TOKYO J. MATH.
VOL. 1, NO. 2, 1978

Caractérisation des Problèmes Mixtes Bien Posés pour des Opérateurs Evolutifs à Coefficients Constants

Kôichi UCHIYAMA

Université Sophia

§ 1. Problèmes et résultats.

1.0. *Résumé.*

Ce travail est consacré à une étude des problèmes mixtes dans un quadrant pour les opérateurs scalaires non homogènes à coefficients constants.

Chazarain et Piriou [2][3] ont caractérisé les problèmes mixtes hyperboliques bien posés sous une hypothèse de Lopatinski non nécessairement uniforme pour les opérateurs homogènes à coefficients constants. En employant ainsi qu'eux la méthode introduite par Calderón pour le cas elliptique, nous étendons leurs résultats aux opérateurs non homogènes. D'autre part, nous étudions également les problèmes mixtes avec le bord caractéristique pour les opérateurs d'évolution non necéssairement hyperboliques.

Dans le § 2, nous étudions le projecteur de Calderón pour ces opérateurs. Dans le § 3, nous caractérisons les problèmes mixtes bien posés dans des espaces de Sobolev pour des opérateurs d'évolution. Cela donne dans le cas scalaire une démonstration rigoureuse d'un résultat de Hersh [4] concernant les systemes. Au § 4 nous démontrons une estimation de la solution du problème mixte hyperbolique pour un opérateur strictement hyperbolique, ainsi que Chazarain et Piriou [3].

Dans les articles prochains, nous ferons des applications aux problèmes mixtes hyperboliques avec le bord caractéristique. La partie essentielle de ce travail a été accomplie en 1977 a l'Université de Nice grace à une bourse du gouvernement français. L'auteur remercie vivement Monsieur J. Chazarain pour ses conseils.

1.1. *Enoncé des problèmes.*

Pour énoncer les problèmes et les principaux résultats, précisons

Reçu 10 mars, 1978
Revisè 4 septembre 1978

d'abord quelques notations:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^{n+1} &= \boldsymbol{R}^1_x \times \boldsymbol{R}^{n-1}_y \times \boldsymbol{R}^1_t \ni (x, y, t) \,, \\ &= \boldsymbol{R}^1_x \times \boldsymbol{R}^n_z \qquad \ni (x, z) \,, \\ \boldsymbol{R}^{n+1}_+ &= \boldsymbol{R}^+_x \times \boldsymbol{R}^n_z = \{(x, z) \in \boldsymbol{R}^{n+1};\ x>0\} \,, \\ \overline{\boldsymbol{R}^{n+1}_+} &= \overline{\boldsymbol{R}^+_x} \times \boldsymbol{R}^n_z = \{(x, z) \in \boldsymbol{R}^{n+1};\ x\geqq 0\} \,. \end{aligned}$$

Le dual de $\boldsymbol{R}^{n+1}_{x,z}$ est noté par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^{n+1} &= \boldsymbol{R}^1_\xi \times \boldsymbol{R}^{n-1}_\eta \times \boldsymbol{R}^1_\tau \ni (\xi, \eta, \tau) \,, \\ &= \boldsymbol{R}^1_\xi \times \boldsymbol{R}^n_\zeta \qquad \ni (\xi, \zeta) \,, \end{aligned}$$

et son complexifié sera noté par les même symbols (ξ, η, τ). On pose

$$D_x = \frac{\partial}{i\partial x} \,, \quad D_y = \left(\frac{\partial}{i\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{i\partial y_{n-1}}\right) \,, \quad D_t = \frac{\partial}{i\partial t} \,,$$

et

$$\gamma_k u = D^k_x u|_{x=0} \quad \text{pour} \quad u \in C^\infty(\boldsymbol{R}^{n+1}) \,.$$

Pour s un réel, posons

$$\begin{aligned} H_s(\boldsymbol{R}^n) = \{&v(y, t);\ v \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n) \ \text{ telle que} \\ &\|v\|^2_s = \iint_{\boldsymbol{R}^n} (1+|\eta|^2+|\tau|^2)^s |\hat{v}(\eta, \tau)|^2 \, d\eta d\tau < +\infty \Big\} \,.^{1)} \end{aligned}$$

Pour $s, r \in \boldsymbol{R}$, posons

$$\begin{aligned} H_{s,r}(\boldsymbol{R}^{n+1}) = \Big\{&u(x, y, t);\ u \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^{n+1}) \ \text{ telle que} \\ &\|u\|^2_{s,r} = \iint_{\boldsymbol{R}^{n+1}} (1+|\xi|^2+|\zeta|^2)^s (1+|\zeta|^2)^r |\hat{u}(\xi, \zeta)|^2 d\xi d\zeta < +\infty \Big\} \,. \end{aligned}$$

Pour $s, r \in \boldsymbol{R}$ et $\gamma>0$, posons $\zeta = (\eta, \sigma - i\gamma)$, $\hat{u}(\xi, \zeta) = \widehat{e^{-\gamma t} u}(\xi, \eta, \sigma)$ et

$$H_{s,r;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}) = \{u(x, y, t);\ e^{-\gamma t} u(x, y, t) \in H_{s,r}(\boldsymbol{R}^{n+1})\}$$

et

$$\|u\|^2_{s,r;\,\gamma} = \iiint_{\boldsymbol{R}^{n+1}} (1+|\xi|^2+|\zeta|^2)^s (1+|\zeta|^2)^r |\hat{u}(\xi, \zeta)|^2 \, d\xi d\eta d\sigma \,.$$

Posons de la même manière

$$H_{s;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^n) = \{v(y, t);\ e^{-\gamma t} v(y, t) \in H_s(\boldsymbol{R}^n)\}$$

---

1) $\hat{v}(\eta, \tau)$ désigne la transformée de Fourier ($-$Laplace) définie par $\iint_{\boldsymbol{R}^n} e^{-i(y\cdot\eta+t\tau)} v(y,t) dy dt$.

et

$$\langle v\rangle_{s;\gamma}^2=\iint_{R^n}(1+|\zeta|^2)^s|\hat{v}(\zeta)|^2 d\eta d\sigma .$$

Définissons les espaces dans $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ par

$$H_{s,r;\gamma}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})=\{u(x, y, t)|_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}};\ u\in H_{s,r;\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1})\}$$

et

$$|u|_{s,r;\gamma}=\inf\{||\tilde{u}||_{s,r;\gamma};\ \tilde{u}\in H_{s,r;\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}) \text{ et } \tilde{u}=u \text{ dans } \boldsymbol{R}_+^{n+1}\} .$$

Si $r=0$, on posera $H_{s;\gamma}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})=H_{s,0;\gamma}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ et $|u|_{s;\gamma}=|u|_{s,0;\gamma}$. Enfin, employons les notations

$$H_{\infty;\gamma}=\bigcap_{s\in\boldsymbol{R}}H_{s;\gamma} ,$$
$$H_{-\infty;\gamma}=\bigcup_{s\in\boldsymbol{R}}H_{s;\gamma} .$$

Dorénavant, soit $P(D_x, D_y, D_t)$ un opérateur différentiel à coefficients constants de degré m.

DEFINITION 1.1. Un polynôme $P(\xi, \eta, \tau)$ est évolutif en τ, si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(1.1) il existe une constante $\gamma_0(\geqq 0)$ telle que $P(\xi, \eta, \tau)\neq 0$ pour $(\xi, \eta, \tau)\in\boldsymbol{R}^n\times\{\tau\in\boldsymbol{C};\ \operatorname{Im}\tau<-\gamma_0\}$.

(1.2) le polynôme $P(\xi, \eta, \tau)$ est de la forme

$$P(\xi, \eta, \tau)=a\tau^p+\sum_{k=0}^{p-1}A_k(\xi, \eta)\tau^k ,$$

où a est une constante non nulle.
De plus, le polynôme $P(\xi, \eta, \tau)=\sum_{j=0}^q P_j(\eta, \tau)\xi^j$ $(q\leqq m)$ est dit normal en ξ, si

(1.3) le polynôme $P_q(\eta, \tau)$ vérifie (1.1). Le polynôme $P(\xi, \eta, \tau)$ est hyperbolique en τ, si $P(\xi, \eta, \tau)$ est évolutif en τ avec $P^0(0, 0, 1)\neq 0$ où P^0 est la partie principale de P.

REMARQUE. Si un polynôme $P(\xi, \eta, \tau)$ est hyperbolique en τ, il est forcément normal en ξ. En effect, $P_q(\eta, \tau)$ est hyperbolique en τ, ce qui a été remarqué par T. Kasahara.

On se donne μ' opérateurs différentiels à coefficients constants $B_j(D_x, D_y, D_t)=\sum_{k=0}^{m_j}B_{j,k}(D_y, D_t)D_x^k(j=0, 1, \cdots, \mu'-1;$ degré $B_j=b_j)$ d'ordre m_j par rapport à D_x.

On considère le problème mixte (P):

$$(P)\quad\begin{cases} P(D_x, D_y, D_t)u = f(x, y, t) & \text{pour } (x, y, t) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}\ ; \\ B_j(D_x, D_y, D_t)u|_{x=0} = g_j(y, t) & \text{pour } (y, t) \in \boldsymbol{R}^n\ ; \\ j=0, 1, \cdots, \mu'-1\ . \end{cases}$$

Plus précisément on considère les problèmes:

($P1$) Etant donné l'opérateur P évolutif en t normal en x, caractériser les opérateurs $B_j (j=0, 1, \cdots, \mu'-1)$ pour lesquels le problème (P) est bien posé dans l'espace de Sobolev $H_{\infty;\,\gamma}$.

($P2$) Dans le problème ($P1$) on suppose de plus que P est strictement hyperbolique en t. Caractériser B_j pour lesquels la solution $u \in H_{m,-1;\,\gamma}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ a une estimation de la forme

$$\begin{aligned}(1.4)\qquad &\gamma|u|^2_{m,-1;\,\gamma} + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u\rangle^2_{m-1-j;\,\gamma} \\ &\leqq \frac{C}{\gamma^{2\theta}}\left(\frac{1}{\gamma}|f|^2_{0,\theta;\,\gamma} + \sum_{j=0}^{\mu'-1} \langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\,\gamma}\right) \text{ avec } \theta \geqq 0\ .\end{aligned}$$

1.2. *Enoncé des résultats.*

Nous allons introduire la matrice de Lopatinski et le déterminant de Lopatinski.

Soit $P(\xi, \eta, \tau)$ évolutif en τ et normal en ξ. Pour $\zeta = (\eta, \tau) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times \{\tau \in \boldsymbol{C};\ \mathrm{Im}\,\tau < -\gamma_0\}$, on désigne par $\xi_j^+(\zeta)$ $(j=0, 1, \cdots, \mu-1)$ les zéros en ξ, distincts ou non, du polynôme $P(\xi, \eta, \tau)$ tels que $\mathrm{Im}\,\xi > 0$. Le nombre μ est indépendant de $\zeta = (\eta, \tau)$ grace aux hypothèses (1.1) et (1.3).

Dorénavant on fait l'hypothèse

$$(1.5)\qquad \mu' = \mu\ .$$

Pour $\zeta = (\eta, \tau) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times \{\tau \in \boldsymbol{C};\ \mathrm{Im}\,\tau < -\gamma_0\}$, posons

$$(1.6)\qquad P^+(\xi, \zeta) = \prod_{j=0}^{\mu-1} (\xi - \xi_j^+(\zeta))\ ,$$

et désignons par

$$(1.7)\qquad B_j'(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{\mu-1} B_{jk}'(\zeta)\xi^k$$

le reste de la division euclidienne, entre polynômes en ξ, de $B_j(\xi, \zeta)$ par $P^+(\xi, \zeta)$ $(j=0, 1, \cdots, \mu-1)$.

DEFINITION 1.2. On appelle matrice de Lopatinski la matrice carrée

$$(1.8)\qquad B'(\zeta) = (B_{j,k}'(\zeta))_{j,k=0,1,\cdots,\mu-1}\ ,$$

et déterminant de Lopatinski son déterminant

$$R(\zeta)=\det B'(\zeta)\ . \tag{1.9}$$

Pour le problème ($P1$) nous avons le

THEOREME I. *Sous les hypothèses* (1.1), (1.2), (1.3), *et* (1.5), *les deux assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *pour tout* $f\in H_{\infty;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$, $g=(g_j)\in H_{\infty;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{C}^\mu)$ *avec* $\gamma>\gamma_0$, *le problème* (P) *admet une solution unique* $u\in H_{\infty;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$.

(ii) $R(\zeta)\neq 0$ *pour* $\zeta=(\eta,\tau)\in\boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\tau\in\boldsymbol{C};\ \mathrm{Im}\,\tau<-\gamma_0\}$.

Le problème ($P1$) a été étudié dans un cadre plus général par Hersh [4]. Mais sa démonstration n'était pas complète. Dans le cas du système du premier ordre, une démonstration rigoureuse a été donnée par Kasahara [8]. R. Melrose a traité le même sujet que le nôtre, mais par une méthode différente.

Pour le problème ($P2$), nous généralisons au cas non homogène avec le bord non caractéristique le théorème 2 de Chazarain-Piriou [3]. Supposons que $m_j\leqq m-1$ pour $j=0,1,\cdots,\mu-1$.

THEOREME II. *On suppose* $P(\xi,\eta,\tau)$ *strictement hyperbolique en* τ *et le bord non caractéristique. Alors, sous l'hypothèse* (1.5), *deux assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *Il existe* $C>0$ *et* γ_1 *telles que pour* $\gamma>\gamma_1$, $f\in H_{0,\theta;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$, *et* $g_j\in H_{m-1-b_j+\theta;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^n)$ $(j=0,\cdots,\mu-1)$, *le problème* (P) *admet une solution unique* $u\in H_{m,-1;\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$, *qui vérifie* (1.4). *De plus, si* $f\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$, $g_j\in H_{\infty;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^n)$, *alors* $u\in H_{\infty;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$.

(ii) *La matrice inverse* $A=(A_{kj}(\zeta))$ *de* $B'(\zeta)$ *vérifie une majoration de la forme*

$$|A_{k,j}(\zeta)|\leqq C\frac{|\zeta|^{k-b_j+\theta}}{|\mathrm{Im}\,\tau|^\theta}\quad\text{pour } \zeta=(\eta,\tau)\in\boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\mathrm{Im}\,\tau<-\gamma_1\}\ . \tag{L_θ}$$

REMARQUE. θ s'interprète "la déviation" de la condition uniforme de Lopatinski. En effet, dans le cas $\theta=0$, l'inégalité (1.4) est stable sous la perturbation des termes inférieurs, aussi est (1.4) avec $\theta=0$ caractérisée par les problèmes (P, B) dont la partie homogène (P^0, B^0) vérifie (L_0). Autrement dit, (P, B) vérifie la condition uniforme de Lopatinski. Une autre caractérisation a été donnée par Agemi et Shirota [1].

On signale que si le bord est caractéristique, l'estimation caractérisée par (L_θ) subit une perte dépendante de (m, m_j) en direction tangentielle, ceci sera détaillé dans l'article prochain.

§ 2. Projecteur de Calderón.

2.1. *Potentiels de multi-couches.*

On fait quelques rappels sur la transformation de Fourier-Laplace des distributions. Pour simplicité, (x, y) est noté par y. La transformée de Fourier de $Q(y, t) \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^{n+1})$ est définie par

$$\mathscr{F}_{y,t}Q(\eta, \tau)=\int_{\boldsymbol{R}^{n+1}} e^{-i(\eta\cdot y+\tau t)}Q(y, t)dydt$$

et sera notée simplement $\hat{Q}(\eta, \tau)$ s'il n'y a pas de confusion. Si $\exp[\operatorname{Im}\tau t]Q(y, t) \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^{n+1}_{y,t})$, la transformée de Fourier-Laplace de Q est définie par

$$\mathscr{F}_{y,t}Q(\eta, \tau)=\mathscr{F}_{y,t}[\exp(\operatorname{Im}\tau t)Q(y, t)](\eta, \operatorname{Re}\tau) .$$

PROPOSITION 2.1. *Soit $q(\eta, \tau)$ une fonction continue dans $\boldsymbol{R}^n\times\{\tau \in \boldsymbol{C}; \operatorname{Im}\tau<-\gamma_0\}$ telle que*

(2.1) *pour toute $\gamma_1>\gamma_0$ il existe $C>0$ et b réelle telles que*

$$|q(\eta, \tau)|\leqq C(1+|\eta|+|\tau|)^b \quad \text{dans } \boldsymbol{R}^n\times\{\tau;\ \operatorname{Im}\tau<-\gamma_1\} ,$$

et que

(2.2) *pour chaque $\eta \in \boldsymbol{R}^n$ fixé $q(\eta, \tau)$ soit holomorphe en τ avec*

$$\operatorname{Im}\tau<-\gamma_1 .$$

Alors il existe $Q(y, t) \in \bigcap_{r>r_0} H_{-\infty,r}(\boldsymbol{R}^{n+1})$ unique telle que $\mathscr{F}Q(\eta, \tau)= q(\eta, \tau)$ dans $\boldsymbol{R}^n\times\{\tau; \operatorname{Im}\tau<-\gamma_0\}$. De plus, on a $\operatorname{supp} Q\subset\{(y, t) \in \boldsymbol{R}^{n+1}; t\geqq 0\}$.

Les details se trouvent dans Schwartz [11].

On construit d'abord une solution fondamentale de $P(D)$.

LEMME 2.2. *Soit $P(\xi, \eta, \tau)$ évolutif par rapport à τ. Alors on a*

(2.3) $|P(\xi, \eta, \tau)|\geqq|a|\,|\operatorname{Im}\tau+\gamma_0|^p$ pour $(\xi, \eta, \tau) \in \boldsymbol{R}^n\times\{\tau; \operatorname{Im}\tau<-\gamma_0\}$.

DEMONSTRATION. $|P(\xi, \eta, \sigma-i\gamma)|=|a| \prod_{j=1}^p |\gamma-\gamma_j(\xi, \eta, \sigma)| \geqq |a| \prod_{j=1}^p|\gamma-\operatorname{Re}\gamma_j(\xi, \eta, \sigma)|\geqq|a| \prod_{j=1}^p |\gamma-\gamma_0|$. c.q.f.d.

De la proposition et de ce lemme, on déduit la

PROPOSITION 2.3. *Soit $P(\xi, \eta, \tau)$ évolutif par rapport à τ. Alors il existe $E(x, y, t) \in \bigcap_{r>r_0} H_{-\infty,r}(\boldsymbol{R}^{n+1})$ unique telle que*

(i) $P(D_x, D_y, D_t)E=\delta(x, y, t)$,

(ii) $\mathscr{F}E(\xi, \eta, \tau)=[P(\xi, \eta, \tau)]^{-1}$ *pour* $(\xi, \eta) \in \boldsymbol{R}^n$, $\operatorname{Im}\tau<-\gamma_0$,

(iii) $\operatorname{supp} E\subset\{(x, y, t); t\geqq 0\}$.

Soit $u \in C^\infty(\boldsymbol{R}^{n+1})$. On note

$$u^0(x, y, t) = \begin{cases} u(x, y, t) & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \, . \end{cases} \tag{2.4}$$

Alors on a la formule des sauts pour $P(D_x, D_y, D_t) = \sum_{k=0}^q P_k(D_z) D_x^k$:

$$P(u^0) = (Pu)^0 + \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{l=0}^{q-1-j} P_{j+l+1}(D_z)(D_x^j \delta(x) \otimes \gamma_l u) \, . \tag{2.5}$$

On désigne pour $v = (v_0, v_1, \cdots, v_{q-1}) \in C^\infty(\boldsymbol{R}_z^n; \boldsymbol{C}^q)$,

$$\tilde{P}v = \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{l=0}^{q-1-j} P_{j+l+1}(D_z)(D_x^j \delta(x) \otimes v_l(z)) \, . \tag{2.6}$$

REMARQUE 2.4. La formule des sauts (2.5) est valable pour $u \in H_{m,s;\gamma}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ pour $s \in \boldsymbol{R}$:

$$P(u^0) = (Pu)^0 + \tilde{P}\gamma u \tag{2.5$'$}$$

où $\gamma u = (\gamma_0 u, \cdots, \gamma_{q-1} u) \in \prod_{j=0}^{q-1} H_{m+s-j-1/2;\gamma}(\boldsymbol{R}^n)$.

Nous allons étudier la représentation de la solution $Pu = 0$ par les potentiels de multi-couches, c'est-à-dire,

$$u(x, y, t)|_{x>0} = E * \tilde{P}\gamma u \, , \tag{2.7}$$

où E est une solution fondamentale de P.

LEMME 2.5. *Soit* $P(\xi, \eta, \tau) = \sum_{j=0}^q P_j(\eta, \tau)\xi^j$ *un polynôme d'ordre* m *normal en* ξ *tel que* $P_q(\eta, \tau) \neq 0$ *pour* $(\eta, \tau) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times \{\operatorname{Im} \tau < -\gamma_0\}$. *Alors pour* $\gamma_1 > \gamma_0$, *il existe* $C > 0$ *et* d *telles que les zéros* $\xi_j(\zeta)$ $(j = 0, 1, \cdots, q-1)$ *de* $P(\xi, \zeta)$ *en* ξ *soient majorés par*

$$|\xi_j(\zeta)| \leqq C|\zeta|^d \quad \textit{pour} \ \zeta = (\eta, \tau) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times \{\operatorname{Im} \tau \leqq -\gamma_1\} \, .$$

DEMONSTRATION. Posons $S_t = \{(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Im} \xi, \eta, \operatorname{Re} \tau, \operatorname{Im} \tau) \in \boldsymbol{R}^{n+3};\ t^2 = |\eta|^2 + |\operatorname{Re} \tau|^2 + |\operatorname{Im} \tau|^2,\ \operatorname{Re} P(\operatorname{Re} \xi + i \operatorname{Im} \xi, \eta, \operatorname{Re} \tau + i \operatorname{Im} \tau) = 0,\ \operatorname{Im} P(\operatorname{Re} \xi + i \operatorname{Im} \xi, \eta, \operatorname{Re} \tau + i \operatorname{Im} \tau) = 0,\ \operatorname{Im} \tau \leqq -\gamma_1\}$ et $Q(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Im} \xi) = |\operatorname{Re} \xi|^2 + |\operatorname{Im} \xi|^2$. Alors S_t est non vide pour t assez grand, dont la projection R_t sur $(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Im} \xi)$ est compacte. Donc, d'après le lemme de Seidenberg-Tarski, il existe $C > 0$ et d telles que

$$|\xi_j(\zeta)|^2 \leqq \sup_{R_t} Q(\operatorname{Re} \xi, \operatorname{Im} \xi) = Ct^d(1 + o(1)) \, , \quad t \to \infty \, .$$

Comme $t = |\zeta| \geqq |\gamma_1 - \gamma_0| > 0$, on a l'inégalité demandée. c.q.f.d.

REMARQUE. En général, il est facile de montrer l'estimation $|P_q(\zeta)\xi_j(\zeta)|\leqq C|\zeta|^{m-q+1}$ (voir Hörmander [7] Lemme A.3). Si $P_q(\eta, \tau)$ est évolutif, c'est-à-dire, si $P_q(\eta, \tau)=a\tau^{p'}+\sum_{k=0}^{p'-1} A_k(\eta)\tau^k\neq 0(a\neq 0)$ pour $(\eta, \tau)\in \boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\mathrm{Im}\,\tau<-\gamma_0\}$, il découle du lemme 2.2

$$|\xi_j(\zeta)|\leqq\frac{C}{|\mathrm{Im}\,\tau|^{p'}}|\zeta|^{m-q+1} \quad \text{pour} \quad \zeta=(\eta, \tau)\in \boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\mathrm{Im}\,\tau\leqq-\gamma_1\}\,.$$

Pour $P(\xi, \eta, \tau)$ évolutif en τ et normal en ξ, on désigne par $C^+(\zeta)$ un contour de $\{\mathrm{Im}\,\xi\geqq 0\}$ entourant les zéros $\xi_j^+(\zeta)$ $j=0, 1, \cdots, \mu-1$ $(\mathrm{Im}\,\xi_j^+>0)$.

LEMME 2.6. *Soit*

$$F_j(\zeta)=\int_{C^+(\zeta)}\frac{\xi^j}{P(\xi, \zeta)}\frac{d\xi}{2\pi i}\,. \tag{2.8}$$

Si $P(\xi, \eta, \tau)$ est un polynôme évolutif en τ et normal en ξ, le second membre de (2.8) garde un sens pour $\zeta=(\eta, \tau)\in \boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\mathrm{Im}\,\tau<-\gamma_0\}$ et $F_j(\zeta)$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.1.

DEMONSTRATION. Grâce au lemme 2.5, on peut poser $C^+(\zeta)=\{-2C|\zeta|^d\leqq\xi\leqq 2C|\zeta|^d\}\cup\{\xi=re^{i\theta};\ r=2C|\zeta|^d,\ 0\leqq\theta\leqq\pi\}$. La majoration découle du lemme 2.2. c.q.f.d.

PROPOSITION 2.7. *Soit $P(\xi, \eta, \tau)$ évolutif en τ normal en ξ. Soient un entier $j\geqq 0$ et $\gamma>\gamma_0$. Pour $\psi\in H_{\infty;\,\gamma}(\boldsymbol{R}_z^n)$, la fonction $\varphi(x, z)=(E*(D^j\delta(x)\otimes\psi))|_{x>0}$ admet la transformée de Fourier-Laplace en z*

$$(\mathscr{F}_z\varphi)(x, \zeta)=(\mathscr{F}_z\psi)(\zeta)\int_{C^+(\zeta)}\frac{e^{ix\xi}\xi^j}{P(\xi, \zeta)}\frac{d\xi}{2\pi} \tag{2.9}$$

pour $\zeta=(\eta, \tau)\in \boldsymbol{R}^n\times\{\mathrm{Im}\,\tau<-\gamma_0\}$. De plus il existe une constante $C_{s',r}>0$ telle que

$$|\varphi|_{s',r;\,\gamma}\leqq\frac{C_{s',r}}{|\gamma-\gamma_0|^p}\langle\psi\rangle_{s'+r+j+1/2;\gamma} \tag{2.10}$$

si $s'+j<-1/2$.

DEMONSTRATION. Soit $h(x)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ telle que $h(x)\geqq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx=1$ avec $\mathrm{supp}\,h\subset]-\infty, 0]$. La transformée de Fourier-Laplace de $E*(h\otimes\psi)$ converge à (2.9) grâce au lemme 2.5 lorsque $h(x)$ tend vers $D^j\delta(x)$. L'estimation (2.10) découle du lemme 2.2 et de ce que

$$||D^j\delta(x)\otimes\psi||^2_{s',r;\,\gamma}\leqq C_{j,s'}\,||\psi||^2_{s'+r+j+1/2;\,\gamma}$$

si $s'+j<-1/2$. c.q.f.d.

PROPOSITION 2.8. *L'application* $\psi=(\psi_0,\cdots,\psi_{q-1})\mapsto\varphi=(E*\tilde{P}\psi)|_{x>0}$ *est continue de* $H_{\infty;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^n;\,\boldsymbol{C}^q)$ *dans* $H_{\infty;\,\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$ *avec* $\gamma>\gamma_0$.

DEMONSTRATION. Remarquons d'abord que pour tout $q=0,1,2,\cdots$,

$$c\,||\varphi||^2_{s,t;\,\gamma}\leqq\sum_{j=0}^{q}||D^j_x\varphi||^2_{s-q,t+q-j;\,\gamma}\leqq C\,||\varphi||^2_{s,t;\,\gamma}\,. \tag{2.11}$$

Remarquons ensuite que pour $\gamma>\gamma_0$, il existe $C>0$ et $b(\geqq0)$ telles que

$$|P_q(\eta,\tau)|\geqq C(1+|\eta|+|\tau|)^{-b}\quad\text{pour}\quad(\eta,\tau)\in\boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\operatorname{Im}\tau\leqq-\gamma\}\,, \tag{2.12}$$

ce qui est preuvé par le lemme de Seidenberg. (Si P_q verifie la condition (1.2), on a (2.12) avec $b=0$ comme lemme 2.2.)

Comme $P\varphi=0$, il découle de (2.12) et (2.11)

$$||D^q_x\varphi||^2_{s',t';\,\gamma}\leqq C\sum_{j=0}^{q-1}||D^j_x\varphi||^2_{s',t'+b+m-j;\,\gamma}\leqq C||\varphi||^2_{s'+q-1,t'+b+m-q+1;\,\gamma}\,. \tag{2.13}$$

En majorant le second membre de (2.11) $||D^q_x\varphi||^2_{s-q,t;\,\gamma}+\sum_{j=0}^{q-1}||D^j_x\varphi||^2_{s-q,t+q-j;\,\gamma}$ d'après (2.13) et (2.11), on en déduit $||\varphi||^2_{s,t;\,\gamma}\leqq C'||\varphi||^2_{s-1,t+b+m-q+1;\,\gamma}+C''||\varphi||^2_{s-1,t+1;\,\gamma}\leqq C'''||\varphi||^2_{s-1,t+b+m-q+1;\,\gamma}$. D'où on a $|\varphi|^2_{s;\,\gamma}=|\varphi|^2_{s,0;\,\gamma}\leqq C|\varphi|^2_{s-r,r(b+m-q+1);\,\gamma}$ pour tout $r=0,1,2,\cdots$ avec C positive indépendante de φ. En prenant r assez grand pour utiliser la proposition 2.7, on a enfin

$$|\varphi|_{s;\,\gamma}\leqq C|\varphi|_{s-r,r(b+m-q+1);\,\gamma}\leqq C\sum_{j+1+1\leqq q}\langle\psi_j\rangle_{s-r+r(b+m-q+1)+m-1-1/2}$$

c.q.f.d.

COROLLAIRE 2.9. *Pour tout entier* $k,j\geqq0$, *il existe* $E_{k,j}\in\bigcap_{\gamma>\gamma_0}H_{-\infty,\gamma}(\boldsymbol{R}^n)$ *telle que*

$$\gamma_k(E*(D^j\delta(x)\otimes\psi))=E_{k,j}*\psi$$

pour $\psi\in H_{\infty;\,\gamma}$ *avec* $\gamma>\gamma_0$. *Sa transformée de Fourier-Laplace est donnée par*

$$E_{k,j}(\zeta)=\int_{C+(\zeta)}\frac{\xi^{j+k}}{P(\xi,\zeta)}\frac{d\xi}{2\pi}\,. \tag{2.14}$$

2.2. *Projecteurs de Calderón.*

Soit $P(\xi,\zeta)=P(\xi,\eta,\tau)$ évolutif en τ et normal en ξ. On pose

$$Q_{k,l}(\zeta)=\int_{C^+(\zeta)}\frac{1}{P(\xi,\zeta)}\sum_{j=0}^{q-l-1}P_{j+l+1}(\zeta)\xi^{j+k}\frac{d\xi}{2\pi i} \tag{2.15}$$

pour $\zeta=(\eta,\tau)\in\boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\mathrm{Im}\,\tau<-\gamma_0\}$. $Q_{kl}(\zeta)$ est la transformée de Fourier-Laplace de la distribution unique $Q_{k,l}\in\bigcap_{\gamma>\gamma_0}H_{-\infty,\gamma}(\boldsymbol{R}^n)$ d'aprés le corollaire 2.9.

DEFINITION 2.1. On appelle projecteur de Calderón l'opérateur de convolution associé à la matrice carrée de distributions $Q=(Q_{k,l})_{k,l=0,1,\cdots,q-1}$.

On peut définir le projecteur de Calderón aussi pour $P^+(\xi,\zeta)=\prod_{j=0}^{\mu-1}(\xi-\xi_j^+(\zeta))$. En effect, en posant

$$P^+(\xi,\zeta)=\xi^\mu+P^+_{\mu-1}(\zeta)\xi^{\mu-1}+\cdots+P^+_1(\zeta)\xi+P^+_0(\zeta)\,, \tag{2.16}$$

on a le

LEMME 2.10. *$P^+_j(\zeta)$ et $P^+(\xi,\zeta)^{-1}$ vérifient les hypothèses de la proposition* 2.1.

DEMONSTRATION. L'holomorphie découle de ce que

$$\sum_{j=0}^{\mu-1}(\xi_j^+(\zeta))^k=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(\zeta)}\lambda^k\frac{\frac{d}{d\lambda}P(\lambda,\zeta)}{P(\lambda,\zeta)}\,d\lambda$$

$k=0,1,\cdots$. La majoration de $P_j^+(\zeta)$ découle du lemme 2.5. Celle de $P^+(\xi,\zeta)^{-1}$ découle du lemme de Seidenberg appliqué de la manière usuelle. En effet, on pose $A=\{(\xi_0,\cdots,\xi_{q-1},\eta,\tau)\in\boldsymbol{C}^q\times\boldsymbol{R}^{n-1}\times\boldsymbol{C};\ (-1)^jP_q(\eta,\tau)\sum_{l_1<l_2<\cdots l_j}\xi_{l_1}\cdots\xi_{l_j}=P_{q-j}(\eta,\tau)$ pour $1\leqq j\leqq q$, $\mathrm{Im}\,\xi_0\geqq\cdots\geqq\mathrm{Im}\,\xi_{q-1}$, $\mathrm{Im}\,\tau\leqq-\gamma\}$, et $P^+(\xi,\xi_0,\cdots,\xi_{\mu-1})=\prod_{j=0}^{\mu-1}(\xi-\xi_j)$. Alors $P^+(\xi,\zeta)=P^+(\xi,\xi_0,\cdots,\xi_{\mu-1})=0$ pour $(\xi,\xi_0,\cdots,\xi_{q-1},\eta,\tau)\in\boldsymbol{R}\times A$. c.q.f.d.

Ainsi, on définit

$$Q^+_{kl}(\zeta)=\int_{C^+(\zeta)}\frac{1}{P^+(\xi,\zeta)}\sum_{j=0}^{\mu-l-1}P^+_{j+l+1}(\zeta)\xi^{j+k}\frac{d\xi}{2\pi i}\,,$$

c'est la transformée de Fourier-Laplace de $Q^+_{kl}\in\bigcap_{\gamma>\gamma_0}H_{-\infty,\gamma}(\boldsymbol{R}^n)$. Par des calculs simples, on voit que $Q^+_{kl}(\zeta)=\delta_{kl}$, $0\leqq k,\ l\leqq\mu-1$. Posons

$$Q^+=(Q^+_{kl})_{\mu\leqq k\leqq q-1,0\leqq l\leqq\mu-1}\,.$$

Nous allons caractériser l'image du projecteur.

PROPOSITION 2.11. *Soit $P(\xi,\eta,\tau)$ évolutif en τ et normal en ξ. Les trois assertions suivantes sont équivalentes pour $\zeta\in\boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\mathrm{Im}\,\tau<-\gamma_0\}$.*

(i) *$Q(\zeta)w=w$ pour $w=(w',w'')\in\boldsymbol{C}^\mu\times\boldsymbol{C}^{q-\mu}=\boldsymbol{C}^q$.*

(ii) *La solution $U(x)$ du problème de Cauchy pour l'équation différentielle ordinaire en x de degré q*

$$\begin{cases} P(D_x, \zeta)U(x)=0 \\ \gamma U=(U(0), D_xU(0), \cdots, D_x^{q-1}U(0))=w \end{cases} \tag{2.17}$$

est bornée pour $x \geqq 0$.

(iii) $Q^+(\zeta)w'=w''$.

DEMONSTRATION. (i) implique (ii). Posons

$$V(x)=\int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}}{P(\xi, \zeta)} \sum_{j+l+1\leq q} P_{j+l+1}(\zeta)w_l\xi^j \frac{d\xi}{2\pi i}. \tag{2.18}$$

Alors $V(x)$ est borné pour $x\geqq 0$ et vérifie $P(D_x, \zeta)V=0$. $\gamma V=Q(\zeta)w=w$. La solution de (2.17) est unique: alors $V(x)=U(x)$.

(ii) implique (iii). Comme $U(x)$ est borné pour $x\geqq 0$, $U^0\in\mathscr{S}'(R)$. Donc, d'après la formule des sauts, $U(x)$ admet l'expression (2.18), d'où $P^+(D_x, \zeta)U(x)=0$. De la même manière, d'après la formule des sauts pour $P^+(D_x, \zeta)$, on a

$$U(x)=\int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}}{P^+(\xi, \zeta)} \sum_{j+l+1\leq \mu} P^+_{j+l+1}(\zeta)w_l\xi^j \frac{d\xi}{2\pi i}, \tag{2.19}$$

d'oú $\gamma''U=(D_x^\mu U(0), \cdots, D_x^{q-1}U(0))=Q^+(\zeta)w'$. D'autre part $\gamma U=w$ implique $\gamma''U=w''$.

(iii) implique (i). La solution du problème $P^+(D_x, \zeta)U=0$ avec $\gamma'U=(U(0), \cdots, D_x^{\mu-1}U(0))=w'\in C^\mu$ est toujours bornée. Donc elle admet l'expression (2.19), d'où $\gamma U=(\gamma'U, \gamma''U)=(w', Q^+(\zeta)w')=(w', w'')$. D'autre part, $P(D_x, \zeta)=P^-(D_x, \zeta)\cdot P^+(D_x, \zeta)U=0$. Puisque U est borné, U admet l'expression (2.18) d'où on a $\gamma U=Q(\zeta)\gamma U=Q(\zeta)w=w$. c.q.f.d.

REMARQUE 2.12. Soient $e_i (i=0, 1, \cdots, \mu-1)$ une base de C^μ. Alors $(e_i, Q^+(\zeta)e_i)_{i=0,\cdots,\mu-1}$ est une base de Image $Q(\zeta)$. En particulier dim Image $Q(\zeta)=\mu$.

Ainsi nous avons demontré la

PROPOSITION 2.13. *Soit $P(\xi, \eta, \tau)$ évolutif en τ et normal en ξ. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $v\in\prod_{j=1}^{q-1} H_{m+s-j-1/2;\,\gamma}(R^n)$ *vérifie* $Q*v=v$.

(ii) $u\in H_{m,s;\gamma}(R_+^{n+1})$ *vérifie* $P(D_x, D_y, D_t)u=0$ *avec* $v=\gamma u$.

(iii) $v=(v', v'')\in\prod_{j=0}^{\mu-1}\times\prod_{j=\mu}^{q-1} H_{m+s-j-1/2;\,\gamma}$ *vérifie* $Q^+*v'=v''$.

Si (i), (ii) *ou* (iii) *est vraie,* $u=E*\tilde{P}v|_{x>0}$.

§ 3. Problèmes mixtes pour les opérateurs évolutifs.

En utilisant les résultats obtenus dans § 2, nous allons étudier le problème $(P1)$ du § 1.

3.1. *Démonstration du théorème* I: (i)→(ii).
Soit $u(x, y, t) \in H_{\infty;\gamma}(R_+^{n+1})$ la solution unique du problème

$$(3.1) \qquad \begin{cases} P(D_x, D_y, D_t)u=0 \\ B_j(D_x, D_y, D_t)u=g_j(y, t) \text{ pour } x=0 \\ \text{où } g_j(y, t) \in H_{\infty;\gamma}(R^n),\ j=0, 1, \cdots, \mu-1. \end{cases}$$

D'après les propositions 2.7 et 2.13, la solution $u(x, z)$ admet la transformée de Fourier-Laplace en z notée par $\hat{u}(x, \zeta)$:

$$(3.2) \qquad \hat{u}(x, \zeta)=\int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}}{P(\xi, \zeta)} \sum_{j+l+1\leq q} P_{j+l+1}(\zeta)(\xi^j\gamma_l\hat{u}(\zeta)) \frac{d\xi}{2\pi i}$$

d'où on a

$$(3.3) \qquad \gamma_k\hat{u}(\zeta)=\int_{C^+(\zeta)} \frac{\xi^k}{P(\xi, \zeta)} \sum_{j+l+1\leq q} P_{j+l+1}(\zeta)(\xi^j\gamma_l\hat{u}(\zeta)) \frac{d\xi}{2\pi i} .$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{q-1} B_{s,k}(\zeta)\gamma_k\hat{u}(\zeta) &= \int_{C^+(\zeta)} \frac{B_s(\xi, \zeta)}{P(\xi, \zeta)} \sum_{j+l+1\leq q} P_{j+l+1}(\zeta)(\xi^j\gamma_l\hat{u}(\zeta)) \frac{d\xi}{2\pi i} \\ &= \int_{C^+(\zeta)} \frac{\sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{s,k}(\zeta)\xi^k}{P(\xi, \zeta)} \sum P_{j+l+1}(\zeta)(\xi^j\gamma_l\hat{u}(\zeta)) \frac{d\xi}{2\pi i} \\ &= g_s(\zeta),\ s=0, 1, \cdots, \mu-1 . \end{aligned}$$

Alors, on a un système d'équations linéaires:

$$(3.4) \qquad \sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{s,k}(\zeta)v_k(\zeta)=g_s(\zeta) , \quad s=0, 1, \cdots, \mu-1 .$$

Par l'hypothèse (i), ce système (3.4) est soluble pour tout $\zeta=(\eta, \tau)$ avec $\eta \in R^{n-1}$, $\operatorname{Im} \tau < -\gamma_0$. Cela nous montre que

$$(3.5) \qquad \det(B'_{s,k}(\zeta))_{s,k}=R(\zeta) \neq 0 .$$

3.2. *Démonstration du théorème* I: (ii)→(i).
On pose

$$\begin{cases} P^+(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^{\mu-1} (\xi - \xi_j^+(\zeta)) = \sum_{j=0}^{\mu} P_j^+(\zeta)\xi^j \\ L_k^+(\xi, \zeta) = \sum_{j=0}^{\mu-1-k} P_{j+k+1}^+(\zeta)\xi^j , \quad k = 0, 1, \cdots, \mu-1 . \end{cases} \tag{3.6}$$

On voit facilement que

$$\int_{C^+(\zeta)} \frac{B_s(\xi, \zeta) L_k^+(\xi, \zeta)}{P^+(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi i} = \int_{C^+(\zeta)} \frac{\sum_{j=0}^{\mu-1} B'_{s,j}(\zeta)\xi^j L_k^+(\xi, \zeta)}{P^+(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi i} = B'_{s,k}(\zeta) . \tag{3.7}$$

Comme $\det(B'_{s,k}(\zeta)) \neq 0$, il existe une matrice $A_{k,t}(\zeta)(k, t = 0, 1, \cdots, \mu-1)$ unique telle que

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{s,k}(\zeta) A_{k,t}(\zeta) = \delta_{s,t} . \tag{3.8}$$

Puisque $P^+(\xi, \zeta) = P^+(\xi, \eta, \tau)$ est holomorphe en τ, l'expression (3.7) montre que $B'_{s,k}(\zeta)$ est holomorphe, par conséquent, $A_{k,t}(\zeta)$ en est dans $\{\tau \in C;\ \mathrm{Im}\, \tau < -\gamma_0\}$. Pour appliquer la proposition 2.1, on utilise le

LEMME 3.1. *Pour $\gamma > \gamma_0$, il existe $C > 0$ et b telles que*

$$|A_{k,t}(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^b \quad \textit{pour } \zeta = (\eta, \tau) \in R^{n-1} \times \{\mathrm{Im}\, \tau < -\gamma\} . \tag{3.9}$$

DEMONSTRATION. Considérons une application, avec paramètre ζ, définie sur un voisinage de $(\xi_0^+(\zeta), \cdots, \xi_{\mu-1}^+(\zeta))$:

$$\begin{aligned} C^\mu \ni (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{\mu-1}) \mapsto & R(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{\mu-1};\ \zeta) \\ & = \det\left(\int_{C^+(\zeta)} \frac{B_s(\xi, \zeta) L_k^+(\xi, \zeta)}{\prod_{j=0}^{\mu-1} (\xi - \lambda_j)} \frac{d\xi}{2\pi i} \right) . \end{aligned}$$

Quand λ_i sont distincts deux à deux, on a

$$\begin{aligned} R(\lambda_0, \cdots, \lambda_{\mu-1}; \zeta) &= \det(B_s(\lambda_t, \zeta)) \textstyle\prod_{l<j} (\lambda_l - \lambda_j)^{-2} \times \\ & \times \begin{vmatrix} 1, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & 1 \\ \lambda_0, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \lambda_{\mu-1} \\ \vdots & & \\ (\lambda_0)^{\mu-1} & \cdots\cdots\cdots\cdots, & (\lambda_{\mu-1})^{\mu-1} \end{vmatrix} \\ &= \det(B_s(\lambda_t, \zeta)) \prod_{l<j} (\lambda_l - \lambda_j)^{-1} . \end{aligned}$$

Comme il existe un polynôme $D(\lambda, \zeta)$ tel que $\det(B_s(\lambda_t, \zeta)) = \prod_{l<j} (\lambda_l - \lambda_j) D(\lambda, \zeta)$, $R(\lambda, \zeta)$ est aussi un polynôme. On a donc $\det(B'_{s,k}(\zeta)) =$

$R(\xi_0^+(\zeta), \cdots, \xi_{\mu-1}^+(\zeta), \zeta)$. On peut enfin utiliser le lemme de Seidenberg de la manière habituèlle pour trouver C et b de (3.9). c.q.f.d.

REMARQUE. Le déterminant de Lopatinski est pareil à celui de Sakamoto [10], bien que la matrice de Lopatinski soit légèrement différente.

On construit d'abord la solution du problème (3.1). En posant $\hat{v}(\zeta)=(A(\zeta)\hat{g}(\zeta), Q^+(\zeta)A(\zeta)g(\zeta))$, on voit que $v(\zeta)\in \operatorname{Im} Q(\zeta)$ d'après la remarque 2.12, d'où $Q(\zeta)\hat{v}(\zeta)=\hat{v}(\zeta)$. Il existe $v(z)\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}^n: \boldsymbol{C}^q)$ dont la transformée de Fourier-Laplace est $\hat{v}(\zeta)$. Posons $u(x, z)=E*\tilde{P}(v(z))$. En vertu de la représentation de Fourier-Laplace, il en résulte que $P(D)u=0$ pour $x>0$, et que

$$\begin{aligned} B_j(D)u|_{x=0} &= \sum_{k=0}^{q-1} B_{jk}(D_z)\gamma_k u = \sum_{k=0}^{q-1} B_{jk}(D_z)\sum_{l=0}^{q-1} Q_{kl}*v_l \\ &= \sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{jk}*\sum_{l=0}^{q-1} Q_{kl}*v_l = \sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{jk}*v_k = \sum_{k=0}^{\mu-1} B'_{jk}*\sum_{l=0}^{\mu-1} A_{kl}*g_l = g_j\ . \end{aligned}$$

Ensuite la solution du problème (P): $Pu=f$, $Bu=g$, est donnée par $u=E*(\tilde{f}+\tilde{P}v)$ où $\tilde{f}\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1})$ est un prolongement de f et $v=(v', v'')=(A*(g-B(E*\tilde{f})), Q^+*A*(g-B(E*\tilde{f})))\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}^n; \boldsymbol{C}^q)$. A la fin, on montrera l'unicité. Soit $u(x, y, t)\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ telle que $P(D)u=0$, $B_j(D)u|_{x=0}=0$, $j=0, 1, \cdots, \mu-1$. La transformée de Fourier-Laplace partièlle $\hat{u}(x, \zeta)$ vérifie

$$\text{(3.10)}\qquad \begin{cases} P(D_x, \zeta)\hat{u}(x, \zeta)=0 \\ \sum_{k=0}^{q-1} B_{j,k}(\zeta)\gamma_k\hat{u}(\zeta)=0\ , \quad j=0, 1, \cdots, \mu-1\ . \end{cases}$$

On sait que pour chaque ζ, $(\gamma_0\hat{u}(\zeta), \cdots, \gamma_{q-1}\hat{u}(\zeta))\in \operatorname{Image} Q(\zeta)$ et que dim Image $Q(\zeta)=\mu$ d'après la remarque 2.12. Comme l'application linèaire

$$\operatorname{Image} Q(\zeta)\ni(\gamma_0\hat{u}, \cdots, \gamma_{q-1}\hat{u})\mapsto\Big(\sum_{k=0}^{q-1} B_{jk}(\zeta)\gamma_k\hat{u}(\zeta)\Big)_{0\leq j\leq\mu-1}\in \boldsymbol{C}^\mu$$

est surjective d'après l'existence de la solution $u(x, z)$, elle est forcément injective. Donc (3.10) implique $\hat{u}(x, \zeta)=0$, d'où $u(x, z)=0$.

Ainsi nous avons démontré le théorème I.

§ 4. Estimation des solutions.

En utilisant des résultats que nous avons obtenus dans les paragraphes précédents, nous pouvons avoir l'estimation des solutions. En effet, les raisonnemnets principales dans Chazarain-Piriou [3] (IIème partie) sont valables aussi dans notre cas. Donc, nous allons seulement reprendre des points essentiels.

4.1. *Expression de u et γu.*

Soit $P(\xi, \eta, \tau)$ évolutif en τ et normal en ξ. Considérons le problème mixte (P, B_j), on suppose que le déterminant de Lopatinski $R(\zeta)\neq 0$ pour $\zeta=(\eta, \tau)\in \boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\operatorname{Im}\tau<-\gamma_1\}$. Soit $u\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ la solution du problème:

$$(P)\begin{cases}P(D_x, D_y, D_t)u=f(x, y, t)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+^{n+1})\\ B_j(D_x, D_y, D_t)u|_{x=0}=g_j(y, t)\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}^n)\,, \quad j=0, 1, \cdots, \mu-1\,.\end{cases}$$

Pour exprimer u par f et par $\gamma_j u$, on décompose u en trois parties. D'abord posons

$$u_1=E*f\,. \tag{4.1}$$

En posant $v=u-u_1$, on a

$$\begin{cases}Pv=0\\ B_jv=g_j-B_j(E*f)\,, \quad j=0, 1, \cdots, \mu-1\,,\end{cases} \tag{4.2}$$

qui est décomposé en deux:

$$\begin{cases}Pu_2=0\\ \gamma_ju_2=\gamma_ju\,, \quad j=0, 1, \cdots, \mu-1\,,\end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases}Pu_3=0\\ \gamma_ju_3=-\gamma_j(E*f)\,, \quad j=0, 1, \cdots, \mu-1\,.\end{cases} \tag{4.4}$$

Ainsi $u=u_1+u_2+u_3$. Or, $Pu_i=0$ implique $P^+(D_x, \zeta)\hat{u}_i(x, \zeta)=0$ pour $i=2, 3$. A l'aide de la formule des sauts et des potentiels de multi-couches, on a

$$\hat{u}_2(x, \zeta)=\int_{C^+(\zeta)}\frac{e^{ix\xi}}{P^+(\xi, \zeta)}\sum_{j+l+1\leq\mu}P_{j+l+1}^+(\zeta)\xi^j\gamma_l\hat{u}(\zeta)\frac{d\xi}{2\pi i}\,, \tag{4.5}$$

et

$$\hat{u}_3(x, \zeta)=\int_0^\infty \hat{f}(x', \zeta)dx'\int_{C^+(\zeta)}\frac{e^{ix\xi}}{P^+(\xi, \zeta)}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{C^-(\zeta)}\frac{e^{-ix'\xi'}}{i(\xi'-\xi)P^-(\xi', \zeta)}\frac{d\xi'}{2\pi}\,, \tag{4.6}$$

où on a posé $P(\xi, \zeta)=P^+(\xi, \zeta)P^-(\xi, \zeta)$ et où $C^-(\zeta)$ désigne un contour de demi-plan $\{\operatorname{Im}\xi<0\}$ entourant les zéros $\xi_j^-(\zeta)$ $(j=0, 1, \cdots, q-\mu-1)$ du polynôme $P^-(\xi, \zeta)$. Ensuite, en profitant de ce que $R(\zeta)\neq 0$, on va exprimer $\gamma_ju(j=0, 1, \cdots, \mu, \cdots)$ par f et $g_j(0\leqq j\leqq \mu-1)$. Soit $(A_{kl}(\zeta))_{0\leqq k,l\leqq\mu-1}$ l'inverse de la matrice de Lopatinski $(B'_{kl}(\zeta))_{0\leqq k,l\leqq\mu-1}$. Posons

$$B_j(\xi, \zeta)=S_j(\xi, \zeta)P^+(\xi, \zeta)+B'_j(\xi, \zeta) \tag{4.7}$$

où

$$S_j(\xi, \zeta)=\sum_{h=0}^{q-1} S_{j,h}(\zeta)\xi^h .$$

Par une transformation de Fourier-Laplace partièlle de la formule des sauts, on a

$$P^+(D_x, \zeta)\hat{u}(x, \zeta)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}\hat{f}(\xi, \zeta)}{P^-(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi}$$

pour $x \geqq 0$. Ceci et les équation (P) et (4.7) nous montrent

$$\tag{4.8} \begin{cases} \gamma_k\hat{u}(\zeta)=\sum_{j=0}^{\mu-1} A_{k,j}(\zeta)\hat{g}_j(\zeta)-\sum_{j=0}^{\mu-1} A_{k,j}(\zeta)\sum_{h=0}^{q-1} S_{j,h}(\zeta) \times \\ \qquad \times \int_0^\infty \hat{f}(x, \zeta)dx \left(\int_{C^-(\zeta)} \frac{\xi^h e^{ix\xi}}{P^-(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi}\right) \\ k=0, 1, \cdots, \mu-1 . \end{cases}$$

Etant donné $P^+(D_x, \zeta)=D_x^\mu+\sum_{j=0}^{\mu-1} P_j^+(\zeta)D_x^j$, on a

$$\tag{4.9} \begin{cases} \gamma_{\mu+l}\hat{u}(\zeta)=\int_0^\infty \hat{f}(x, \zeta)dx \left(\int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{ix\xi}\xi^l}{P^-(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi}\right) \\ \qquad -\sum_{j=0}^{\mu-1} P_j^+(\zeta)\gamma_{j+l}\hat{u}(\zeta) \\ l=0, 1, \cdots . \end{cases}$$

4.2. *Estimation des solutions.*

Dans ce sous-paragraphe, on adjoute l'hypothèse:

(4.10) $P(\xi, \eta, \tau)$ est strictement hyperbolique en τ, et le bord est non caractéristique pour P: $P^0(1, 0, 0)=c\neq 0$.

Puisque $P(\xi, \eta, \tau)=c\xi^m+\sum_{j=0}^{m-1} P_j(\eta, \tau)\xi^j$, on a par le remarque au lemme 2.5 l'estimation

$$|\xi_j(\zeta)| \leqq C|\zeta| . \tag{4.11}$$

On déduit de (4.7) et (4.11),

$$|S_{j,h}(\zeta)| \leqq C|\zeta|^{b_j-(\mu+h)} , \quad j=0, 1, \cdots, \mu-1 . \tag{4.12}$$

LEMME 4.1. *Soit $P(\xi, \eta, \tau)$ un polynôme de degré m, strictement hyperbolique en τ. Alors il existe $C>0$ et $\gamma_1(\geqq 0)$ telles que pour tout*

$\gamma > \gamma_1$, *on ait*

(4.13) $$\gamma |u|^2_{m-1;\gamma} \leqq C\Big(\frac{1}{\gamma} |Pu|^2_{0;\gamma} + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u \rangle^2_{m-1-j;\gamma}\Big)$$

pour tout $u \in H_{m;\gamma}(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)$.

DEMONSTRATION. On peut adapter une technique classique de Leray pour établir l'inégalité (4.13) pour $P = P^0$. (Hörmander [5], Sakamoto [9], Chazarain-Piriou [3], Proposition 9.1.) Le terme perturbé est absorbé dans le premier membre de (4.13) lorsque γ_1 est assez grand. c.q.f.d.

On considère le problème

(4.14) $$\begin{cases} Pu = 0 \\ \gamma_0 u = \gamma_1 u = \cdots = \gamma_{\mu-2} u = 0 \\ \gamma_{\mu-1} u = g \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n) \,. \end{cases}$$

Le lemme 4.1 et (4.9) nous montrent que

(4.15) $$\gamma |u|^2_{m-1;\gamma} \leqq C \langle g \rangle^2_{m-\mu;\gamma} \,.$$

D'autre part, de $Pu = 0$ résulte que

(4.16) $$D_x^k \hat{u}(x, \zeta) = g(\zeta) \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi} \xi^k}{P^+(\xi, \zeta)} \frac{d\xi}{2\pi} \,.$$

Après la substitution de (4.16) à (4.15), un théorème des multiplicateurs de $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ nous donne la

PROPOSITION 4.2. *Sous les même hypothèses que le lemme* 4.1, *il existe* $C > 0$, γ_1 *telle que*

(4.17) $$\int_0^\infty \Big| \int_{C^+(\zeta)} \frac{e^{ix\xi} \xi^h}{P^+(\xi, \zeta)} d\xi \Big|^2 dx \leqq \frac{C}{\gamma} |\zeta|^{2(-\mu+h+1)}$$

(4.18) $$\int_0^\infty \Big| \int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix\xi} \xi^h}{P^-(\xi, \zeta)} d\xi \Big|^2 dx \leqq \frac{C}{\gamma} |\zeta|^{2(-m+\mu+h+1)}$$

pour $\gamma > \gamma_1 (h = 0, 1, \cdots, m-1)$.

On fait l'hypothèse sur la matrice inverse $A_{j,k}$:
(L_θ) il existe $C > 0$ et γ_1 telles que la matrice $A(\zeta)$ vérifie

$$|A_{j,k}(\zeta)| \leqq \frac{C}{\gamma^\theta} |\zeta|^{j-b_k+\theta}$$

pour $\zeta = (\eta, \tau) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times \{\operatorname{Im} \tau < -\gamma_1\}$, $j, k = 0, 1, \cdots, \mu-1$.

Alors, on a un théorème analogue au cas homogène avec le bord noncaractéristique, d'où découle le théorème II.

THEOREME 4.3. *Sous les hypothèses* (1.5) *et* (4.10), *les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe* $C>0$ *et* γ_1 *telles que pour* $\gamma>\gamma_1$, $f\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$, $g_j\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}^n)$ $(j=0,\cdots,\mu-1)$, *la solution unique* $u\in H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ *du problème* (P) *vérifie l'inégalité d'énergie*:

$$(4.19)\qquad \gamma|u|^2_{m,-1;\gamma}+\sum_{j=0}^{m-1}\langle\gamma_j u\rangle^2_{m-1-j;\gamma}\leqq\frac{C}{\gamma^{2\theta}}\left(\frac{1}{\gamma}|f|^2_{0,\theta;\gamma}+\sum_{j=0}^{\mu-1}\langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}\right).$$

De plus, si f *et* g *sont nulles pour* $t<0$, *alors* u *est nulle pour* $t<0$.

(ii) *La condition* (L_θ) *est satisfaite.*

DEMONSTRATION. (i)$\to$(ii). Soient $f=0$ et $g\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{C}^\mu)$. Posons $v=(v_0,\cdots,v_{\mu-1})=(\gamma_0 u,\gamma_1 u,\cdots,\gamma_{\mu-1}u)$. L'application $g\to v$ définit un opérateur continu de $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{C}^\mu)$ dans $C^\infty(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{C}^\mu)$ qui commute avce les translation. Donc il existe une matrice de distributions $A=(A_{j,k})_{j,k=0,1,\cdots,\mu-1}$ à support contenu dans $\{t\geqq 0\}$ telle que $v=A*g$. Alors on a

$$(4.20)\qquad A*(B'*v)=v$$

pour $g\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{C}^\mu)$, (voir la démonstration du théorème I). Comme B' est isomorphe de $H_{\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{C}^\mu)$, $\check{B}'$, définie par $\langle\check{B}'_{jk},\varphi\rangle=\int B'_{jk}(z)\varphi(-z)dz$ est isomorphe de $H_{\infty;-\gamma}(\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{C}^\mu)$. Considérons une suite $h_j\in C_0^\infty$ qui tend vers h dans $H_{\infty;-\gamma}(\boldsymbol{R}^n:\boldsymbol{C}^\mu)$. Il existe une suite u_j qui tend vers u dans $H_{\infty;-\gamma}$ telle que $\check{B}'*u_j=h_j$. Comme $\langle A,h_j\rangle=\langle A,\check{B}'*u_j\rangle=\langle A*B',u_j\rangle=u_j(0)$, on a $A_{jk}\in H_{-\infty;\gamma}(\boldsymbol{R}^n)$ pour tout $\gamma>\gamma_1$. Ainsi on a $A(\zeta)B'(\zeta)=\mathrm{id}$, d'où det $B'(\zeta)=R(\zeta)\neq 0$, pour $\zeta=(\eta,\tau)\in\boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\mathrm{Im}\,\tau<-\gamma_1\}$. D'autre part d'après (4.19) avec $f=0$, on a pour chaque (j,k),

$$\langle v_j\rangle^2_{m-1-j;\gamma}\leqq\frac{C}{\gamma^{2\theta}}\langle g_k\rangle^2_{m-1-b_k+\theta;\gamma},$$

d'où on a

$$\int|A_{j,k}(\zeta)g_k(\zeta)|^2(1+|\zeta|^2)^{m-1-j}d\eta d\sigma\leqq\frac{C}{\gamma^{2\theta}}\int|g_k(\zeta)|^2(1+|\zeta|^2)^{m-1-b_k+\theta}d\eta d\sigma.$$

Enfin on a

$$|A_{j,k}(\zeta)|\leqq\frac{C}{\gamma^\theta}|\zeta|^{j-b_k+\theta}\quad\text{pour } \gamma>\gamma_1.$$

(ii)$\to$(i). Grâce au lemme 4.1, on a seulement à majorer $\langle\gamma_j u\rangle^2_{m-1-j;\gamma} j=0, 1, \cdots, m-1$. Pour $j\leqq\mu-1$, (4.8) est majorée par (4.12) et la proposition 4.2. De même, pour $j\geqq\mu$, (4.9) est majorée consécutivement. c.q.f.d.

REMARQUE 4.1. Soit $R^0(\zeta)$ la partie principale de $R(\zeta)$. La condition (L_θ) implique $R^0(0, -i)\neq 0$. En effet,

$$\frac{1}{|R(\zeta)|}=|\det A_{j,k}(\zeta)|\leqq c\gamma^{\mu(\mu-1)-\Sigma_{k=0}^{\mu-1}b_k}$$

si $\zeta=(0, -i\gamma)$, et d'autre part, par la définition de $B'_{j,k}$,

$$|R(\zeta)|\leqq C|\zeta|^{\Sigma_{k=0}^{\mu-1}b_k-\mu(\mu-1)} .$$

EXEMPLE. $\begin{cases} P=D_x^2+|D_y|^2-D_t^2+P'(D_x, D_y, D_t) , \\ B=B(D_y, D_t) , \end{cases}$

où P' est un opérateur de degré $\leqq 1$ et B est un opérateur strictement hyperbolique par rapport à t de degré $\leqq b$. Alors on a

$$(L_1) \qquad |A(\zeta)|=\frac{1}{|B(\zeta)|}\leqq C\,\frac{|\zeta|^{-b+1}}{\gamma} .$$

REMARQUE 4.2. Il y a une autre inégalité d'énergie plus forte à l'intérieur et plus faible au bord que (4.19) ($\theta=0$):

$$(4.21) \qquad \gamma|u|^2_{m-1;\gamma}+\gamma\sum_{j=0}^{q-1}\langle\gamma_j u\rangle^2_{m-1-j-1/2;\gamma}\leqq\frac{C}{\gamma}\left\{|f|^2_{0;\gamma}+\sum_{j=0}^{\mu-1}\langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+1/2;\gamma}\right\} .$$

Nous n'y sommes pas parvenus par notre méthode basée sur le cas de Dirichlet. Il nous semble nécessaire de traiter directement les noyaux de (4.5) et (4.6) pour caractériser (4.21).

Le noyau paru dans (4.6) est majoré grace au (4.19) de la même façon que la proposition 4.2.

PROPOSITION 4.4. *Sous les hypothèses du lemme* 4.1, *il existe* $C>0$, γ_1 *telles que*

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty dx'\left|D_x^k\int_{C^+(\zeta)}\frac{e^{ix\xi}}{P^+(\xi, \zeta)}\frac{d\xi}{2\pi}\int_{C^-(\zeta)}\frac{e^{-ix'\xi'}}{i(\xi'-\xi)P^-(\xi', \zeta)}\frac{d\xi'}{2\pi}\right|^2$$
$$\leqq\frac{C}{\gamma^2}|\zeta|^{2(-m+k+1)}$$

pour $\zeta=(\eta, \tau)\in \boldsymbol{R}^{n-1}\times\{\operatorname{Im}\tau<-\gamma_1\}$, $k=0, 1, \cdots, m-1$.

Bibliographie

[1] R. AGEMI and T. SHIROTA, On necessary and sufficient conditions for L^2-well posedness of mixed problems for hyperbolic equations, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., n°2, **21** (1970), 133–151.

[2] J. CHAZARAIN and A. PIRIOU, Remarques sur la caractérisation des problèmes mixtes bien posés pour un opérateur hyperbolique, Séminaire Leray, Collège de France, 1971.

[3] J. CHAZARAIN and A. PIRIOU, Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés, Ann. Inst. Fourier, **22** (1972), 193–237.

[4] R. HERSH, Boundary conditions for equations of evolution, Arch. Rational Mech. Anal., **16** (1964), 243–263.

[5] L. HÖRMANDER, Linear Partial Differential Operators, Springer, 1969.

[6] L. HÖRMANDER, Pseudo-differential operators and non elliptic boundary problems, Ann. of Math., **83** (1966), 129–209.

[7] L. HÖRMANDER, On the characteristic Cauchy problem, Ann. of Math., **88** (1968), 341–370.

[8] K. KASAHARA, On weak well posedness of mixed problems for hyperbolic systems, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., **6** (1971), 503–514.

[9] R. SAKAMOTO, Mixed problems for hyperbolic equations, I, II, J. Math. Kyoto Univ., **10** (1970), 349–373, 403–417.

[10] R. SAKAMOTO, $\mathscr{E}$-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ., **14** (1974), 93–118.

[11] L. SCHWARTZ, Théorie des Distributions, Hermann, 1966.

Adresse Actuelle:
DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ SOPHIA
KIOICHO, CHIYODA-KU, TOKYO 102