J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
5 (1971) 451-466

ÜBER DIE INTEGRATION VON DIFFERENTIALFORMEN MITTELS INTEGRALGEOMETRISCHER MASSE

KLAUS HORNEFFER

Einleitung

Die klassische Cauchy-Crofton-Formel drückt die Länge einer glatten Kurve in der Ebene durch das Integral über die Anzahl der Schnittpunkte mit Geraden aus. Allgemeiner läßt sich das Volumen V einer kompakten orientierten k-dimensionalen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit N des $\boldsymbol{R}^n$ folgendermaßen erhalten. Ist G die Mannigfaltigkeit orientierter $(n-k)$-dimensionaler Teilräume von $\boldsymbol{R}^n$ und μ ein passend normiertes invariantes Maß auf G, so ist

$$V = \int_G \Big(\sum_{p \in g \cap N} 1 \Big) \mu(dg) . \tag{1}$$

Diese Formel vom Croftonschen Typ läßt sich als Spezialfall einer anderen erhalten, die das Integral einer Differentialform k-ten Grades über N angibt. Ist T das positive normierte Feld tangentialer k-Vektoren von N, so ist

$$\int_N \omega = \int_G \Big(\sum_{p \in g \cap N} \langle T, \omega \rangle_p \Big) \mu(dg) . \tag{2}$$

Setzt man für die Differentialform ω das Volumenelement τ von N, so ergibt sich gerade (1). Die Bedeutung der Formel (2) liegt darin, daß als Integrationsbereich nicht mehr die möglicherweise komplizierte Mannigfaltigkeit N, sondern die ganz einfach gebaute Mannigfaltigkeit G auftritt. Eine ähnliche Formel, die auf Maak zurückgeht, steht im Mittelpunkt dieser Arbeit.

Man betrachte das Integral $\int_N d\omega$ über eine orientierte kompakte Untermannigfaltigkeit N mit orientiertem Rand ∂N. Die allgemeine Stokesformel liefert dann über die Formel (2) die Gleichheit der entsprechenden rechten Seiten, also eine Relation zweier integralgeometrischer Integrale. Man frage sich, ob es möglich ist, diese beiden Integrale direkt, also ohne Benutzung der Stokesformel ineinander überzuführen. Man würde dann einen integralgeomerischen Beweis der Stokesformel erhalten.

Communicated by W. P. A. Klingenberg October 21, 1970.

In der angedeuteten Form läßt sich dieses Programm nicht durchführen. Man kann jedoch (2) durch eine verwandte Formel ersetzen, die sich im Hinblick auf die Stokesformel als zweckmäßig erweist. Diese Formel unterscheidet sich von (2) dadurch, daß an Stelle des k-Vektorfeldes T, das nur von der Untermannigfaltigkeit N abhängt, ein k-Vektorfeld genommen wird, das auch vom schneidenden Teilraum g abhängt. Sei dazu für einen $(n-k)$-dimensionalen orientierten Teilraum g von $\boldsymbol{R}^n$ und einen Punkt p von N mit $S_p(g)$ derjenige auf g totalsenkrechte normierte k-Vektor bezeichnet, der mit T_p ein positives Skalarprodukt hat. Für fast alle g ist $S_p(g)$ wohldefiniert. Mit einem wieder geeignet normierten invarianten Maß μ' auf G gilt jetzt

$$(3) \qquad \int_N \omega = \int_G \Big(\sum_{p \in g \cap N} \langle S(g), \omega \rangle_p \Big) \mu'(dg) .$$

In einer Arbeit aus dem Jahre 1939 (vgl. [11]) hat Maak vorgeschlagen, das Integral einer Differentialform mit Hilfe einer solchen Formel zu definieren, falls die übliche Methode versagt, also die Untermannigfaltigkeit z.B. nicht differenzierbar ist. Als Integrationsbereiche treten dort an Stelle differenzierbarer Untermannigfaltigkeiten gewisse Systeme von Teilmengen des $\boldsymbol{R}^n$ auf. Im Unterschied dazu interessieren wir uns für den differenzierbaren Fall. Die Formel (3) nimmt daher hier den Charakter eines Satzes an. Wir beweisen sie in § 4.

Die Formel (3) gibt eine Darstellung des Integrals der Differentialform ω, die einen direkten integralgeometrischen Beweis der Stokesformel ermöglicht. Um diesen zu erhalten, wird das Integral $\int_{\partial N} \omega$ mittels der Gleichung (3) in ein Integral über eine gewisse andere Mannigfaltigkeit übergeführt. Diese besteht aus Paaren (g, h) von $(n-k-1)$- und $(n-k)$-dimensionalen orientierten Teilräumen des $\boldsymbol{R}^n$, wobei g in h enthalten ist. Die Geometrie dieser Mannigfaltigkeit sorgt dafür, daß die Stokesformel auf den Satz von Fubini zurückgeführt werden kann. Im Gegensatz zu den üblichen Beweisen der Stokesformel braucht dabei nur vorausgesetzt zu werden, daß die Mannigfaltigkeit von der Klasse C^1 ist (vgl. Krickeberg [9]).

Um die angedeuteten Beweise durchführen zu können, ist es nötig, die integralgeometrischen Maße in geeigneter Weise zu erklären. Dies geschieht in den §§ 1 und 2. Die dabei verwendete Methode wird im § 1 bereitgestellt. Er dient unter anderem dazu, weniger klar umrissenen Begriffen der Integralgeometrie, wie "Wahlinvarianz" und "Dichte", einen exakten Sinn zu geben. Überdies geben wir hier ein allgemeines Verfahren an, das der Mehrzahl der integralgeometrischen Definitionen invarianter Maße zugrunde liegt. Die Maße der klassischen Integralgeometrie werden aus Differentialformen auf gewissen Faserbündeln erhalten, die wahlinvariant d.h. projizierbar sind. Das Hauptergebnis des § 1 besteht dann darin, daß diese in gewissem Sinn globale Eigenschaft durch eine lokale und schließlich durch eine infinitesimale ersetzt werden kann (vgl. (1.1) und (1.2)).

Für die Formel (3) wie für den Beweis der Stokesformel ist es wesentlich, daß die auftretenden Maße als Produktmaße interpretiert werden können. Der Beweis der Stokesformel beruht dabei auf einem auch sonst in der klassischen Integralgeometrie vielfach vorliegendem Sachverhalt. Dieser besteht darin, daß eine Mannigfaltigkeit geometrischer Objekte sich als Bündelraum zweier wesentlich verschiedener Faserbündel darstellen läßt, denen zwei verschiedene Zerlegungen des betreffenden Maßes entsprechen.

1. Integralgeometrische Maße

Die klassische Integralgeometrie beschäftigt sich mit Maßen für geometrische Objekte, die einen homogenen Raum einer gewissen Gruppe bilden. Die Theorie des Haarschen Maßes auf lokalkompakten Gruppen gibt eine vollständige Antwort auf die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit invarianter Maße auf homogenen Räumen (vgl. Bourbaki [2, p. 59], Weil [17, p. 45]). Die klassische Integralgeometrie benutzt jedoch zumeist eine genauere Kenntnis der invarianten Maße, als sie der erwähnte Existenz- und Eindeutigkeitssatz liefert. Sie hat es i. allg. mit homogenen Räumen zu tun, die differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind, auf denen eine (klassische) Liesche Gruppe operiert. In diesem Fall gibt der Satz von Chern (vgl. Chern [6, p. 180], Santaló [12, p. 93]) ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz invarianter Maße. Wir werden nun ein allgemeines Verfahren beschreiben, welches die in der Integralgeometrie üblichen expliziten Konstruktionen invarianter Maße wie auch den Satz von Chern als Spezialfälle liefert.

Auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (wir setzen diese stets als Hausdorffsch und parakompakt voraus) kann man Differentialformen und Dichten zur Definition von Maßen verwenden (vgl. Loomis-Sternberg [10, p. 408 ff.]). Die in der Integralgeometrie benutzten Maße werden in der Regel durch Differentialformen maximalen Grades gegeben, deren absoluter Betrag als Dichte (i.s. von [10]) genommen wird. Es werden jedoch i. allg. nicht Differentialformen auf der Mannigfaltigkeit M der geometrischen Objekte selbst betrachtet, sondern solche auf geeigneten Faserbündeln über M.

Unter einem C^r-Faserbündel verstehen wir im folgenden stets ein Tripel (B, M, π), das aus zwei C^r-Mannigfaltigkeiten B und M sowie einer surjektiven C^r-Abbildung $\pi\colon B \to M$ besteht, die lokal trivial ist. Ist (B, M, π) ein C^r-Faserbündel, G eine Liegruppe, so sagen wir, G operiere auf dem Faserbündel, falls G auf den Mannigfaltigkeiten B und M (von links) durch C^r-Diffeomorphismen transitiv operiert und die Operation der Gruppe überdies mit der Projektion verträglich ist.

In der klassischen Integralgeometrie besteht der Basisraum aus den eigentlich interessierenden geometrischen Objekten. Man muß also invariante Differentialformen auf der Basis M studieren. Statt dessen ist es oft zweckmäßiger, ein Faserbündel über M zu betrachten, auf dem die fragliche Gruppe operiert und dessen Bündelraum eine besonders einfache Struktur hat, zum Beispiel selbst eine Liegruppe ist. Zur Definition invarianter Differentialformen auf der Basis benutzt man dann sogenannte "wahlinvariante" Differentialformen auf dem Bündelraum. Das sind die "Dichten" für die geometrischen Objekte von M im Sinne der klassischen Integralgeometrie (vgl. Blaschke [4], [5]).

Sei (B, M, π) ein C^r-Faserbündel, auf dem die Liegruppe G operiert. Dann heiße eine Differentialform Ω vom Grade k auf dem Bündelraum B *projizierbar*, falls eine Differentialform ω vom Grade k auf der Basis M existiert, derart daß gilt

$$\pi^*\omega = \Omega .$$

Die Differentialform Ω heiße *wahlinvariant*, falls gilt: Sind ϕ_U bzw. ϕ_V (differenzierbare) Schnitte in B über den offenen Mengen $U, V \subset M$, so ist in $U \cap V$

$$\phi_U^*\Omega = \phi_V^*\Omega .$$

Eine Differentialform Ω vom Grade $k \leq \dim M$ auf dem Bündelraum B ist nun genau dann projizierbar, wenn sie wahlinvariant ist. Dann existiert genau eine Differentialform ω auf der Basis M mit $\pi^*\omega = \Omega$. Ist überdies Ω invariant unter der Gruppe G, so ist es auch ω.

Ein lokaler Diffeomorphismus φ von B heißt vertikal, falls gilt $\pi \circ \varphi = \pi$. Unter gewissen Voraussetzungen über das Bündel ist die Wahlinvarianz einer Differentialform äquivalent der Invarianz gegenüber allen lokalen vertikalen Diffeomorphismen. Wir machen die in der klassischen Integralgeometrie stets erfüllte Voraussetzung, daß auf der typischen Faser F eine Liegruppe transitiv operiert. Dann existiert zu je zwei Schnitten im Bündel (B, M, π) ein lokaler vertikaler Diffeomorphismus, der die Schnitte ineinander überführt und es gilt also

Satz 1.1. *Ist (B, M, π) ein C^r-Faserbündel, auf dessen typischer Faser eine Liegruppe G transitiv operiert, so ist eine Differentialform Ω vom Grade $k \leq \dim M$ auf B wahlinvariant d.u.n.d. wenn für jeden lokalen vertikalen Diffeomorphismus φ von B gilt*

$$\varphi^*\Omega = \Omega .$$

Ist X ein vertikales Vektorfeld auf B und bezeichnet L_X die Lie-Derivation, so folgt aus Satz 1.1: Ist Ω wahlinvariant, so gilt $L_X\Omega = 0$. Für die Anwendungen ist es wünschenswert, daß auch die Umkehrung dieser Aussage gilt. Das ist in der Tat unter geringen zusätzlichen Voraussetzungen der Fall.

Satz 1.2. *Es sei (B, M, π) ein C^r-Faserbündel mit typischer Faser F. Auf F operiere die zusammenhängende Liegruppe G differenzierbar und transitiv. Sei Ω eine Differentialform auf B derart, daß für alle vertikalen Vektorfelder X auf B gilt*

$$L_X \Omega = 0 \ .$$

Dann ist Ω wahlinvariant.

Beweis. Ist $t \mapsto \phi_t$ eine lokale einparametrige Gruppe vertikaler Diffeomorphismen über der offenen Menge $U \subset M$, so ist $\phi_t^* \Omega = \phi_0^* \Omega$. Wenn wir zeigen könnten, daß die Pseudogruppe vertikaler Diffeomorphismen durch ihre einparametrigen Untergruppen erzeugt wird, so wären wir fertig. Dies ist im allgemeinen nicht richtig. In unserer besonderen Situation kommen wir jedoch mit einer schwächeren Behauptung aus. Zu jedem Paar von Schnitten in B existiert nämlich ein lokaler vertikaler Diffeomorphismus, der in einer lokalen Trivialisierung die Gestalt

$$(m, f) \mapsto (m, \gamma(m)f)$$

mit einer differenzierbaren Abbildung $\gamma\colon U \to G$ hat und der die Schnitte ineinander überführt. Es läßt sich leicht zeigen, daß lokale Diffeomorphismen dieser speziellen Form durch einparametrige Untergruppen erhältlich sind.

Bemerkung. Im Fall des Satzes von Chern handelt es sich darum, die Wahlinvarianz einer speziellen Differentialform Ω auf einer Liegruppe G, aufgefaßt als Hauptfaserbündel über einem homogenen Raum G/H, zu zeigen. Der Satz 1.2 zeigt, daß die Form wahlinvariant genau dann ist, wenn sie geschlossen ist (vgl. Santaló [12, p. 92]).

2. Dichte für k-Ebenen

Die unter der Bewegungsgruppe invariante Dichte für k-dimensionale affine Teilräume des n-dimensionalen euklidischen Raumes wurde von Blaschke angegeben (vgl. Blaschke [4, p. 12], Santaló [12, p. 119]). Wir benötigen sie in einer besonderen Gestalt, die wir im folgenden erläutern wollen. Zunächst erklären wir die Dichte für Teilvektorräume.

Ist $\mathscr{E}$ ein n-dimensionaler orientierter euklidischer Vektorraum, so bezeichnen wir die euklidische Metrik auf $\mathscr{E}$ und den äußeren Algebren über $\mathscr{E}$ und $\mathscr{E}^*$ mit dem Symbol $(|)$. Für $0 \leq k \leq n$ sei $S_k(\mathscr{E})$ die Menge der normierten zerlegbaren k-Vektoren. Dann ist insbesondere $S_0(\mathscr{E}) = \{\pm 1\}$. Ist $e \in S_k(\mathscr{E})$, so sei $\bar{e}$ derjenige orientierte Vektorraum, dessen Vektoren x die Gleichung $x \wedge e = 0$ erfüllen und dessen Orientierung durch den k-Vektor e bestimmt ist. Die Abbildung $e \mapsto \bar{e}$ ist dann eine Bijektion von $S_k(\mathscr{E})$ auf die orientierte Grassmannmannigfaltigkeit der orientierten Teilvektorräume von $\mathscr{E}$, die wir in Zukunft mit $S_k(\mathscr{E})$ identifizieren wollen.

Sei im folgenden $0 < k < n$. Auf $S_k(\mathscr{E})$ operiert die spezielle orthogonale Gruppe $SO(\mathscr{E})$ in natürlicher Weise und zwar differenzierbar, effektiv und transitiv, so daß $S_k(\mathscr{E})$ isomorph dem homogenen Raum

$$\frac{SO(n)}{SO(k) \times SO(n-k)}$$

ist. Sei $V_n(\mathscr{E})$ die Stiefelmannigfaltigkeit der positiven orthonormierten n-Beine von $\mathscr{E}$. Auf $V_n(\mathscr{E})$ operiert $SO(n)$ effektiv und einfach transitiv. Ist $\pi\colon V_n(\mathscr{E}) \to S_k(\mathscr{E})$ die Abbildung $b = (b_1, \cdots, b_n) \mapsto b_1 \wedge \cdots \wedge b_k$, so wird $(V_n(\mathscr{E}), S_k(\mathscr{E}), \pi)$ ein Faserbündel mit typischer Faser $SO(k) \times SO(n-k)$. Ist $e_i\colon b \mapsto b_i$, so ist de_i eine $\mathscr{E}$-wertige Differentialform ersten Grades auf $V_n(\mathscr{E})$ und man erhält $\boldsymbol{R}$-wertige Differentialformen ersten Grades durch

$$\omega_{ij} := (de_i \,|\, e_j) \ , \qquad 1 \leq i < j \leq n \ .$$

Die ω_{ij} sind invariant unter $SO(\mathscr{E})$ und linear unabhängig; bei dem Isomorphismus $V_n(\mathscr{E}) \to SO(n)$ gehen sie daher in eine Basis der Maurer-Cartan-Formen auf $SO(n)$ über. Die Differentialform

$$\Omega^0_{\mathscr{E},k} := \bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=k+1}^{n} \omega_{ij}$$

vom Grad $k(n-k)$ auf $V_n(\mathscr{E})$ ist bekanntlich wahlinvariant (vgl. Santaló [12, p. 119]) und definiert daher eine Differentialform $\omega^0_{\mathscr{E},k}$ auf $S_k(\mathscr{E})$ mit

$$\pi^* \omega^0_{\mathscr{E},k} = \Omega^0_{\mathscr{E},k} \ .$$

Ist $\mathscr{E}$ der orientierte Vektorraum $\boldsymbol{R}^n$, so schreiben wir kurz $\omega^0_{n,k}$ für $\omega^0_{\boldsymbol{R}^n,k}$ und ebenso $\Omega^0_{n,k}$. $S_k(\mathscr{E})$ ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und besitzt als solche ein Volumenelement. Man kann zeigen, daß $\omega^0_{\mathscr{E},k}$ ein Volumenelement ist. Die gesuchte invariante *Dichte für Teilvektorräume* ist nun

$$\nu_{\mathscr{E},k} := |\omega^0_{\mathscr{E},k}| \ . \tag{2.1}$$

Die Dichte für affine Teilräume führen wir auf folgende Weise ein. Sei E ein n-dimensionaler affiner orientierter euklidischer Punktraum. Der zugehörige orientierte euklidische Vektorraum sei $\mathscr{E}$. Unter einer k-Ebene in E verstehen wir für $0 \leq k \leq n$ einen orientierten k-dimensionalen affinen Teilraum von E. Insbesondere ist eine 0-Ebene in E ein Punkt mit Vorzeichen und eine n-Ebene der Raum E selbst oder der entgegengesetzt orientierte Raum. Die Menge der k-Ebenen in E bezeichnen wir mit $G(E, k)$. Ist E der orientierte $\boldsymbol{R}^n$, so schreiben wir kurz $G(n, k)$.

Für $0 < k < n$ operiert die Bewegungsgruppe $iSO(E)$ von E transitiv und effektiv auf $G(E, k)$, man kann daher $G(E, k)$ mit

$$\frac{iSO(n)}{iSO(k) \times SO(n-k)}$$

identifizieren. $G(E, k)$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $(k+1)(n-k)$.

Um eine Dichte auf $G(E, k)$ für $O < k < n$ zu definieren, betrachten wir folgendes Faserbündel über $G(E, k)$. Der Bündelraum sei $E \times S_k(\mathscr{E})$. Die Projektion sei die Abbildung $\pi: (p, e) \mapsto p + \bar{e}$, wo $\bar{e}$ den durch e definierten orientierten Vektorraum bezeichnet. $(E \times S_k(\mathscr{E}), G(E, k), \pi)$ ist ein affines Bündel; ein Faserbündel, dessen Fasern affine Räume sind. Auf ihm operiert die Bewegungsgruppe $iSO(E)$ differenzierbar von links. Denn sei $u \in iSO(\mathscr{E})$ und $u_0 \in SO(\mathscr{E})$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann sei $u(p, e) := (up, u_0 e)$. Die Projektion π ist mit der Operation von $iSO(E)$ verträglich.

Die $k(n-k)$-Form $\omega^0_{\mathscr{E},k}$ auf $S_k(\mathscr{E})$ definiert durch $pr_2^* \omega^0_{\mathscr{E},k}$ eine Differentialform vom Grade $k(n-k)$ auf dem Bündelraum $E \times S_k(\mathscr{E})$. Um dort eine $(k+1)(n-k)$-Form zu erhalten, geben wir eine $(n-k)$-Form $\alpha_{E,k}$ an. Ihr äußeres Produkt mit $pr_2^* \omega^0_{\mathscr{E},k}$ soll dann zur Definition der Dichte auf $G(E, k)$ dienen.

Auf $E \times S_k(\mathscr{E})$ existiert eine kanonische $(n-k)$-Form. Sei nämlich $(p, e) \in E \times S_k(\mathscr{E})$. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$\overset{n-k}{\mathscr{T}}_{(p,e)}(E \times S_k(\mathscr{E})) \cong \bigoplus_{r=0}^{n-k} \left(\overset{n-k-r}{\mathscr{T}_p} E \otimes \overset{r}{\mathscr{T}_e} S_k(\mathscr{E}) \right).$$

Dabei ist $\overset{r}{\mathscr{T}_p} M = \overset{r}{\wedge} \mathscr{T}_p M$ gesetzt und $\mathscr{T}_p M$ der Tangentialraum von M in p. Da E ein affiner Raum ist, ist $\mathscr{T}_p E$ in natürlicher Weise isomorph dem Vektorraum $\mathscr{E}$ von E und also $\overset{n-k-r}{\mathscr{T}_p} E \cong \overset{n-k-r}{\wedge} \mathscr{E}$. Durch die Projektion auf die erste Komponente erhalten wir mit diesen Isomorphismen eine Abbildung

$$\varphi: \overset{n-k}{\mathscr{T}}_{(p,e)}(E \times S_k(\mathscr{E})) \to \overset{n-k}{\wedge} \mathscr{E} ,$$

die also einem $(n-k)$-Tangentialvektor von $E \times S_k(\mathscr{E})$ einen $(n-k)$-Vektor in $\mathscr{E}$ zuordnet. Die Abbildung

$$\overset{n-k}{\mathscr{T}}_{(p,e)}(E \times S_k(\mathscr{E})) \ni v \mapsto (*e \,|\, \varphi(v)) \in \boldsymbol{R}$$

definiert eine Differentialform $\alpha_{E,k}$ vom Grad $n-k$ auf $E \times S_k(\mathscr{E})$. Offensichtlich ist $\alpha_{E,k}$ differenzierbar und invariant unter $iSO(E)$. Wir erklären jetzt die $(k+1)(n-k)$-Form $\tilde{\omega}_{E,k}$ auf $E \times S_k(\mathscr{E})$ durch

$$\tilde{\omega}_{E,k} := \alpha_{E,k} \wedge pr_2^* \omega^0_{\mathscr{E},k} .$$

Mit Hilfe von Satz 1.2 läßt sich leicht einsehen, daß $\tilde{\omega}_{E,k}$ wahlinvariant ist. Sei daher $\omega_{E,k}$ die durch

$$\pi^* \omega_{E,k} = \tilde{\omega}_{E,k}$$

definierte Form auf $G(E, k)$. Als invariante *Dichte für die Mannigfaltigkeit der k-Ebenen* erhalten wir

$$\mu_{E,k} := |\omega_{E,k}| . \tag{2.2}$$

Im Fall $k = 0$ besteht $G(F, 0)$ aus zwei Exemplaren von E und ist also isomorph $E \times S_0(\mathscr{E})$. Wir können als Dichte von $G(E, 0)$ das invariante Punktmaß in E nehmen, das durch das Volumenelement $\omega_{E,0}$ definiert wird. Für $k = n$ besteht $G(E, n)$ aus zwei Elementen. Hier nehmen wir das diskrete Maß, das jedem Element den Wert 1 zuordnet.

3. Dichte für inzidierende k- und l-Ebenen

In diesem Paragraphen führen wir invariante Dichten ein, die wir nicht für die Croftonformel (§ 4) sondern nur für den Beweis der Stokesformel (§ 5) benötigen.

Es sei E wieder ein orientierter euklidischer Punktraum, $\dim E = n$, $0 \leq k < l \leq n$. Unter einer k- l-Ebene in E wollen wir ein Paar (g, h) verstehen, bei dem g eine k-Ebene, h eine l-Ebene in E und g in h enthalten ist. Es sei $G(E, k, l)$ die Menge der k- l-Ebenen in E. Für $0 < k < l < n$ operiert die Bewegungsgruppe $iSO(E)$ transitiv und effektiv auf $G(E, k, l)$. Die Fixgruppe eines Elementes (g, h) ist isomorph $iSO(k) \times SO(l - k) \times SO(n - l)$, daher ist $G(E, k, l)$ isomorph

$$\frac{iSO(n)}{iSO(k) \times SO(l - k) \times SO(n - l)}$$

und eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $(l - 1)(n - l) + (k + 1)(l - k)$.

$G(E, k, n)$ besteht aus zwei Exemplaren von $G(E, k)$ und hat also die Dimension $(k + 1)(n - k)$. Auf $G(E, 0, l)$ operiert für $l < n$ die inhomogene orthogonale Gruppe $iO(E)$ transitiv, falls man die Operation auf orientierten Punkten durch

$$(p, \pm 1) \mapsto (up, \pm \det u_0)$$

für $u \in iO(E)$ und zugehöriger linearer Abbildung $u_0 \in O(E)$ erklärt. Daher ist $G(E, 0, l)$ isomorph

$$\frac{iO(n)}{SO(l) \times SO(n - l)}$$

und hat die Dimension $(l + 1)(n - l) + l$.

Um invariante Dichten auf $G(E, k, l)$ zu definieren, benutzen wir ein Verfahren, das von dem in § 1 beschriebenen verschieden ist. Es ist nämlich $(G(E, k, l), G(E, k), pr_1)$ ein Faserbündel mit typischer Faser $S_{l-k}(\boldsymbol{R}^{n-k})$. Auf der Basis $G(E, k)$ haben wir ebenso wie auf der typischen Faser $S_{l-k}(\boldsymbol{R}^{n-k})$ bereits invariante Dichten erklärt. Es ist daher zu vermuten, daß eine invariante Dichte auf dem Bündelraum existiert, die in einer lokalen Trivialisierung mit dem Produkt der Dichten von Basis und Faser übereinstimmt. Dies ist in der Tat der Fall, wie der folgende Satz lehrt, den man etwa bei Vidal [16] findet.

Satz 3.1. *Sei (B, M, π, F, G) ein differenzierbares Faserbündel mit Strukturgruppe G. Seien weiter ω eine Differentialform vom Grade $n = \dim M$ auf M, α eine Differentialform vom Grade $r = \dim F$ auf F und es sei α invariant bezüglich der Strukturgruppe G. Dann existiert genau eine Differentialform Ω vom Grade $n + r = \dim B$ auf dem Bündelraum B derart, daß gilt: Ist (U, ρ) eine lokale Trivialisierung über $U \subset M$, so ist in $\pi^{-1}(U)$*

$$\Omega = \rho^*(pr_1^*\omega \wedge pr_2^*\alpha) .$$

Das Bündel $(G(E, k, l), G(E, k), pr_1)$ hat nun als Strukturgruppe gerade $SO(n-k)$. Da die Differentialform $\omega^0_{n-k,l-k}$ auf der typischen Faser $S_{l-k}(\boldsymbol{R}^{n-k})$ den Grad $(n - l)(l - k)$ hat und invariant bezüglich $SO(n - k)$ ist und da die Differentialform $\omega_{E,k}$ auf $G(E, k)$ den Grad $(k + 1)(n - k)$ besitzt, liefert der Satz 3.1 eine Differentialform $\omega_{E,k,l}$ vom Grade $(k+1)(n-k) + (n-l)(l-k) = (l + 1)(n - l) + (k + 1)(l - k) = \dim G(E, k, l)$ und also eine Dichte

$$\mu_{E,,kl} := |\omega_{E,k,l}| , \tag{3.2}$$

die invariant unter $iSO(n)$ ist.

Die Mannigfaltigkeit koinzidierender k- und l-Ebenen $G(E, k, l)$ läßt sich nun auch als Bündel über $G(E, l)$ mit der Projektion pr_2 und der typischen Faser $G(l, k)$ auffassen. Auf $G(l, k)$ haben wir die unter $iSO(l)$ invariante Differentialform $(k + 1)(l - k)$-ten Grades $\omega_{l,k}$ und auf der Basis die Differentialform $\omega_{E,l}$. Beide zusammen liefern daher nach Satz 3.1 eine Differentialform höchsten Grades $\omega'_{E,k,l}$ auf $G(E, k, l)$ und eine Dichte

$$\mu'_{E,k,l} := |\omega'_{E,k,l}| , \tag{3.3}$$

welche ebenfalls invariant unter $iSO(n)$ ist. Da auf einem homogenen Raum bis auf konstante Faktoren nur eine invariante Dichte existieren kann, gilt mit einer Konstanten $c > 0$

$$\mu'_{E,k,l} = \mu_{E,k,l} .$$

Man kann direkt zeigen (dies ist allerdings nicht ganz trivial), daß $\omega_{E,k,l}$ und $\omega'_{E,k,l}$ bis auf das Vorzeichen übereinstimmen und also $c = 1$ ist.

Die Dichte $\mu_{E,k,l}$ auf $G(E, k, l)$ haben wir lokal aus dem Produkt der Dichten auf der Basis $G(E, k)$ und der Faser $S_{l-k}(\boldsymbol{R}^{n-k})$ bzw. der Basis $G(E, l)$ und der Faser $G(l, k)$ erhalten. Man kann daher lokal den Satz von Fubini anwenden und die Integration auf $G(E, k, l)$ duch sukzessive Integration auf der Basis und der Faser ausdrücken. Da wir mit einer einzigen Trivialisierung den ganzen Bündelraum bis auf eine Nullmenge als Produkt schreiben können, gilt dies Ergebnis auch global. Wir erhalten also den

Satz 3.4. *Es sei f eine bezüglich $\mu_{E,k,l}$ auf $G(E, k, l)$ integrierbare Funktion. Für $g \in G(E, k)$ sei der zum Vektorraum g_0 von g senkrechte komplementär* *orientierte Vektorraum mit* $g_0^\perp$ *bezeichnet und für* $e \in S_{l-k}(g_0^\perp)$ *sei* $h(e)$ *der von* g *und* e *aufgespannte orientierte affine Teilraum von* $G(E, l)$. *Dann ist*

$$\int_{G(E,k,l)} f(g, h)\mu_{E,k,l}(d(g, h)) = \int_{G(E,k)} \left(\int_{S_{l-k}(g_0^\perp)} f(g, h(e))\nu_{g_0^\perp, l-k}(de)\right)\mu_{E,k}(dg)$$
$$= \int_{G(E,l)} \left(\int_{G(h,k)} f(g, h)\mu_{h,k}(dg)\right)\mu_{E,l}(dh) .$$

4. Die Croftonformel

Die klassische Cauchy-Crofton-Formel läßt sich so verallgemeinern, daß sie das Volumen einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\boldsymbol{R}^n$ durch ein Integral über $(n - k)$-dimensionale affine Teilräume ausdrückt. Auf ähnliche Weise werden wir eine beliebige Differentialform k-ten Grades über eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit integrieren.

Dazu erklären wir den orientierten Durchschnitt zweier orientierter Teilräume V, W des orientierten euklidischen Vektorraums $\mathscr{E}$ auf folgende Weise. Seien $e \in S_k(\mathscr{E})$ und $f \in S_l(\mathscr{E})$ die unter Hinzunahme der Orientierungen von V und W eindeutig bestimmten Elemente mit $\bar{e} = V$ und $\bar{f} = W$. Wir setzen voraus, daß V und W den ganzen Raum $\mathscr{E}$ aufspannen. Dann ist der zerlegbare $(k + l - n)$-Vektor

$$*e \lrcorner f ,$$

der durch die Gleichung

$$(x \,|\, *e \lrcorner f) = (x \wedge *e \,|\, f)$$

für $x \in \bigwedge^{k+l-n} \mathscr{E}$ definiert ist, von Null verschieden und erzeugt den Vektorraum $V \cap W$ (vgl. Bourbaki [1, p. 112]). Wir können daher $V \cap W$ durch die Festsetzung orientieren, daß $*e \lrcorner f$ positiv sein soll. Ist $k + l - n = 0$, so ist $*e \lrcorner f \in \boldsymbol{R}$ und sein Vorzeichen orientiert den 0-dimensionalen Vektorraum $V \cap W = \{0\}$.

Ist N eine k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit des $\boldsymbol{R}^n$, so ist für fast alle $g \in G(n, n - k)$ der Durchschnitt $g \cap N$ leer oder nulldimensional. Wir können dann einen Punkt $p \in g \cap N$ orientieren, indem wir ihm die Orientierung des Durchschnitts der Tangentialräume in p geben. Ist T das positive normierte k-Tangentialfeld von N und wird der Vektorraum g_0 von g durch den normierten zerlegbaren Vektor $e \in S_{n-k}(\boldsymbol{R}^n)$ bestimmt, so ist der orientierte Durchschnitt $g \cap \mathscr{T}_p N$ durch $*e \lrcorner T_p$ bestimmt. Wir bezeichnen das konstante k-Vektorfeld auf $\boldsymbol{R}^n$, das zu g_0 orthogonal und komplementär ist, mit $V(g)$; hier ist also $V(g) = *e$. Dann ist die Orientierung von $g \cap N$ gegeben durch

$$\varepsilon(p, g) := sgn(V(g) \,|\, T_p) . \tag{4.1}$$

Schließlich sei noch $O_{n,k}$ das Volumen der orientierten Grassmannmannigfaltigkeit $S_k(\boldsymbol{R}^n)$. $O_n := O_{n,1}$ ist dann das Volumen der Sphäre S^{n-1}. Mit diesen Festsetzungen können wir unsere Croftonformel angeben.

Satz 4.2. *Es sei N eine orientierte k-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit $(r \geq 1)$ des $\boldsymbol{R}^n$ mit oder ohne Rand, $0 \leq k \leq n$. Ist ω eine C^s-Differentialform $(s \geq 0)$ vom Grad k in $\boldsymbol{R}^n$, so gilt*

$$\int_N \omega = \frac{\binom{n}{k}}{O_{n,k}} \int_{G(n,n-k)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p, g)\langle V(g), \omega\rangle_p \, \mu_{n,n-k}(dg) \; .$$

Beweis. Im Fall $k = 0$ oder $k = n$ ist nichts zu beweisen. Sei daher $0 < k < n$. Wir ersetzen die Mannigfaltigkeit $G(n, n-k)$ durch eine andere, indem wir jede $(n-k)$-Ebene so oft zählen, wie die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit N angibt. Sei also

$$\tilde{N} := \{(p, g) \mid p \in g \cap N, g \in G(n, n-k)\} \; .$$

Wir zeigen weiter unten, daß $\tilde{N}$ eine C^r-Mannigfaltigkeit ist.

Die Funktion $\varepsilon\langle V, \omega\rangle$ ist auf $N \times G(n, n-k)$ erklärt und fast überall stetig. Da $\tilde{N} \subset N \times G(n, n-k)$, können wir das Integral

$$I := \int_{\tilde{N}} \varepsilon\langle V, \omega\rangle pr_2^* \mu \; , \qquad \mu := \mu_{n,n-k} \; ,$$

betrachten. Wir wollen zeigen, daß I und $\int_N \omega$ im wesentlichen übereinstimmen. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\phi \colon N \times S_{n-k}(\boldsymbol{R}^n) \to \tilde{N}$$
$$(p, e) \mapsto (p, p + \bar{e}) \; .$$

ϕ ist eine Bijektion. Wir können daher $\tilde{N}$ zu einer C^r-Mannigfaltigkeit machen, indem wir verlangen, daß ϕ ein Diffeomorphismus sein soll. Dann sind auch die Abbildungen pr_1 und pr_2 auf $\tilde{N}$ differenzierbar. Es ist also $\tilde{N}$ diffeomorph einer Produktmannigfaltigkeit.

Der Transformationssatz liefert nun

$$I = \int_{\tilde{N}} \varepsilon\langle V, \omega\rangle pr_2^* \mu = \int_{N \times S_{n-k}(\boldsymbol{R}^n)} (\varepsilon\langle V, \omega\rangle) \circ \phi \cdot \phi^* pr_2^* \mu \; .$$

Es ist $(\varepsilon\langle V, \omega\rangle) \circ \phi(p, e) = sgn(*e \mid T_p)\langle *e, \omega_p\rangle$ und $\phi^* pr_2^* \mu_{n,n-k} = (\iota, id)^* \alpha_{n,n-k} \wedge pr_2^* \omega^0_{n,n-k}$. Nun ist für $v \in \mathscr{T}_{(p,e)}(N \times S_{n-k}(\boldsymbol{R}^n))$ und $\alpha := \alpha_{n,n-k}$ gerade $\langle v, (\iota, id)^* \alpha_{(p,e)}\rangle = (*e \mid \varphi((\iota, id)_{*(p,e)} v))$, wo ι die Injektion $N \to \boldsymbol{R}^n$ und φ, abgesehen von den natürlichen Isomorphismen, die Projektion pr_1 auf die erste Komponente ist. Damit folgt $\langle v, (\iota, id)^*\alpha_{(p,e)}\rangle = (*e \mid pr_{1*(p,e)}v)$. Die Abbildung $pr_{1*(p,e)}\colon \mathscr{T}_{(p,e)}(N \times S_{n-k}(\boldsymbol{R}^n)) \to \mathscr{T}_pN$ läßt sich auch so geben. Ist T das positive normierte k-Tangentialfeld von N und τ das Volumenelement von N, so ist $pr_{1*} = pr_1^*\tau \otimes T$. Damit folgt $(\iota, id)^*\alpha_{(p,e)} = (*e \mid T_p)pr_1^*\tau_p$ und

$$\psi^* pr_2^*\mu|_{(p,e)} = |(*e \mid T_p)|\,|pr_1^*\tau \wedge pr_2^*\omega^0_{n,n-k}|_{(p,e)}\ .$$

Daher ist $I = \int\limits_{N\times S_{n-k}(\boldsymbol{R}^n)} (*e \mid T_p)\langle *e, \omega_p\rangle\, |pr_1^*\tau \wedge pr_2^*\omega^0_{n,n-k}|\,(d(p,e))$ und mittels des Satzes von Fubini, falls wir $\nu = \nu_{n,n-k} = |\omega^0_{n,n-k}|$ setzen,

$$I = \int\limits_N \tau \int\limits_{S_{n-k}(\boldsymbol{R}^n)} (*e \mid T)\langle *e, \omega\rangle \nu(de)\ .$$

Um das Integral über $S_{n-k}(\boldsymbol{R}^n)$ zu berechnen, benutze man, daß die Abbildung

$$\beta\colon \overset{k}{\wedge}\boldsymbol{R}^n \times \overset{k}{\wedge}\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}\ ,$$
$$(x, y) \mapsto \int\limits_{S_{n-k}(\boldsymbol{R}^n)} (*e \mid x)(*e \mid y)\nu(de)\ ,$$

eine symmetrische Bilinearform ist, die invariant unter $SO(n)$ ist. Man erhält

$$\beta(x, y) = \frac{O_{n,k}}{\binom{n}{k}}(x \mid y)$$

und

$$I = \frac{O_{n,k}}{\binom{n}{k}}\int\limits_N \tau\langle T, \omega\rangle = \frac{O_{n,k}}{\binom{n}{k}}\int\limits_N \omega\ .$$

Wenden wir jetzt den allgemeinen Transformationssatz (den man etwa aus Federer [7, p. 243] gewinnt) auf die Abbildung $pr_2\colon \tilde{N} \to G(n, n-k)$ an, so folgt die Behauptung des Satzes.

5. Integralgeometrischer Beweis der Stokesformel

Wir wollen jetzt unsere Croftonformel einerseits, die Ergebnisse über die Dichten auf der Mannigfaltigkeit $G(n, k, l)$ koinzidierender k- und l-Ebenen andererseits ausnutzen, um die allgemeine Stokesformel für C^1-Untermannigfaltigkeiten des $\boldsymbol{R}^n$ zu beweisen.

Wir zeigen zunächst, daß das Integral einer Differentialform über den Rand

∂N einer $(k+1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit N des $\boldsymbol{R}^n$ in ein Integral über $G(n, n-k-1, n-k)$ übergeführt werden kann. Der Rand ∂N der Untermannigfaltigkeit N werde dabei wie üblich so orientiert, daß gilt: Ist w ein positiver k-Tangentialvektor von ∂N in $p \in \partial N$, v ein äußerer Tangentialvektor von N in p, so ist $v \wedge w$ ein positiver $(k+1)$-Tangentialvektor von N in p. Ist $h \in G(n,k)$, $g \in G(n,l)$ und $l < k$, so bezeichne $V^h(g)$ das in h zu g totalsenkrechte normierte konstante $(k-l)$-Vektorfeld in $\boldsymbol{R}^n$. Speziell ist also $V^{\boldsymbol{R}^n}(g) = V(g)$.

Satz 5.1. *Es sei $0 \leq k < n$. Ist N eine kompakte orientierte $(k+1)$-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit von $\boldsymbol{R}^n (r \geq 1)$ mit orientiertem Rand ∂N, ist ferner ω eine C^r-Differentialform k-ten Grades auf $\boldsymbol{R}^n$, so gilt*

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k} O_{n-k}} \int_{G(n,n-k-1,n-k)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p,g) V^h_p(g) \cdot \langle V(h), \omega \rangle \mu_{n,n-k-1,n-k}(d(g,h)) .$$

Beweis. Für $k = 0$ ist N eine orientierte Kurve und $G(n, n-1, n)$ besteht aus zwei Exemplaren von $G(n, n-1)$. ω ist eine differenzierbare Funktion f. Außerdem ist $O_{n,0} = 2$ und $V(h) = \pm 1$, je nachdem ob h mit E oder mit dem entgegengesetzt orientierten Raum übereinstimmt. $V^h(g)$ ist entsprechend gleich $\pm V(g)$. Also lautet in diesem Fall die Aussage des Satzes

$$\int_{\partial N} f = \frac{n}{O_n} \int_{G(n,n-1)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p,g) \langle V(g), df \rangle_p \, \mu_{n,n-1}(dg) .$$

Nach Satz 4.2 ist die rechte Seite $\int_N df$. Der Hauptsatz über Kurvenintegrale liefert also den Satz 5.1 für den Fall $k = 0$.

Wir setzen jetzt $0 < k < n$ voraus. Dann gilt nach Satz 4.2

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}}{O_{n,k}} \int_{G(n,n-k)} \sum_{p \in h \cap \partial N} \varepsilon(p,h) \langle V(h), \omega \rangle_p \, \mu_{n,n-k}(dh) .$$

Falls $h \cap N$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von N ist, gibt $\varepsilon(p,h)$ gerade die Orientierung von $h \cap \partial N$ und diese stimmt mit derjenigen von $\partial(h \cap N)$ überein. Für fast alle $h \in G(n, n-k)$ gilt daher mit dem Hauptsatz über Kurvenintegrale

$$\sum_{p \in h \cap \partial N} \varepsilon(p,h) \langle V(h), \omega \rangle_p = \int_{h \cap N} d\langle V(h), \omega \rangle . \tag{5.2}$$

Nach Satz 4.2 ist dann

$$\int_{h \cap N} d\langle V(h), \omega\rangle$$
$$= \frac{n-k}{O_{n-k}} \int_{G(h, n-k-1)} \sum_{p \in g \cap (h \cap N)} \varepsilon^h(p, g) V_p^h(g) \langle V(h), \omega\rangle \mu_{h, n-k-1}(dg) .$$

Hierin ist nach (4.1) $\varepsilon^h(p, g) = \operatorname{sgn}(V^h(g) \,|\, S)_p$, wenn S das positive normierte Tangentialfeld von $h \cap N$ ist. Ist T positives normiertes $(k+1)$-Tangentialfeld von N, so ist $S = V(h) \lrcorner T$, also ist $\varepsilon^h(p, g) = \operatorname{sgn}(V^h(g) \wedge V(h) \,|\, T)_p$. Nun ist $V^h(g) \wedge V(h) = V(g)$, also $\varepsilon^h(p, g) = \operatorname{sgn}(V(g) \,|\, T)_p = \varepsilon(p, g)$.

Wir erhalten

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k} O_{n-k}} \int_{G(n, n-k)} \mu_{n, n-k}(dh)$$
$$\int_{G(h, n-k-1)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p, g) V_p^h(g) \langle V(h), \omega\rangle \mu_{h, n-k-1}(dg)$$

und daraus mit Satz 3.4 die Behauptung.

Wir können auf dieses Integral auch die andere Aussage des Satzes 3.4 anwenden und erhalten dann (wir identifizieren $e \in S^{n-1}$ mit dem konstanten Vektorfeld $\partial/\partial e$):

Korollar 5.3. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 5.1 *gilt*

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k} O_{n-k}} \int_{G(n, n-k-1)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p, g) \mu_{n, n-k-1}(dg)$$
$$\cdot \int_{S_1(g_0^\perp)} e\langle V(g) \llcorner e, \omega\rangle \nu_{g_0^\perp, 1}(de) .$$

Der Satz 4.2 liefert

$$\int_N d\omega = \frac{\binom{n}{k+1}}{O_{n, k+1}} \int_{G(n, n-k-1)} \sum_{p \in g \cap N} \varepsilon(p, g) \langle V(g), d\omega\rangle_p \, \mu_{n, n-k-1}(dg) .$$

Um die Stokesformel zu erhalten, müssen wir daher nur noch zeigen, daß mit einer geeigneten Konstanten c gilt

$$\langle V(g), d\omega\rangle = c \int_{S_1(g_0^\perp)} e\langle V(g) \llcorner e, \omega\rangle \nu_{g_0^\perp, 1}(de) .$$

Dazu benutzen wir das folgende

Lemma 5.4. *Es sei ω eine C^r-Differentialform $(n-1)$-ten Grades $(r \geq 1)$ in $\boldsymbol{R}^n$, S^{n-1} die Sphäre in $\boldsymbol{R}^n$, ν ihr Volumenelement, O_n ihr $(n-1)$-dimensionales Volumen. Ist $W \in \bigwedge^n \boldsymbol{R}^n$, so gilt*

$$\frac{n}{O_n} \int_{S^{n-1}} e\langle W \llcorner e, \omega \rangle \nu(de) = \langle W, d\omega \rangle .$$

Zum Beweis betrachte man die Abbildung

$$\varphi\colon \omega \mapsto \left(\frac{n}{O_n} \int_{S^{n-1}} e\langle * e, \omega \rangle \nu(de) \right) \tau$$

und stelle fest, daß $\varphi\omega = d\omega$ ist. Das Lemma läßt sich auch so formulieren. Ist X ein C^r-*Ve* ktorfeld in $\boldsymbol{R}^n$, $r \geq 1$, so ist

$$\operatorname{div} X = \frac{n}{O_n} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial}{\partial e}(e \mid X) de .$$

Satz 5.5. *Es sei N eine orientierte $(k+1)$-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit $(r \geq 1)$ des $\boldsymbol{R}^n$, ∂N ihr orientierter Rand. Ist ω eine C^r-Differentialform vom Grad k auf $\boldsymbol{R}^n$, so gilt die Stokesformel*

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega .$$

Beweis. Nach Korollar 5.3 und Lemma 5.4 ist

$$\int_{\partial N} \omega = \frac{\binom{n}{k}(n-k)}{O_{n,k} O_{n-k}} \frac{O_{k+1}}{k+1} \frac{O_{n,k+1}}{\binom{n}{k+1}} \int_N d\omega . \tag{5.9}$$

Wir müssen daher nur zeigen, daß

$$c := \frac{O_{k+1} O_{n,k+1}}{O_{n-k} O_{n,k}} = 1$$

ist. Dies kann etwa so geschehen.

Entweder setzt man als bekannt voraus, daß für $0 < k < n$ gilt

$$O_{n,k} = 2 \frac{O_n O_{n-1} \cdots O_{n-k+1}}{O_1 O_2 \cdots O_k}$$

(vgl. Steenrod [14, p.33 ff.]). Dann folgt tatsächlich $c = 1$. Oder wir wählen N

und ω speziell so, daß beide Seiten der Gleichung (5.9) explizit ausgerechnet werden können. Dazu kann N als Einheitskugel in $\boldsymbol{R}^{k+1} \subset \boldsymbol{R}^n$ und

$$\omega = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{k+1}$$

genommen werden.

Dieses Verfahren ist auch dann zu wählen, wenn man nicht die Gleichheit der Dichten $\mu_{E,k,l}$ und $\mu'_{E,k,l}$ benutzen will, wie wir es getan haben.

Literatur

[1] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique. Algèbre*, Hermann, Paris, 1958; Chap. III.
[2] ——, *Eléments de mathématique. Intégration*, Hermann, Paris, 1963; Chap. VII.
[3] ——, *Variétés différentielles et analytiques. Fasc. de résultats*, Hermann, Paris, 1967.
[4] W. Blaschke, *Integralgeometrie*, Hermann, Paris, 1935.
[5] ——, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Deutscher Verlag d. Wiss., Berlin, 1955.
[6] S. S. Chern, *On integral geometry in Klein spaces*, Ann. of Math. **43** (1942) 178–189.
[7] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, Berlin, 1969.
[8] J. L. Koszul, *Lectures on fibre bundles and differential geometry*, Tata Institute, Bombay, 1960.
[9] K. Krickeberg, *Über den Gaußschen und Stokesschen Integralsatz*. III, Math. Nachr. **12** (1954) 341–365.
[10] L. H. Loomis & S. Sternberg, *Advanced calculus*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.
[11] W. Maak, *Oberflächenintegral und Stokesformel im gewöhnlichen Raume*, Math. Ann. **116** (1939) 574–597.
[12] L. A. Santaló, *Introduction to integral geometry*, Hermann, Paris, 1953.
[13] I. M. Singer & S. Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan*. I, J. Analyse Math. **15** (1965) 1–114.
[14] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, Princeton, 1951.
[15] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
[16] E. Vidal, *Fragen in Zusammenhang mit den Maßen in Faserräumen*, Actas 2° colcquio internac. Geometria diferencial, Santiago de Campostela 1967 (1968), 59–63 (spanisch).
[17] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940.

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN