une connexion naturelle π déduite de la connexion riemannienne de $(W', \mathbf{g}')$. Sur U les 1-formes de connexion peuvent s'écrire:

$$\pi_U = \{\pi^\alpha_{\beta i} dx^i\} \quad \text{avec} \quad \pi^\alpha_{\beta i} = \Gamma'^\alpha_{\beta\gamma}\mu_i{}^\gamma \ ,$$

où les $\Gamma'^\alpha_{\beta\gamma}$ sont les coefficients de la connexion riemannienne de $(W', \mathbf{g}')$ pour les coordonnées locales de $\mu(U)$. Le tenseur de courbure Π de π se déduit du tenseur de courbure de $(W', \mathbf{g}')$ par

$$\Pi^\alpha_{\beta,ij} = R'^\alpha{}_{\beta,\gamma\delta}\mu_i{}^\gamma \mu_j{}^\delta \ .$$

Sur les tenseurs de W à valeurs dans F, on peut introduire l'opérateur $\bar{\nabla}$ de dérivation covariante, défini au dessus de U par la formule:

$$(\bar{\nabla}\Phi)_U = \nabla\Phi_U + \pi_U \otimes \Phi_U \ , \tag{18.2}$$

où, au dernier terme du second membre, figure une contraction. En même temps que les tenseurs à valeurs dans F, on peut envisager les tenseurs à valeurs dans $\otimes^r F$. La formule (18.2) s'étend de manière évidente à de tels tenseurs. La métrique $\mathbf{g}'$ définit au moyen de μ une métrique sur les fibres de F. L'opérateur $\bar{\nabla}$ est "riemannien" par rapport à cette métrique, en ce sens que le tenseur correspondant est à dérivée covariante nulle.

Si Φ est une r-forme sur W à valeurs dans F, on définit par antisymétrisation de (18.2) un opérateur $\bar{d}$ sur de telles formes (où $\bar{d}^2$ est lié à la courbure Π) tel qu'au dessus de U:

$$(\bar{d}\Phi)_U = d\Phi_U + \pi_U \wedge \Phi_U \ . \tag{18.3}$$

Pour de telles formes, nous notons $\bar{\delta}$ l'opération transposé de $\bar{d}$ par rapport au produit scalaire (18.1) et introduisons le laplacien $\bar{\Delta} = \bar{d}\bar{\delta} + \bar{\delta}\bar{d}$. On a sur U:

$$(\bar{\delta}\Phi)^\alpha_{i_2\cdots i_r} = -\bar{\nabla}^j\Phi^\alpha_{ji_2\cdots i_r} \ . \tag{18.4}$$

On en déduit par un calcul direct que, pour une 1-forme Φ à valeurs dans F,

$$(\bar{\Delta}\Phi))^\alpha_i = -\bar{\nabla}^j\bar{\nabla}_j\Phi^\alpha_i + R_i{}^j\Phi^\alpha_j - R'^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\mu_i{}^\gamma\mu_j{}^\delta\Phi^{\beta j} \ , \tag{18.5}$$

où R_{ij} est le tenseur de Ricci de $(W, \mathbf{g})$

c) Pour toute application $\mu: W \to W'$ de classe C^2, on a identiquement $\bar{d}\mu_* = 0$. Supposons un instant W compacte et à l'application μ, associons l'intégrale positive:

$$E(\mu) = \int_W (\mathbf{g}, \mu^*\mathbf{g}')\eta(\mathbf{g}) = \tfrac{1}{2} \int_W (\mu_*, \mu_*(\eta(\mathbf{g}) \ .$$

Pour que μ soit extrémale de cette intégrale, il faut et il suffit que soient satisfaites les équations d'Euler correspondantes qui peuvent s'écrire:

$$\bar{\delta}\mu_* = 0 \ , \tag{18.6}$$

W étant supposée *compacte ou non*, nous dirons qu'une application différentiable $\mu\colon W \to W'$ de classe C^2 est *harmonique pour* $(W, \mathbf{g})$ *et* $(W', \mathbf{g}')$ si elle vérifie (18.6).

Dans le cas particulier où W est *compacte*, il résulte de $\bar{d}\mu_* = 0$ et de l'expression de $\bar{\Delta}$ que pour que μ soit harmonique, il faut et il suffit que l'on ait $\bar{\Delta}\mu_* = 0$. Par une étude fine d'analyse, Eells et Sampson [7] ont établi différents théorèmes d'existence dont le théorème suivant.

Théorème de Eells-Sampson. *Si* $(W, \mathbf{g})$ *et* $(W', \mathbf{g}')$ *sont compactes et si* $(W', \mathbf{g}')$ *est à courbure sectionnelle non positive, toute application continue* $\mu\colon W \to W'$ *est homotope à une application harmonique de* $(W, \mathbf{g})$ *dans* $(W', \mathbf{g}')$.

d) Supposons W et W' compactes ou non. Une application différentiable $\mu\colon W \to W'$ est dire *totalement géodésique* si $\bar{\nabla}\mu_* = 0$. S'il en est ainsi, l'image par μ d'un arc géodésique de $(W, \mathbf{g})$ est un arc géodésique de $(W', \mathbf{g}')$. On démontre aisément qu'une telle application est de rang constant sur W. D'après (18.4), $\bar{\nabla}\mu_* = 0$ implique $\bar{\delta}\mu_* = 0$; par suite toute application totalement géodésique est harmonique. On note que toute isométrie d'une variété riemannienne sur elle même est harmonique.

On établit aussi aisément que si W et W' sont des variétés complexes admettant des métriques kählériennes $\mathbf{g}$ et $\mathbf{g}'$, *toute application holomorphe* $\mu\colon W \to W'$ *est harmonique pour les variétés kählériennes* $(W, \mathbf{g})$ *et* $(W', \mathbf{g}')$. Ceci va nous amener à substituer à l'étude des applications holomorphes d'une variété kählérienne compacte dans un tore complexe, l'étude des applications harmoniques d'une variété riemannienne compacte dans un tore réel muni de sa métrique plate naturelle.

Supposons $(W', \mathbf{g}')$ *à courbure nulle.* On sait qu'il existe des recouvrements de W' par des domaines de systèmes de coordonnées locales tels que sur chaque domaine, les coefficients de la connexion riemannienne de $(W', \mathbf{g}')$ soient nuls. En adoptant de telles coordonnées sur W', on a localement sur un ouvert convenable U de W:

$$(\bar{\delta}\mu_*)^\alpha_U = -\nabla^i \mu_i{}^\alpha = -g^{ij}\nabla_i \nabla_j \mu^\alpha \ .$$

Pour que $\mu\colon W \to W'$ soit harmonique, il faut et il suffit dans ce cas que les composantes locales μ^α de μ soient des *fonctions harmoniques* pour la métrique $\mathbf{g}$.

19. Le tore canonique et l'application J

Donnons-nous une *variété riemannienne compacte* $(W, \mathbf{g})$ de premier nombre de Betti $p = b_1(W)$.

a) Soit $(\tilde{W}, \pi)$ le revêtement universel de W considéré comme réalisé au moyen des chemins de W issus d'un point fixe x_0; $\tilde{x}_0 \in \tilde{W}$ correspond au chemin nul. Nous munissons $\tilde{W}$ de la métrique $\pi^*\mathbf{g}$. Soit s l'automorphisme de $(\tilde{W}, \pi^*\mathbf{g})$ correspondant à un élément du groupe fondamental $\pi_1(W)$. Une *fonction harmonique* u sur $\tilde{W}$, à valeurs dans un espace vectoriel réel E, est dite *additive* si:

$$u(s\tilde{x}) - u(\tilde{x}) = \varphi(s) ,$$

où $\varphi(s)$ definit une représentation de $\pi_1(W)$ dans E. Si $\beta \in \mathbf{H}$, on a $\pi^*\beta = du$, où u est une fonction harmonique additive sur $\tilde{W}$, à valeurs réelles. En effet de $\delta\beta = 0$, on déduit $\delta du = 0$; d'autre part:

$$u(s\tilde{x}) - u(\tilde{x}) = \int_{C^1} \beta \qquad (\pi^*\beta = du) ,$$

où C^1 est le cycle défini par $\tilde{x}^{-1} \cdot s\tilde{x}$.

Soit $\mathbf{H}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathbf{H}$, supposé muni d'une métrique plate naturelle. A tout point $\tilde{x} \in \tilde{W}$ correspond par la différence $u(\tilde{x}) - u(\tilde{x}_0)$ (avec $\pi^*\beta = du$) une forme linéaire sur $\mathbf{H}$, c'est-à-dire un élément du dual $\mathbf{H}^*$. Nous définissons ainsi par:

$$(\tilde{J}(\tilde{x}), \beta) = u(\tilde{x}) - u(\tilde{x}_0) \qquad (\pi^*\beta = du)$$

une *application harmonique additive* $\tilde{J}$ de $\tilde{W}$ dans $\mathbf{H}^*$.

A tout cycle C^1 d'une classe d'homologie réelle, élément de $H^1(W, R)$, correspond par l'intégrale $\int_{C^1} \beta$ un élément de $\mathbf{H}^*$ qui ne dépend que de la classe envisagée. On definit ainsi un isomorphisme de $H^1(W, R)$ sur $\mathbf{H}^*$. L'image correspondante de $H^1(W, Z)$ est un sous-groupe P discret de $\mathbf{H}^*$ de rang p.

Nous appelons *tore canonique* de $(W, \mathbf{g})$ le tore réel $B(W) = \mathbf{H}^*/P$ muni de sa métrique quotient qui est sans courbure. Comme $\tilde{J}(s\tilde{x}) - \tilde{J}(\tilde{x}) \in P$, $\tilde{J}$ passe au quotient et définit *une application harmonique* J: $W \to B(W)$, le diagramme suivant étant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W} & \xrightarrow{\tilde{J}} & \mathbf{H}^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ W & \xrightarrow{J} & B(W) = \mathbf{H}^*/P \end{array}$$

b) Soit $\tilde{\mu}$ une application harmonique additive de $(\tilde{W}, \pi^*\mathbf{g})$ dans E, espace vectoriel réel de dimension finie, telle que $\tilde{\mu}(\tilde{x}_0) = 0$. Si $a \in E^*$, la fonction $u\colon \tilde{x} \to (\tilde{\mu}(\tilde{x}), a)$ est une fonction scalaire harmonique additive sur $\tilde{W}$, nulle en $\tilde{x}_0$ et il existe un élément β de $\mathbf{H}$ tel que $\pi^*\beta = du$. On détermine ainsi une application linéaire de E^* dans $\mathbf{H}$ qui à $a \in E^*$ fait correspondre $\beta \in \mathbf{H}$ (avec $\pi^*\beta = du$). Si $\tilde{\nu}$ est l'application transposée, on a:

$$(\tilde{\mu}(\tilde{x}), a) = u(\tilde{x}) = (\tilde{\nu} \circ \tilde{J}(\tilde{x}), a) \ .$$

On voit que $\tilde{\mu} = \tilde{\nu} \circ \tilde{J}$, où l'application linéaire $\tilde{\nu}\colon \mathbf{H}^* \to E$ est déterminée de manière unique.

Soit $\Theta = E/R$ un tore réel muni de sa métrique plate naturelle et soit p_1 la projection canonique $E \to \Theta$. Si μ est une *application harmonique nulle en* x_0 de W dans Θ, μ se remonte sur $\tilde{W}$ en une application harmonique additive $\tilde{\mu}$ de $\tilde{W}$ dans E, nulle en $\tilde{x}_0$, avec $\mu \circ \pi = p_1 \circ \tilde{\mu}$. Si ν est l'homomorphisme de $B(W)$ dans Θ tel que $\nu \circ p = p_1 \circ \tilde{\nu}$, on en déduit comme au § 5:

$$\mu = \nu \circ J \ . \tag{19.1}$$

Si μ n'envoie pas x_0 à l'origine de Θ, on obtient encore, en composant avec une translation, la relation (19.1), où ν est maintenant une application affine de $B(W)$ dans Θ; J possède donc un caractère universel traduit par le théorème suivant:

Théorème. *Toute application harmonique d'une variété riemannienne compacte* $(W, \mathbf{g})$ *dans un tore réel* Θ *est composée de manière unique de l'application* J *de* $(W, \mathbf{g})$ *dans le tore canonique* $B(W)$ *et d'une application affine de* $B(W)$ *dans* Θ ([15]c).

Si g est une isométrie de $(W, \mathbf{g})$, $J \circ g$ est encore une application harmonique de $(W, \mathbf{g})$ dans $B(W)$; on vérifie en effet immédiatement que g opérant par g^* sur une 1-forme harmonique donne encore une 1-forme harmonique. Il en résulte qu'il existe une transformation affine $\hat{g}$ de $B(W)$ telle que $J \circ g = \hat{g} \circ J$.

c) On démontre comme au § 5, d que si $X \in L_i$, l'image $J_*(X)$ de X est un champ de vecteurs uniforme dans $B(W)$. Pour que X soit élément de I_i, il faut et il suffit que $J_*(X) = 0$.

Ainsi l'idéal I_i *de* L_i *peut être défini par les éléments de* L_i *dont l'image par* J *dans le tore canonique est nulle.*

Soit G_B le groupe des translations de $B(W)$ qui est le plus grand groupe connexe d'isométries cette variété. Nous désignons par L_B son algèbre de Lie qui peut être identifiée à l'algèbre des champs de vecteurs uniformes de $B(W)$. Si $X \in L_i$, $J_*(X) \in L_B$ et pour tout $x \in W$:

$$J(\exp{(uX)}x) = \exp{(uJ_*(X))}J(x) \ . \tag{19.2}$$

On peut établir comme au § 6 la proposition suivante:

Proposition. *L'application harmonique J de $(W, \mathbf{g})$ dans $B(W)$ définit un homomorphisme canonique $\hat{J}_i$ de G_i dans G_B tel que*:

$$J \circ g = \hat{J}_i(g) \circ J \; . \tag{19.3}$$

Soit Γ_i le noyau de $\hat{J}_i$, $(\Gamma_i)_0$ sa composante connexe de l'unité. On déduit de (19.2) que $(\Gamma_i)_0$ *est le sous-groupe invariant connexe de G_i, d'algèbre de Lie I_i.*

20. Identités relatives aux isométries infinitésimales

a) A toute 1-forme ξ de $(W, \mathbf{g})$ associons le 2-tenseur symétrique covariant $b(\xi)$ défini par:

$$b(\xi)_{ij} = \nabla_i \xi_i + \nabla_j \xi_i \; .$$

Si X est un champ de vecteurs de W et si $\xi = \alpha(X)$, on a:

$$b(\alpha(X)) = \mathscr{L}(X)\mathbf{g} \; .$$

Par suite, pour que X soit une isométrie infinitésimale, il faut et il suffit que $b(\alpha(X)) = 0$. Si $\mathbf{C}$ est uné 2-tenseur symétrique, nous notons $Q(\mathbf{C})$ l'opérateur sur les 1-formes défini par:

$$(Q(\mathbf{C})\xi)_i = 2C_i{}^j \xi_j \; .$$

En utilisant l'identité de Ricci, on a:

$$\nabla^j b(\xi)_{ij} = \nabla^j \nabla_j \xi_i - (d\delta\xi)_i + R_i{}^j \xi_j \; ,$$

où $\mathbf{R} = (R_{ij})$ est le tenseur de Ricci de la variété. Or:

$$(\Delta\xi)_i = -\nabla^j \nabla_j \xi_i + R_i{}^j \xi_j \; .$$

Il en résulte:

$$(\Delta\xi - Q(\mathbf{R})\xi + d\delta\xi)_i = -\nabla^j b(\xi)_{ij} \; , \tag{20.1}$$

ce qui peut s'écrire:

$$\Delta\xi - Q(\mathbf{R})\xi + d\delta\xi = \delta b(\xi) \; . \tag{20.2}$$

Si X est une isométrie infinitésimale, $\alpha(X)$ est solution de l'équation:

$$\Delta\alpha(X) - Q(\mathbf{R})\alpha(X) + d\delta\alpha(X) = 0 \; .$$

Associons maintenant à une 1-forme ξ la 1-forme $\lambda(\xi)$ définie par:

$$\lambda(\xi)_j = \xi^i b(\xi)_{ij} \; .$$

De (20.1) on déduit:

$$(\Delta\xi - Q(\mathbf{R})\xi + d\delta\xi, \xi) = -\xi^i \nabla^j b(\xi)_{ij} ,$$

ce qui peut s'écrire:

(20.3) $$(\Delta\xi - Q(\mathbf{R})\xi + d\delta\xi, \xi) = \delta\lambda(\xi) + (b(\xi), b(\xi)) .$$

Par intégration sur W, il vient:

$$\langle \Delta\xi - Q(\mathbf{R})\xi + d\delta\xi, \xi \rangle = \langle b(\xi), b(\xi) \rangle .$$

On en déduit la proposition:

Proposition 1. *Etant donnée une variété riemannienne compacte, pour toute* 1-*forme* ξ *on a l'identité*:

$$\langle \Delta\xi - Q(\mathbf{R})\xi + d\delta\xi, \xi \rangle = \langle b(\xi), b(\xi) \rangle .$$

Un champ de vecteurs X *est une isométrie infinitésimale si et seulement si* $\alpha(X)$ *vérifie*:

(20.4) $$\langle \Delta\alpha(X) - Q(\mathbf{R})\alpha(X) + d\delta\alpha(X), \alpha(X) \rangle = 0 ,$$

ou est solution de l'équation:

$$\Delta\alpha(X) - Q(\mathbf{R})\alpha(X) + d\delta\alpha(X) = 0 .$$

b) Un scalaire $f > 0$ étant donné sur W, introduisons le nouveau produit scalaire:

(20.5) $$\langle \alpha, \beta \rangle_f = \langle \alpha, f\beta \rangle .$$

L'opérateur δ_f, transposé de d par rapport à (20.5) est donné par: $\delta_f\alpha = f^{-1}\delta(f\alpha)$. Si nous introduisons le laplacien correspodant $\Delta_f = d\delta_f + \delta_f d$, il vient:

(20.6) $$\Delta_f = \Delta - di(f^{-1}df) - i(f^{-1}df)d .$$

En particulier, pour une 1-forme ξ, on a immédiatement:

(20.7) $$(\Delta_f\xi)_i = (\Delta\xi)_i - \nabla_i\nabla^j \log f\xi_j - \nabla^j \log f\nabla_j\xi_i .$$

De la définition de Δ_f résulte:

(20.8) $$\langle \Delta_f\xi, \xi \rangle_f = \langle d\xi, d\xi \rangle_f + \langle \delta_f\xi, \delta_f\xi \rangle_f .$$

Désignons par $\mathbf{H}_f$ l'espace des 1-formes f-harmoniques, c'est-à-dire vérifiant $\Delta_f\xi = 0$. Si $\xi \in \mathbf{H}_f$ il résulte de la décomposition de G. de Rham:

$$\xi = du + H\xi \qquad (H\xi \in \mathbf{H}) ,$$

où u est un scalaire. L'application linéaire $\xi \in \mathbf{H}_f \to H\xi \in H$ définit un isomorphisme de $\mathbf{H}_f$ sur $\mathbf{H}$ et l'on a:

$$\dim \mathbf{H}_f = b_1(W) = p .$$

On établit aisément une généralisation de la proposition 1 en raisonnant comme au § 10. De (20.6) et (20.7) il résulte:

$$(20.9) \quad (\Delta_f\xi)_i - (2R_i{}^j - \nabla_i\nabla^j \log f)\xi_j + \nabla^j \log f \nabla_j\xi_i + \nabla_i\delta\xi = -\nabla^j b(\xi)_{ij} .$$

Or l'on a:

$$-\nabla^j\{fb(\xi)\}_{ij} = -\nabla^j f(\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i) - f\nabla^j b(\xi)_{ij} ,$$

et d'autre part:

$$\nabla_i\delta_f\xi = \nabla_i\delta\xi - \nabla_i(\nabla^j \log f\xi_j) = \nabla_i\delta\xi - \nabla_i\nabla^j \log f\xi_j - \nabla^j \log f\nabla_i\xi_j .$$

En tenant compte de ces relations dans (20.9), il vient:

$$f\{(\Delta_f\xi)_i - 2(R_i{}^j - \nabla_i\nabla^j \log f)\xi_j + \nabla_i\delta_f\xi\} = -\nabla^j\{fb(\xi)\}_{ij} .$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire le 2-tenseur symétrique $\mathbf{C}$ défini par:

$$(20.10) \qquad C_{ij} = R_{ij} - \nabla_i\nabla_j \log f .$$

Avec ces notations, on obtient l'identité:

$$\{\Delta_f\xi - Q(\mathbf{C})\xi + d\delta_f\xi\}_i = -f^{-1}\nabla^j\{fb(\xi)\}_{ij} .$$

Si X est une isométrie infinitésimale, $\xi = \alpha(X)$ annule le premier membre. D'autre part par intégration sur W, il vient:

$$\langle \Delta_f\xi - Q(\mathbf{C})\xi + d\delta_f\xi, f\xi\rangle = \langle b(\xi, fb(\xi)\rangle .$$

On a:

Proposition 2. *Si f est un scalaire >0 sur W, on a pour toute 1-forme ξ l'identité*:

$$(20.11) \qquad \langle \Delta_j\xi - Q(\mathbf{C})\xi + d\delta_f\xi, f\xi\rangle = \langle b(\xi), fb(\xi)\rangle ,$$

où $\mathbf{C}$ est donné par (20.10). *Un champ de vecteurs X est une isométrie infinitésimale si et seulement si $\alpha(X)$ vérifie*

$$(20.12) \qquad \langle \Delta_f\alpha(X) - Q(\mathbf{C})\alpha(X) + d\delta_f\alpha(X), f\alpha(X)\rangle = 0 ,$$

ou est solution de l'équation:

$$\Delta_f\alpha(X) - Q(\mathbf{C})\alpha(X) + d\delta_f\alpha(X) = 0 .$$

21. Applications

Etant donné sur $(W, \mathbf{g})$ un scalaire $f > 0$, nous lui avons fait correspondre le 2-tenseur symétrique $\mathbf{C}$ défini par:

$$C_{ij} = R_{ij} - \nabla_i\nabla_j \log f . \tag{21.1}$$

Si $\mathbf{C}$ definit une forme quadratique ≤ 0 (resp. ≥ 0) en tout point de W, nous dirons que $\mathbf{C}$ est non positif (resp. non négatif) sur W et écrirons $\mathbf{C} \leq 0$ (resp. ≥ 0)

a) Supposons que $(W, \mathbf{g})$ admette un tenseur $\mathbf{C}$ *non positif*. Soit $X \in L_i$ une isométrie infinitésimale, sous l'hypothèse faite:

$$\langle Q(\mathbf{C})\alpha(X), f\alpha(X)\rangle \leq 0 ,$$

et il résulte de (20.12):

$$\langle \Delta_f\alpha(X), \alpha(X)\rangle_f = 0 ,$$

c'est-à-dire $d\alpha(X) = 0$ et $\delta_f\alpha(X) = 0$. D'après la première relation, X est à dérivée covariante nulle; d'après la seconde, X laisse f invariant.

Théorème 1. *S'il existe sur la variété riemannienne campacte* $(W, \mathbf{g})$ *un scalaire* $f > 0$ *tel que le tenseur* $\mathbf{C}$ *associé par* (21.1) *soit non positif sur* W, L_i *est une algèbre abélienne de dimension* $\leq p$, *définie par les vecteurs à dérivée covariante nulle*; L_i *laisse* f *invariant.*

Ainsi G_i *est abélien et de dimension* $\leq p = b_1(W)$.

Supposons en outre qu'il existe un domaine U de W sur lequel $\mathbf{C}$ soit défini négatif; on a pour tout élément X de L_i: $Q(\mathbf{C})\alpha(X) = 0$, X est par suite nul sur U donc identiquement nul et G_i est réduit à l'identité.

Ainsi *si* $\mathbf{C} \leq 0$ *est localement défini négatif, le groupe des isométries de* $(W, \mathbf{g})$ *est fini.*

b) Supposons maintenant que $(W, \mathbf{g})$ admette un tenseur $\mathbf{C}$ *non négatif*. Soit ξ un élément de $\mathbf{H}_f$ qui vérifie donc $d\xi = 0$, $\delta_f\xi = 0$. Il résulte de (20.11):

$$-\langle Q(\mathbf{C})\xi, f\xi\rangle = \langle b(\xi), fb(\xi)\rangle ,$$

où le premier membre est ≤ 0 et le second ≥ 0. On en déduit $b(\xi) = 0$; on peut poser $\xi = \alpha(X)$, où X est une isométrie infinitésimale qui est donc nécessairement à dérivée covariante nulle; de plus d'après $\delta_f\alpha(X) = 0, X$ laisse f invariant. On a $\mathbf{H}_f = \mathbf{H}$. L'application linéaire $X \in L_i \rightarrow H\alpha(X) \in \mathbf{H}$ est surjective et $q = p$. Si L_1 est l'algèbre abélienne d'isométries définie par les champs à dérivée covariante nulle, on voit que $L_i = I_i \oplus L_1$ et que $[L_i, L_1] = 0$. De plus tous les éléments de $\mathbf{H}$ étant à dérivée covariante nulle, J_* est à dérivée covariante nulle ($\bar{\nabla} J_* = 0$) et J est totalement géodésique. On a:

Théorème 2. *S'il existe sur la variété riemannienne compacte* $(W, \mathbf{g})$ *un scalaire* $f > 0$ *tel que le tenseur* $\mathbf{C}$ *associé par* (21.1) *soit négatif sur* W, L_i *admet une décomposition en somme directe* $L_i = I_i \oplus L_1$, *où* L_1 *est l'idéal abélien de* L_i, *de dimension* $p = b_1(W)$, *défini par les éléments à dérivées covariante nulle*; L_1 *laisse* f *invariant et l'application* J: $W \to B(W)$ *est totalement géodésique.*

Ainsi *la dimension de* G_i *est* $\geq p$. Supposons en outre qu'il existe un domaine U de W sur lequel $\mathbf{C}$ soit défini positif; on a pour tout élément X de L_i: $Q(\mathbf{C})\alpha(X) = 0$. On en déduit comme précédemment que $L_1 = 0$ et que par suite $p = 0$.

Ainsi *si* $\mathbf{C} \geq 0$ *est localement défini positif, le premier nombre de Betti de la variété est nul* (extension d'un théorème classique de Bochner). Nous indiquerons ultérieurement une généralisation du théorème de S. B. Myers, généralisation qui a été signalée dans un cas particulier par Th. Aubin.

c) Soit $(W, \mathbf{g}')$ une variété riemannienne à courbure sectionnelle non positive, compacte ou non. On sait [15b] que si $\mathbf{C} \geq 0$ est localement défini positif, toute application continue de W dans W' est homotope à une application constante.

22. Variétés à premier nombre de Betti nul

Soit $(W, \mathbf{g})$ une variété riemannienne compacte. Si $b_1(W) = 0$, le tore $B(W)$ est réduit à un point. Il résulte de (19.1) que toute application harmonique de $(W, \mathbf{g})$ dans un tore est une application constante. Ainsi, d'après le théorème de Eells-Sampson, toute application continue de W dans un tore est homotope à une application constante.

Inversement, supposons que toute application continue de $(W, \mathbf{g})$ dans un tore soit homotope à une application constante. Il en est en particulier ainsi pour J: $W \to B(W)$. D'après un théorème de Hartman [8], J est harmoniquement homotope à une application constante et $E(J) = 0$: J est donc lui-même une application constante et il en est de même pour $\tilde{J}$. D'après la définition de cette application, toute 1-forme harmonique de $(W, \mathbf{g})$ est nécessairement nulle et $b_1(W) = 0$. On a:

Théorème. *Pour qu'une variété compacte W soit à premier nombre de Betti nul, il faut et il suffit que toute application continue de W dans un tore réel soit homotope à une application constante.*

Ce résultat peut aisément être établi par voie purement topologique en raisonnant sur les applications de W dans un cercle.

VII. FIBRATION D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE COMPACTE À TENSEUR $C \geq 0$

23. Fibration sur le tore canonique

Soit $(W, \mathbf{g})$ une variété riemannienne compacte, orientée, telle qu'il existe sur W un scalaire $f > 0$ pour lequl le tenseur C defini par:

$$C_{ij} = R_{ij} - \nabla_i \nabla_j \log f \tag{23.1}$$

est *non négatif*. Le tore canonique $B(W)$ de la variété est de dimension $p = b_1(W)$.

a) D'après le théorème 2 du § 21, on a $q = p$ et il résulte du § 17, c) que l'application totalement géodésique J: $W \to B(W)$ est *partout de rang* p; $\hat{J}_i$ définit un homomorphisme de G_i sur G_B de noyau Γ_i et comme au § 13, J est *surjective*.

Soit G_1 le sous-groupe invariant abélien connexe de G_i admettant L_1 pour algèbre de Lie; G_1 appartient au centre de G_i. On a $G_i = G_1 \cdot (\Gamma_i)_0$. La restriction $\hat{J}_1$ de $\hat{J}_i$ à G_1 est un homomorphisme de G_1 sur G_B qui est un isomorphisme local. Le noyau de $\hat{J}_1$ est un sous-groupe abélien discret $H_i = G_i \cap \Gamma_i$ et $\Gamma_i = H_i \cdot (\Gamma_i)_0$. Si $y \in B(W), J^{-1}(y)$ est une sous-variété fermée de W, de dimension $n - p$, et les composantes connexes de $J^{-1}(y)$ sont sans singularités. Soit U un voisinage géodésiquement convexe, suffisamment petit de $y \in B(W)$. A partir de $\hat{J}_1$, on définit comme au § 13 un difféomorphisme de $J^{-1}(U)$ sur $U \times J^{-1}(y)$. Il en résulte que *J définit W comme espace fibré différentiable sur $B(W)$, avec H_i comme groupe structural.* On déduit du caractère universel de J que les fibres qui sont compactes, sont aussi connexes. Nous notons $(W', \mathbf{g}')$ la fibre-type de la fibration. Le noyau Γ_i de $\hat{J}_i$, fermé daus G_i, est *compact*.

b) Soit $\{x^A\}$ $(A = 1, 2, \cdots, p)$ un système de coordonnées plates pour le tore $B(W)$. Une base des 1-formes harmoniques de $B(W)$ est définie par les $\alpha^A = dx^A$ et une base pour les 1-formes harmoniques de $(W, \mathbf{g})$ est donnée pas les $\beta^A = J^* \alpha^A$.

Soit $\{x^a\}$ $(a, b = p + 1, \cdots, n)$ un systéme de coordonnées locales de W'; la bijection $U \times W' \to J^{-1}(U)$ déterminée par la structure fibrée définit $\{x^A, x^a\}$ comme un système de coordonnées locales de W, adapté à cette structure fibrée. Pour ce choix, J est défini par:

$$J^A(x) = x^A \qquad (x \in J^{-1}(U)) \ .$$

Si $Y \in I_i$, Y est tangent aux fibres. Si $X \in L_1$, ses composantes vérifient $X^A =$ const., $X^a = 0$. On démontre comme au § 14 que, en coordonnées adaptées

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B + g_{ab} dx^a dx^b \ , \tag{23.2}$$

où $g_{AB} =$ const. et où les g_{ab} ne dépendent que des coordonnées $\{x^c\}$. La métrique $\mathbf{g}$ de W est réductible et le tenseur de Ricci admet les composantes

$$R_{AB} = 0 \, , \qquad R_{aB} = 0 \, , \qquad R_{ab}$$

où (R_{ab}) est le teuseur de Ricci de $(W', \mathbf{g}')$. La fonction f, invariante par L_1, ne dépend que des coordonnées $\{x^c\}$ et le tenseur $\mathbf{C}$ admet les composantes:

$$C_{AB} = 0 \, , \qquad C_{aB} = 0 \, , \qquad C_{ab} = R_{ab} - \nabla_a \nabla_b \log f \, .$$

Par suite la restriction de $\mathbf{C}$ à une fibre est un tenseur $\mathbf{C}'$ attaché à $(W', \mathbf{g}')$ par une formule identique à (23.1). Nous énonçons:

Théorème. *Soit* $(W, \mathbf{g})$ *une variété riemannienne compacte, orientée, de dimension n et premier nombre de Betti* $p = b_1(W)$. *S'il existe sur W un scalaire* $f > 0$ *tel que le tenseur associé par* (23.1) *soit non négatif*:

1°) *Le noyau* Γ_i *de* $\hat{J}_i$ *est un sous-groupe invariant compact de* G_i.

2°) *L'application J définit W comme espace fibré différentiable sur le tore canonique B(W) de groupe structural* H_i *abélien discret. La fibre-type est une variété riemannienne* $(W', \mathbf{g}')$ *compacte, connexe, de dimension* $n - p$, *vérifiant la même hypothèse que* $(W, \mathbf{g})$ *pour un tenseur* $\mathbf{C}'$ *défini par le restriction de* $\mathbf{C}$ *à un fibre.*

c) On a la proposition suivante.

Proposition. *Soit* $(W, \mathbf{g})$ *une variété riemannienne compacte admettant un tenseur* $\mathbf{C} \geq 0$. *Si* $Y \in I_i$, *la restriction de Y à une fibre* $J^{-1}(y_0)$ *définit un élément* Y' *de l'idéal* I'_i *de l'algèbre des isométries infinitésimales de la fibre* $(W', \mathbf{g}')$ *identifiée à* $J^{-1}(y_0)$.

Considérons une fibre déterminée $J^{-1}(y_0)$ identifiée à la fibre-type W'. Si $Y \in I_i$, la 1-forme correspondante $\xi = \alpha(Y)$ est cohomologue à 0 sur $(W, \mathbf{g})$

$$\xi = \delta\lambda = \delta d\mu \, ,$$

où μ est une 1-forme. Si $X \in L_1$, on a $\mathscr{L}(X)Y = 0$ et par suite $\mathscr{L}(X)\xi = 0$. Ainsi:

$$\mathscr{L}(X)\delta d\mu = \delta d\mathscr{L}(X)\mu = 0 \, .$$

On en déduit:

$$d\mathscr{L}(X)\mu = \mathscr{L}(X)d\mu = 0 \, ,$$

et la 2-forme $\lambda = d\mu$ est invariante par X; X étant à dérivée covariante nulle, il en résulte qu'en coordonnées adaptées $\nabla_A \lambda = 0$. Dans ces coordonnées:

$$\xi_a = -\nabla^b \lambda_{ba} - \nabla^A \lambda_{Aa} \, ,$$

où le dernier terme du second membre est nul. On en déduit que si ξ' est la restriction de ξ à W', λ' celle de λ, on a sur $(W', \mathbf{g}')$

$$\xi' = \delta'\lambda' ,$$

où δ' est ici l'opérateur de codifférentiation relatif à cette variété. Il en résulte que Y', restriction de Y à W', appartient à l'idéal I'_i.

d) A partir du théorème du b et du lemme précédent, on peut réitérer le procédé sur $(W', \mathbf{g}')$ comme au § 16. On peut aussi raisonner autrement: pour tout revêtement fini de W, le premier nombre de Betti est $\leq n$. Soit V un revêtement fini de W, avec $b_1(V) = h$, tel que pour tout revêtement fini de W, le premier nombre de Betti soit $\leq h$. D'après le b, V est fibré sur $B(V)$; la fibre F est telle que $b_1(F) = 0$, sinon, d'après le raisonnement du § 16, b, il existerait un revêtement fini de V donc de W dont le premier nombre de Betti serait plus grand que h. Nous pouvons énoncer.

Théorème. *Soit $(W, \mathbf{g})$ une variété riemannienne compacte telle qu'il existe sur W un scalaire $f > 0$ pour lequel le tenseur associé $\mathbf{C}$ est non négatif. Soit h le maximum des premiers nombres de Betti des revêtements finis de W. Il existe un revêtement fini V de W qui est fibré différentiablement sur $B(V)$, de dimension h, en variétés compactes, connexes F vérifiant la même hypothèse que W et telles que $b_1(F) = 0$.*

VIII. VARIÉTÉS RIEMANNIENNES A TENSEUR $C \geq 0$ ET EXTENSION DES THÉORÈMES DE CHEEGER-GROMOLL

24. Théorèmes de Cheeger-Gromoll

a) Soit $(W, \mathbf{g})$ une variété riemannienne complète. On appelle *rayon* (resp. *droite*) de la variété une géodésique rapportée au paramètre t naturel σ: $[0, \infty] \to W$ (resp. σ: $(-\infty, +\infty) \to W$) dont chaque arc est minimal. On note $d(\cdot, \cdot)$ la distance de deux points de $(W, \mathbf{g})$. A tout rayon σ et à toute valeur $t \geq 0$ du paramètre, associons la fonction:

$$x \to g_t(x) = d(\sigma(t), x) - t .$$

On démontre aisément (Toponogov, Cheeger-Gromoll) que quand $t \to \infty$, g_t converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue g_σ.

b) En étudiant les variétés riemanniennes complètes à tenseur de Ricci $\mathbf{R} \geq 0$ admettant une droite, Cheeger et Gromoll ont établi le théorème suivant.

Théorème 1. *Si $(W, \mathbf{g})$ est une variété riemannienne complète à tenseur de Ricci $\mathbf{R} \geq 0$, $(W, \mathbf{g})$ est le produit riemannien de R^k muni de sa métrique plate naturelle (facteur euclidien maximal) et d'une variété riemannienne $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ dépourvue de droite.*

De ce théorème, ils ont déduit des résultats importants que nous pouvons présenter sous la forme suivante: soit C la classe des variétés riemanniennes *compactes* $(W, \mathbf{g})$, dont le revêtement universel $(\tilde{W}, \tilde{\mathbf{g}})$ est le produit riemannien de R^k (facteur euclidien maximal) et d'une variété riemannienne $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ *compacte*. On a

Théorème 2. 1°) *Toute variété riemannienne compacte à tenseur de Ricci* $\mathbf{R} \geq 0$ *est de classe C.*

2°) *Pour toute variété riemannienne* $(W, \mathbf{g})$ *de classe C, le groupe d'holonomie homogène complet* Φ *est compact.*

Nous nous proposons d'étendre le Théorème 1 et le 1°) du Théorème 2 au cas où l'on substitue au tenseur de Ricci un tenseur $\mathbf{C}$ convenable. Nous n'expliciterons que le principe des démonstrations qui diffèrent peu de celles de Cheeger-Gromoll.

25. Lemmes fondamentaux

a) Soit $(W, \mathbf{g})$ une variété riemannienne complète et supposons qu'il existe sur W un scalaire $f > 0$ tel que le tenseur associé $\mathbf{C}$:

$$C_{ij} = R_{ij} - \nabla_i \nabla_j \log f \tag{25.1}$$

soit *non négatif*. Nous supposons de plus $|\log f|$ *borné sur* W; $\log f$ étant défini à une constante additive près, nous pouvons écrire sans nuire à la généralité

$$0 \leq \log \mathrm{f} \leq M \ . \tag{25,2}$$

Nous nous proposons d'établir sous ces hypothèses un certain nombre de lemmes.

b) Si p est un point fixe de W, nous désignons par ρ_p la fonction $x \in W \to d(p, x)$. On a:

Lemme 1. *Sous les hypothèses du a, il existe une constante positive* K^2 *telle que*:

$$(\Delta_f \rho_p)(x) \geq -K^2/\rho_p(x) \ , \tag{25.3}$$

où x *n'appartient pas au cut locus de* p.

Soit σ: $[0, l] \to W$ la géodésique minimale de longueur $l = \rho_p(x)$ joignant p à x. Si N est le vecteur unitaire tangent à cette géodésique, on déduit du raisonnement de Cheeger-Gromoll par intégration sur σ:

$$(\Delta \rho_p)(x) - \int_0^l \frac{t^2}{l^2} N^i N^j \nabla_i \nabla_j \log f dt \geq -\frac{n-1}{l} \ ,$$

ce qui peut s'écrire, si l'on désigne par $'$ et $''$ les dérivations par rapport au paramètre t:

$$(\Delta\rho_p)(x) - \int_0^l \frac{t^2}{l^2}(\log f)''dt \geq -\frac{n-1}{l} .$$

Or l'on a:

$$t^2(\log f)'' = (t^2(\log f)')' - 2(t \log f)' + 2 \log f .$$

On en déduit:

$$\int_0^l \frac{t^2}{l^2}(\log f)''dt = (N^i \nabla_i \log f)(x) - \frac{2}{l}(\log f)(x) + \frac{2}{l^2}\int_0^l \log f dt .$$

D'après la majoration de $\log f$, il existe une constante $K^2 > 0$ telle qu'en x:

$$\Delta\rho_p - f^{-1}\nabla^i f \nabla_i \rho_p \geq -K^2/\rho_p ,$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (25.3).

c) *Supposons* $n > 2$ et introduisons sur W, la métrique $\hat{\mathbf{g}} = \varphi\mathbf{g}$, conforme à la métrique initiale, avec

$$\varphi = f^{2/(n-2)} .$$

Si u est une fonction scalaire sur W, on vérifie immédiatement que le laplacien $\hat{\Delta}u$ correspondant à la métrique $\hat{\mathbf{g}}$ peut s'écrire:

$$\hat{\Delta}u = \varphi^{-1}\Delta_f u . \tag{25.4}$$

Soit D un compact connexe de W à bord ∂D régulier. D'après (25.4), nous pouvons dire qu'une fonction u est *f-surharmonique* si, h désignant la fonction continue sur D, f-harmonique sur int. D et telle que $h|\partial D = u|\partial D$, on a pour tout D l'inégalité $u \geq h$ sur D. Cette f-surharmonicité est bien entendu équivalente à la surharmonicité pour la métrique $\hat{\mathbf{g}}$.

Du Lemme 1, on peut déduire:

Lemme 2. *Si σ est un rayon d'une variété de dimension $n > 2$ satisfaisant aux hypothèses du* § 25, a, *la fonction g_σ associée est f-surharmonique.*

On établit ce résultat au moyen de la considération de la fonction de Green $\hat{G}_y(x)$ de $\hat{\Delta}$ sur D, de singularité $y \in$ int. D. Le raisonnement est semblable à celui de Cheeger-Gromoll (Théorème 1 de leur article), mais dans les éléments d'intégration figure le facteur f.

Décomposons *une droite* de $(W, \mathbf{g})$ en deux rayons opposés auxquels sont associés respectivement les fonctions g_+ et g_-. Du Lemme 2 on déduit aisément le lemme suivant:

Lemme 3. *Etant donnée une variété riemannienne de dimension $n > 2$, satisfaisant aux hypothèses du* § 25, a, *les deux fonctions g_+ et g_- associées aux deux rayons opposés d'une droite de la variété sont f-harmoniques et les carrés (dg_+, dg_+) et (dg_-, dg_-) de leurs différentielles sont égaux à* 1.

26. Théorème concernant les variétés riemanniennes complètes à $\mathbf{C} \geq 0$

a) Soit $(W, \mathbf{g})$ une variété riemannienne complète de dimension $n > 2$ satisfaisant aux hypothèses du § 25, a. Des calculs du § 20, b, il résulte que, pour toute 1-forme ξ, on a:

$$(26.1) \quad (\Delta_f \xi - Q(\mathbf{C})\xi + d\delta_f \xi, f\xi) = -\nabla^j\{f\xi^i b(\xi)_{ij}\} + (b(\xi), fb(\xi)) \ .$$

Si $(W, \mathbf{g})$ admet une droite, prenons pour ξ la différentielles dg_+ de l'une des deux fonctions g_+, g_- correspondantes. D'après le lemme 3, ξ vérifie:

$$\delta_f \xi = 0 \ , \qquad d\xi = 0 \ , \qquad (\xi, \xi) = 1 \ .$$

On en déduit en particulier:

$$\xi^i \nabla_j \xi_i = 0 \ , \qquad \xi^i \nabla_i \xi_j = 0 \ .$$

Pour cette 1-forme ξ, la relation (26.1) se réduit à:

$$-(Q(\mathbf{C})\xi, f\xi) = (b(\xi), fb(\xi)) \ ,$$

où les deux membres sont de signes opposés donc nuls. Ainsi $b(\xi) = 0$ et $\xi = \alpha(X)$, où X est une isométrie infinitésimale et est par suite à dérivée covariante nulle

$$\nabla X = 0 \ .$$

De $\delta_f \xi = 0$, il résulte que X laisse f invariant. On voit aisément que les trajectoires de $X = \text{grad.}\, g_+$ et les sous-variétés $g_+ = \text{const.}$ définissent une décomposition globale de $(W, \mathbf{g})$. On a

Proposition. *Si une variété riemannienne complète* $(W, \mathbf{g})$, *de dimension* $n > 2$, *satisfait aux hypothèses du* § 25, a *et admet une droite*, $(W, \mathbf{g})$ *est le produit riemannien d'une variété* $(W', \mathbf{g}')$ *satisfaisant aux mêmes hypothéses et d'une droite* R *munie de sa métrique naturelle.*

b) Par induction, on déduit de la proposition précédente que la variété $(W, \mathbf{g})$ considérée est le produit riemannien de R^k et d'une variété riemannienne complète $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ satisfaisant les hypothèses du § 25, a et qui ou bien est déprovue droite, ou bien est de dimension 2 et admet une droite.

Examinons le cas où la variété $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$, est de dimension 2. A cet effet introduisons la variété $(\hat{W}, \hat{\mathbf{g}})$, de dimension 3, définie par le produit riemannien de $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ et d'un cercle T^1 muni de sa métrique naturelle

$$\hat{W} = \overline{W} \times T^1 \ ,$$

$(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ vérifiant les hypothèses du § 25, a, il en est de même pour $(\hat{W}, \hat{\mathbf{g}})$, le scalaire f étant pris constant sur les variétés facteurs T^1.

Si $\bar{\sigma}(t)(t \in (-\infty, +\infty))$ est une droite de $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ et si $\theta_0 \in T^1$, $(\bar{\sigma}(t), \theta_0)$ définit une droite de la variété $(\hat{W}, \hat{\mathbf{g}})$. D'après la proposition précédente, $(\hat{W}, \hat{\mathbf{g}})$ est le produit riemannien d'une variété $(W', \mathbf{g}')$ et d'une droite:

$$\hat{W} = W' \times R .$$

La facteur R définit sur $(\hat{W}, \hat{\mathbf{g}})$ un champ de vecteurs X à dérivée covariante nulle dont nous désignons par $\overline{X}$ la projection sur $\overline{W}$ (pour la décomposition $\hat{W} = \overline{W} \times T^1$); $\overline{X}$ est à dérivée covariante nulle sur $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ et ne peut être nul. Par suite la variété $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$, de dimension 2, est *plate* et admet une droite. D'après Toponogov [18] elle admet un facteur identique à R.

On voit que la variété initiale $(W, \mathbf{g})$ est toujours le produit riemannien d'un R^k et d'une variété riemannienne $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ dépourvue de droite. Nous énonçons:

Théorème. *Soit* $(W, \mathbf{g})$ *une variété riemannienne complète admettant un scalaire* $f > 0$ *tel que*

1°) *le tenseur* $\mathbf{C}$ *associé par* (25.1) *est* ≥ 0,

2°) $|\log f|$ *est borné sur* W.

Alors $(W, \mathbf{g})$ *est le produit riemannien de* R^k *muni de sa métrique plate naturelle (facteur euclidien maximal) et d'une variété riemannienne complète* $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ *vérifiant les même hypothèses et dépourvue de droites.*

27. Cas de variétés compactes

Soit $(W, \mathbf{g})$ une variété riemannienne *compacte* admettant un scalaire $f > 0$ pour lequel le tenseur $\mathbf{C}$ associé est ≥ 0.

a) Le revêtement universel $(\tilde{W}, \tilde{\mathbf{g}})$ de cette variété satisfait aux hypothèses du théorème du § 26 et est le produit riemannien d'un R^k et d'une variété $(\overline{W}, \overline{\mathbf{g}})$ dépourvue de droites: $\tilde{W} = \overline{W} \times R^k$. De la compacité de W, on déduit que si $\overline{W}$ n'était pas compacte, il existerait certainement une droite sur cette variété (voir théorème 3 de Cheeger-Gromoll, article cité). Ainsi:

Théorème. *Si* $(W, \mathbf{g})$ *est une variété riemannienne compacte admettant un tenseur* $\mathbf{C} \geq 0$, *la variété est de classe* C.

b) Proposons-nous de donner une interprétation de la dimension k du facteur euclidien maximal de $(\tilde{W}, \tilde{\mathbf{g}})$. Nous notons p la projection canonique de $\tilde{W}$ sur W.

En $\tilde{x} \in \tilde{W}$, soit $\tilde{P}_{\tilde{x}}$ le sous-espace vectoriel de dimension k tangent à la variété facteur défini par R^k et soit P_x (où $x = p(\tilde{x})$) sa projection sur W. Si Φ est le groupe d'holonomie de $(W, \mathbf{g})$ en x, Φ_0 sa composante connexe de e, le groupe Φ_0 induit l'identité sur P_x: si $\varphi_0 \in \Phi_0$, $v \in P_x$, on a $\varphi_0(v) = v$. Par suite si $\varphi \in \Phi$,

$$\varphi\{\varphi_0(v)\} = \varphi(v) , \tag{27.1}$$

φ définissant un automorphisme de Φ_0, à tout élément $\varphi_0' \in \Phi_0$ correspond $\varphi_0 \in \Phi_0$ tel que $\varphi \circ \varphi_0 = \varphi_0' \circ \varphi$ et (27.1) peut s'écrire:

$$\varphi_0'\{\varphi(v)\} = \varphi(v) .$$

Le vecteur $\varphi(v)$ étant invariant par Φ_0 appartient nécessairement à P_x et Φ *laisse P_x invariant.* D'après le théorème 2, 2° du § 24, Φ est compact. La connexion de $(W, \mathbf{g})$ définit un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(W)$ sur le groupe fini Φ/Φ_0. Si N est le noyau de cet homomorphisme:

$$\pi_1(W)/N \simeq \Phi/\Phi_0 .$$

Considérons le revêtement fini $(\hat{W}, \hat{\mathbf{g}})$ correspondant au groupe N et admettant donc pour fibre $\pi_1(W)/N$. D'après la définition de N, $(\hat{W}, \hat{\mathbf{g}})$ admet Φ_0 pour groupe d'holonomie. Si $\hat{P}_{\hat{x}}$ èst la projection de $\tilde{P}_{\tilde{x}}$ sur $\hat{W}$, tout élément $\hat{v}$ de $\hat{P}_{\hat{x}}$ est invariant par le groupe d'holomie de $(\hat{W}, \hat{\mathbf{g}})$ et par suite définit sur W un champ de vecteurs à dérivée covariante nulle; d'après le § 21, $b_1(\hat{W}) = k$.

Cela posé, soit $(V, \mathbf{g}')$ un revêtement fini de (W, g) dont le premier nombre de Betti $b_1(V) = h$ est maximum par rapport aux premiers nombres de Betti des revêtements finis de W. On a donc $k \leq h$. $(V, \mathbf{g}')$ jouissant de la même propriété que $(W, \mathbf{g})$, il existe sur $(V, \mathbf{g}')$, h champs de vecteurs linéairement indépendants à dérivée covariante nulle. En passant au revêtement universel, on voit que $h \leq k$ donc que $h = k$. Nous énonçons:

Théorème. *Si $(W, \mathbf{g})$ est une variété riemannienne compacte admettant un tenseur $\mathbf{C} \geq 0$, la dimension du facteur euclidien maximal de $(\tilde{W}, \tilde{\mathbf{g}})$ est égale au maximum des premiers nombres de Betti des revêtements finis de W.*

De l'analyse précédente, on déduit immédiatement des informations sur la structure de $\pi_1(W)$. En particulier

Corollaire. *Si $(W, \mathbf{g})$ est une variété riemannienne compacte admettant un tenseur $\mathbf{C} \geq 0$ et si tout revêtement fini de W est à premier nombre de Betti nul, le groupe fondamental de W est fini. Il en est ainsi en particulier si le tenseur $\mathbf{C} \geq 0$ est localement défini positif.*

En effet, sous l'hypothèse faite, $k = 0$ et $\tilde{W} = \overline{\overline{W}}$ est compacte. Nous avons obtenu une généralisation directe du théorème de Myers.

IX. RETOUR AUX VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

28. Variétés kählériennes à tenseur $\mathbf{C} \geq 0$

Supposons que notre variété $(W, \mathbf{g})$ soit kählérienne et reprénons les notations correspondant à ce cas.

a) Si $X \in L$, la 1-forme *réelle* ξ correspondante peut s'écrire:

$$\xi = d'\rho + d''\bar{\rho} + H\xi ,$$

où $H\xi$ est une 1-forme harmonique réelle. Si $\rho = u + iv$ (où u et v sont à valeurs réelles), il vient:

$$d'\rho + d''\bar{\rho} = (d' + d'')u + i(d' - d'')v = du + Mdv ,$$

et par suite:

$$\xi = du + Mdv + H\xi . \tag{28.1}$$

D'une formule classique de géométrie kählérienne, on déduit $Mdv = \delta Lv$ et (28.1) est la décomposition réelle de G. De Rham pour ξ. Pour que $X \in L_i$, il faut et il suffit que $\delta\xi = 0$, c'est-à-dire que ξ s'écrive:

$$\xi = Mdv + H\xi . \tag{28.2}$$

Tout élément X de L_i qui admet un zéro sur W appartient à I_i. Inversement tout élément X de I_i admet $\xi = Mdv$ comme 1-forme réelle correspondante; v admettant des extremas sur W, ξ et par suite $X \in I_i$ s'annulent sur W. S'il existe $X \in L_i$ et dépourvu de zéros, il existe une 1-forme harmonique β telle que $i(X)\beta \neq 0$ et $b_1(W)$ est $\neq 0$ (Frankel obtient un résultat plus général).

Proposition. *Soit* $(W, \mathbf{g})$ *une variété kählérienne compacte. Pour qu'un élément* X *de l'algèbre* L_i *des isométries infinitésimales de la variété appartienne à l'idéal* I_i, *il faut et il suffit que* X *admette un zéro sur* W. *S'il existe* $X \in L_i$ *et dépourvu de zéros, on a* $b_1(W) \neq 0$.

b) Supposons qu'il existe sur la variété kählérienne $(W, \mathbf{g})$ un scalaire $f > 0$ tel que le tenseur $\mathbf{C}$ défini par:

$$C_{ij} = R_{ij} - \nabla_i \nabla_j \log \mathrm{f} \qquad (i, j = 1, \cdots, 2n) \tag{28.3}$$

soit *non négatif*. Cette hypothèse implique que $C_1(W)$ est ≥ 0. En effet pour tout vecteur w, on a:

$$C_{ij}w^i w^j = C_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta + 2C_{\alpha\bar{\beta}}w^\alpha w^{\bar{\beta}} + C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}w^{\bar{\alpha}} w^{\bar{\beta}} \geq 0 .$$

En substituant $\mathscr{J}w$ au vecteur w, il vient:

$$C_{ij}(\mathscr{J}w)^i(\mathscr{J}w)^j = -C_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta + 2C_{\alpha\bar{\beta}}w^\alpha w^{\bar{\beta}} - C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}w^{\bar{\alpha}} w^{\bar{\beta}} \geq 0 .$$

On en déduit par addition membre à membre:

$$4C_{\alpha\bar{\beta}}w^\alpha w^{\bar{\beta}} = C_{ij}w^i w^j + C_{ij}(\mathscr{J}w)^i(\mathscr{J}w^j) \geq 0 . \tag{28.4}$$

Proposition. *Soit* $(W, \mathbf{g})$ *une variété kählérienne compacte. S'il existe sur* W *une scalaire* $f > 0$ *tel que le tenseur* $\mathbf{C}$ *associé par* (28.3) *soit non négatif, on a* $C_1(W) \geq 0$.

c) Pour une telle variété kählérienne les théorèmes des § 13 et § 23 b sont simultanément valables. En particulier $L = I \oplus L_1$ où les éléments de L_1 sont à dérivée covariante nulle; G_1 se composant d'isométries, le groupe $H = G_1 \cap \Gamma = G_1 \cap \Gamma_i$ coïncide avec H_i. En réunissant les conclusions, il vient:

Théorème 1. *Soit* $(W, \mathbf{g})$ *une variété kählérienne compacte telle qu'il existe sur* W *un scalaire* $f > 0$ *pour lequel le tenseur* $\mathbf{C}$ *défini par* (28.3) *soit non négatif. Pour cette variété à* $C_1(w) \geq 0$.

1°) *Le groupe* G_1 *appartient au centre de* G; *les noyaux* $\Gamma_i \subset G_i$ *de* $\hat{J}_i$ *et* $\Gamma \subset G$ *de* $\hat{J}$ *sont fermés respectivement dans* G_i *et* G.

2°) *L'application de Jacobi* J *définit* W *comme fibré holomorphe sur le tore complexe* $A(W)$ *à groupe structural* H *abélien, discret. La fibre-type est une variété kählérienne* $(W', \mathbf{g}')$ *compacte, connexe, de dimension complexe* $n - p$, *vérifiant le même hypothèse que* $(W, \mathbf{g})$ *pour un tenseur* $\mathbf{C}'$ *défini par la restriction de* $\mathbf{C}$ *à une fibre.*

Nous avons ainsi obtenu une généralisation exacte de la situation du § 14. A partir du théorème du § 23, d, on a:

Théorème 2. *Sous la même hypothèse que pour le théorème* 1, *soit* V *un revêtement fini de* W *dont l'irrégularité* h *est égale au maximum des irrégularités des revêtements finis de* W. *La variété* V *est fibrée holomorphiquement sur* $A(V)$ (*de dimension complexe* h) *en variété kählériennes complexes, connexes* F, *vérifiant la même hypothèse que* W *et à irrégularité nulle.*

29. Cas des variétés de Hodge

a) Soit W une variété kählérienne de dimension complexe n. On appelle *genre arithmétique* de cette variété l'entier:

$$\chi(W) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r b_{r,0}(W) .$$

Si $C_1(W) \geq 0$ est localement défini positive, il résulte de (10.3) que $U^r(f) = 0$ et par suite que $b_{r,0}(W) = 0$ $(r = 1, \cdots, n)$. On a donc $\chi(W) = 1$. En remarquant que $b_{2,0}(W) = 0$ implique W *de Hodge*, on déduit d'un résultat de Kobayashi [10].

Proposition. *Si* W *est une variété kählérienne à* $C_1(W) \geq 0$ *et localement définie positive.*

1°) *W n'admet pas de r-formes holomorphes non nulles et* $\chi(W) = 1$.

2°) *W n'admet aucun revêtement fini propre. En particulier* $H^1(W, Z) = 0$.

b) Cela posé, supposons que W admette un scalaire $f > 0$ pour lequel le tenseur $\mathbf{C}$ défini par (28.3) est ≥ 0 et a une partie de type $(1, 1)$ localement définie positive. D'après la proposition précédente, W satisfait aux hypothèses du corolaire du § 27 et admet par suite un groupe fondamental fini, donc réduit à l'identité, toujours d'après la même proposition.

Théorème. *S'il existe sur la variété kählérienne* W *un scalaire* $f > 0$ *pour lequel*

1°) *le tenseur* $\mathbf{C}$ *associé par* (28.3) *est* ≥ 0,

2°) *la partie de type* $(1, 1)$ *de* $\mathbf{C}$ *est localement définie positive* *la variété* envisagée *est simplement connexe.*

Il en est, a fortiori, ainsi si $\mathbf{C} \geq 0$ est lui-même localement défini positif.

Bibliographie

[1] S. Bergman, *Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques*, Mem. Sci. Math. **106** (1947), *Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes*, Mem. Sci. Math. **108** (1948).

[2] A. Blanchard, *Sur les variétés analytiques complexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **73** (1956) 157–202.

[3] A. Borel, *Groupes linéaires algébriques*, Ann. of Math. **64** (1956) 20–82.

[4] A. Borel & R. Remmert, *Über kompakte homogene Kählersche mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **145** (1962) 429–439.

[5] E. Calabi, *On Kähler manifolds with vanishing canonical class*, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, 1957, 78–89.

[6] J. Cheeger & D. Gromoll, *The structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968) 1147–1150, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geometry **6** (1971) pagination of the 5th article of the same issue.

[7] J. Eells & J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964) 109–160.

[8] P. Hartman, *On homotopic harmonic maps*, Canad. J. Math. **19** (1967) 673–687.

[9] S. Kobayashi, *Geometry of bounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959) 267–290.

[10] ——, *On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor*, Ann. of Math. **74** (1961) 570–574.

[11] A. Lichnerowicz, *Isométries et transformations analytiques d'une variété kählérienne compacte*, Bull. Soc. Math. France **87** (1959) 427–437.

[12] ——, *Variétés complexes et tenseur de Bergmann*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15** (1965) 345–407.

[13] ——, *Variétés kählériennes et première classe de Chern*, J. Differential Geometry **1** (1967) 195–223.

[14] ——, *Kähler manifolds and first Chern class*, Colloquium Stanford-Berkeley, Octobre, 1967.

[15] ——, a) *Sur les applications harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **267** (1968) 548–553; b) *Variétés kählériennes à première classe de Chern positive ou nulle*, C. R. Acad. Sci. Paris **268** (1969) 876–880; c) *Applications harmoniques dans un tore*, C. R. Acad. Sci. Paris **269** (1969) 912–916.

[16] Y. Matsushima, *Holomorphic vector fields and the first Chern class of a Hodge manifold*, J. Differential Geometry **3** (1969) 477–480.

[17] S. B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*. Duke Math. J. **8** (1941) 401–404.

[18] V. A. Toponogov, *Riemannian spaces which contain straight lines*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **37** (1964) 287–290.

COLLÈGE DE FRANCE, PARIS