TOKYO J. MATH.
VOL. 6, NO. 2, 1983

Fonctionnelles Analytiques a Porteur Non Borné sur C

A. MERIL

Université de Bordeaux

(Communicated by M. Morimoto)

Résumé

Nous montrons que le dual d'un espace de germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un convexe fermé à croissance contrôlée à l'infini est isomorphe à un espace de fonctions holomorphes de type exponentiel dans un cône Γ. Notre preuve est explicite.

Introduction

Soit Ω un convexe fermé non compact de C^n; on montre aisément que Ω est déterminé de façon biunivoque par un cône convexe Γ (relativement) ouvert, de sommet l'origine et une fonction d'appui a sur Γ.

Il existe deux espaces différents de germes de fonctions holomorphes au voisinage de Ω et à croissance contrôlée à l'infini; l'un noté $\mathscr{H}(\Omega)$ est constitué de germes de fonctions holomorphes sur des ε-voisinages et l'autre $\mathscr{H}_c(\Omega)$ s'obtient en utilisant des voisinages "coniques". Lorsque Ω ne contient pas de droites réelles, ces espaces sont isomorphes à des espaces de fonctions holomorphes dans le cône Γ et de type exponentiel a.

Ces espaces furent introduits dans des cas très particuliers par T. Kawaï [6]. Dans le cas général, l'étude fut faite par J. W. de Roever qui prouve les isomorphismes par des méthodes de L^2-estimations et en étendant le principe fondamental de Ehrenpreis-Palamadov. Ce théorème d'isomorphisme fut retrouvé dans le cas des ε-voisinages et de manière indépendante par M. Morimoto [11] lorsque $n=1$ et Ω est une demi-bande. Il apparaît (voir [1]) que la L^2-estimation n'est pas élémentaire, même pour $n=1$. Il nous paraît donc naturel et intéressant de refaire dans le cas général une preuve analogue à celle de M. Morimoto en utilisant (pour $n=1$) les transformées de Laplace et de Cauchy, en espérant dans le cas

Reçu 10 Novembre, 1982

général (i.e. $n \geqq 2$) réobtenir les résultats de J. W. Roever dans l'optique de Martineau-Aizenberg. Certains résultats furent obtenus dans cette voie (dans le cas d'un produit de demi-bandes) par Morimoto-Sargos [12], il est clair, à la lumière de ce travail, que nos résultats peuvent immédiatement être étendus au cas où Ω convexe fermé non borné de C^n est un produit cartésien de n convexes fermés non compacts de C.

L'utilité de ces espaces de fonctionnelles analytiques à porteur non borné est multiple. Selon J. W. de Roever [15] chapitre 1, ils sont d'un certain intérêt en mécanique quantique des champs. On peut aussi y étudier des équations de convolution, généralisant des équations différences différentielles pour cela, voir Berenstein-Struppa [2] et Méril [8], [9], [10].

Récemment, la méthode que nous utilisons fut retrouvée de manière indépendante par B. Malgrange [7] dans l'étude des microfonctions. Les espaces sur lesquels il travaille sont assez voisins du nôtre.

Nous tenons à remercier le Professeur R. Gay pour les conseils qui nous furent donnés et nous croyons que sans son aide cet article n'aurait pas vu le jour.

CHAPITRE 0
QUELQUES RAPPELS SUR LES E.L.C. ET LA CONVEXITE

On désigne par N (resp. R, C) l'ensemble des entiers naturels (resp. le corps des nombres réels, le corps des nombres complexes).

Si $\alpha \in N^n$ est un multi-indice, on note par $|\alpha|$ sa longueur, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. L'opérateur de dérivation:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

opérant sur les fonctions de la variable $x \in R^n$ sera noté D_x^α.

Si V est un sous-ensemble d'un espace topologique X on notera $\bar{V}$ son adhérence, ∂V sa frontière et V^c son complémentaire. On note par $\langle y, \xi \rangle$ le produit scalaire $\sum_{j=1}^n y_j \xi_j$ des vecteurs $y = (y_1, \cdots, y_n)$ et $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ de R^n.

§1. E.L.C..

Dans la suite le sigle E.L.C. désignera un espace vectoriel topologique localement convexe séparé.

DÉFINITION 0.1.1. Soient X, Y deux E.L.C. et u une application linéaire de X dans Y. L'application u sera dite compacte (resp. faiblement compacte) s'il existe un voisinage de zéro V dans X tel que $u(V)$ soit relativement compact (resp. relativement faiblement compact) dans Y.

DÉFINITION 0.1.2 ([4]). Soit $(E_n, \pi_{n,p})$ $((n, p) \in N^2)$ un système projectif d'E.L.C.. On dit que la limite projective topologique $E = \varprojlim_n E_n$ est un espace du type F.S si les applications linéaires $\pi_{n,p}$ sont compactes (resp. faiblement compactes).

DÉFINITION 0.1.3 ([4]). Soit $(F_n, \pi'_{n,p})$ $((n, p) \in N^2)$ un système inductif d'E.L.C. tel que les applications $\pi'_{n,p}$ soient injectives. On dit que la limite inductive topologique $F = \varinjlim_n F_n$ est un espace du type D.F.S si les applications linéaires $\pi'_{n,p}$ sont compactes.

PROPOSITION 0.1.4 ([4]). *Soit* $E = \varprojlim_n E_n$ *un espace du type F.S. Si pour tout* n *et tout* m *tels que* $m > n$ $\pi_{m,n} E_m$ *est dense dans* E_n, *le dual topologique* E' *de* E, *qui s'identifie à* $\varinjlim_n E'_n$, *est un espace du type D.F.S.. Soit* $F = \varinjlim_n F_n$ *un espace du type D.F.S.. Le dual topologique* F' *de* F *qui s'identifie à* $\varinjlim_n F'$ *est un espace du type F.S.*

Pour d'autres propriétés de ces espaces, nous renvoyons à [4] et [13] (par exemple).

§2. Quelques exemples.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de R^p. Soit $m \in N$. Une fonction continue et positive M sur $\mathcal{O}$ sera dite un poids. On désignera par $\mathscr{C}^m(\mathcal{O}, M)$ l'espace des fonctions continues Φ de classe $\mathscr{C}^m$ sur $\mathcal{O}$ telles que:

$$\|\Phi\|_m = \sup_{\substack{x \in \mathcal{O} \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \Phi(x)| M(x) < +\infty \ .$$

On suppose que $\mathcal{O}$ est réunion d'une suite croissante d'ouverts $(\mathcal{O}_m)_{m \in N}$. Soit $M = (M_m)_{m \in N}$ une famille de poids telle que M_m soit défini sur $\mathcal{O}_m$ et que $M_{m+1}(x) \geqq M_m(x)$ pour $x \in \mathcal{O}_m$. On définit l'espace $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{O}, M)$ comme étant égal à $\varprojlim_m \mathscr{C}^m(\mathcal{O}_m, M_m)$.

PROPOSITION 0.2.1. *Avec les données ci-dessus s'il existe une exhaustion* $(K_{k,m})_k \in N$ *de* $\mathcal{O}_m$ *pour tout* m *par des ouverts relativement compacts tels que* $\bar{K}_{k,m} \subset K_{k+1,m} \subset \mathcal{O}_m$ *et tels que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $k(\varepsilon) \in N$ *pour lequel* $x \in \mathcal{O}_m \backslash K_{m,k(\varepsilon)}$ *implique* $M_m(x) \leqq \varepsilon M_{m+1}(x)$, *alors l'espace* $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{O}, M)$ *est du type F.S.*

PREUVE ([13]). L'inégalité des accroissements finis prouve que l'application de restriction

$$\pi_{m+1,m}: \mathscr{C}^{m+1}(\mathcal{O}_{m+1}, M_{m+1}) \longrightarrow \mathscr{C}^m(\mathcal{O}_m, M_m)$$

est compacte.

DÉFINITION 0.2.2. Soient Ω un ouvert de C^n et M un poids sur Ω. On désigne par $\mathscr{H}(\Omega, M)$ le C-espace vectoriel:

$$\mathscr{H}(\Omega, M) = \{f \in \mathscr{H}(\Omega) \mid \|f\| = \sup_{z\in\Omega} |f(z)| M(z) < +\infty\}$$

où $\mathscr{H}(\Omega)$ désigne l'espace de toutes les fonctions holomorphes dans Ω.

Nous rappelons deux conditions techniques classiques ([13], [15]) dont la fonction est d'assurer que certains espaces sont nucléaires.

Soit $(\Omega_m)_{m\in N}$ une suite croissante (resp. décroissante) de domaines de C^n de réunion (resp. d'intersection) Ω. Soit $M=(M_m)_{m\in N}$ une suite de poids tels que M_m soit défini sur Ω_m et $M_m(x) \leqq M_{m+1}(x)$ pour $x \in \Omega_m$ (resp. $M_m(x) \geqq M_{m+1}(x)$ pour $x \in \Omega_{m+1}$).

Condition 0.2.3. $H.S_1$

Pour tout $m \in N$ il existe $p > m$ (resp. pour tout $p \in N$ il existe $m > p$) tel que

$$\int_{\Omega_m} \left(\frac{M_m(z)}{M_p(z)}\right)^2 d\lambda(z) < +\infty .$$

Condition 0.2.4. $H.S_2$

Pour tout $m \in N$ il existe $p > m$ (resp. pour tout $p \in N$ il existe $m > p$) tel que Ω_m soit recouvert dans Ω_p par des polydisques:

$$\Delta(z, d_z) = \{w \in C^n \mid |z_j - w_j| < d_z;\ 1 \leqq j \leqq n\}$$

avec

$$\sup_{\substack{z\in\Omega_m \\ w\in\Delta(z,d_z)\subset\Omega_p}} d_z^{-n} M_p^{-1}(w) M_m(z) < +\infty .$$

Ces conditions assurent que:

PROPOSITION 0.2.5 ([13]). *Si les conditions $H.S_1$ et $H.S_2$ sont vérifiées, l'espace $\varprojlim_m \mathscr{H}(\Omega_m, M_m)$ (resp. $\varinjlim_m \mathscr{H}(\Omega_m, M_m)$) est un espace du type F.N (resp. D.F.N).*

Pour les espaces de fonctions holomorphes du type $\mathscr{H}(\Omega, M)$ il existe un analogue de 0.2.1.

PROPOSITION 0.2.6. *Soit* M_i *un poids sur* Ω_i $(i=1, 2)$ *ouvert de* C^n *tels que* $\Omega_2 \subset \Omega_1$ *et* $M_1 \geqq M_2$ *sur* Ω_2. *L'injection de* $\mathscr{H}(\Omega_1, M_1)$ *dans* $\mathscr{H}(\Omega_2, M_2)$ *est continue.*

Si $\Omega_2 = \bigcup_k S_k$ *où* S_k *est un ouvert de* C^n *relativement compact dans* S_{k+1} *pour tout* k *et si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $k(\varepsilon)$, *tel que* $z \in \Omega_2 \backslash S_k(\varepsilon)$ *implique* $M_2(z) \leqq \varepsilon M_1(z)$, *alors l'injection de* $\mathscr{H}(\Omega_1, M_1)$ *dans* $\mathscr{H}(\Omega_2, M_2)$ *est compacte. Cette affirmation est encore vraie si on suppose seulement que* $\bar{S}_k$ *est compact dans* Ω_1.

PREUVE. Cf. [13].

§3. Cône convexe dans R^n.

Dans toute la suite les cônes considérés seront convexes et de sommet 0 sauf mention expresse du contraire.

Si Γ est un cône de R^n et S^{n-1} est la sphère unité de R^n, on désigne par projection de Γ sur S^{n-1} et on note pr (Γ) l'ensemble $\Gamma \cap S^{n-1}$. Un sous-cône Γ' de Γ est dit un sous-cône relativement compact du cône ouvert Γ si l'ensemble pr (Γ') est relativement compact dans l'ouvert pr (Γ) de S^{n-1}. On notera ceci par $\Gamma' \subset\subset \Gamma$.

Soit Γ un cône ouvert convexe. Une exhaustion de Γ sera la donnée d'une famille $(\Gamma_k)_{k \geqq 1}$ de sous-cônes ouverts et convexes tels que, pour tout k,

$$\Gamma_k \subset\subset \Gamma_{k+1} \subset\subset \Gamma$$
$$\Gamma = \bigcup_{k \geqq 1} \Gamma_k .$$

Une fonction a définie dans Γ, à valeurs réelles, convexe et positivement homogène d'ordre un sur Γ sera dite une fonction d'appui.

Soit a_1 une fonction d'appui définie sur le cône ouvert convexe Γ_1. On désigne par $\Omega_1(a_1, \Gamma_1)$ l'ensemble convexe fermé dans R^n

$$\Omega_1(a_1, \Gamma_1) = \{\xi \in R^n \mid -\langle y, \xi\rangle \leqq a_1(y);\ \forall y \in \Gamma_1\} .$$

Réciproquement, soit Ω un convexe fermé non vide de R^n que l'on représentera comme l'intersection des demi-espaces fermés H de la famille $\mathscr{K}$ des demi-espaces fermés $H \supset \Omega$.

Pour $H \in \mathscr{K}$, soit y l'unique vecteur unitaire "sortant" orthogonal à ∂H pour lequel

$$H = H_y(a) = \{\xi \in R^n \mid -\langle y, \xi\rangle \leqq a\}$$

où $a \in R$.

Les vecteurs y ci-dessus varient dans un sous-ensemble de S^{n-1} que nous noterons $\mathrm{pr}(\Gamma_1)$ et qui est la projection du cône Γ_1 qu'il engendre. On montre ([14]) que Γ_1 est un cône convexe (non nécessairement ouvert).

On détermine une fonction $y \to \tilde{a}_1(y)$ sur $\mathrm{pr}(\Gamma_1)$ par la condition:

$$\Omega = \{\xi \in \boldsymbol{R}^n \mid -\langle y, \xi\rangle \leqq \tilde{a}_1(y\|y\|^{-1})\|y\|, \forall y \in \Gamma_1\}$$

de telle sorte que, pour tout $y \in \Gamma_1$

$$a_1(y) = \|y\|\tilde{a}_1(y\|y\|^{-1}) = \sup_{\xi \in \Omega} -\langle y, \xi\rangle$$

soit la fonction d'appui de Ω. On vérifie que la fonction a_1 est convexe donc continue sur Γ_1.

Il se peut que Γ_1 ne soit pas ouvert dans $\boldsymbol{R}^n$ mais il existe $p \leqq n$ tel que Γ_1 soit contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension p dans lequel son intérieur "relatif" $\mathrm{int}(\Gamma_1)$ soit non vide.

On constate alors que $\Omega = \Omega_1(a_1, \mathrm{int}(\Gamma_1))$. On obtient ainsi le

THÉORÈME 0.3.1 ([14]). *Tout convexe fermé Ω de $\boldsymbol{R}^n$ détermine un cône convexe Γ_1 (ouvert dans un sous-espace vectoriel convenable de $\boldsymbol{R}^n$) et une founction d'appui a_1 définie sur Γ_1 tels que $\Omega = \Omega_1(a_1, \Gamma_1)$. Réciproquement chaque cône ouvert convexe Γ_1 et chaque fonction d'appui a_1 définie sur Γ_1 détermine un convexe fermé. Le cône Γ_1 est ouvert dans $\boldsymbol{R}^n$ si, et seulement si, Ω_1 ne contient pas de droite.*

Dans ces conditions nous dirons que Ω_1 et (Γ_1, a_1) sont en dualité.

Dans la suite, le plus souvent, n sera égal à 2 et $\boldsymbol{R}^2$ sera identifié à $\boldsymbol{C}$; le produit scalaire dans $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{C}$ s'exprimant par:

$$\langle z, \xi\rangle = \mathrm{Re}\,(z\bar{\xi}) .$$

Alors

$$\Omega = \Omega_1(a_1, \Gamma_1) = \{z \in \boldsymbol{C} \mid -\mathrm{Re}\, z\bar{\xi} \leqq a_1(\xi); \forall \xi \in \mathrm{pr}(\Gamma_1)\} .$$

On supposera que $\Omega_1(a_1, \Gamma_1)$ ne contient pas de droite et que cet ensemble n'est pas compact.

Soient Ω un convexe fermé et un secteur (Γ_1, a_1) en dualité. On considère le secteur Γ symétrique de Γ_1 par rapport à la première bissectrice

$$\Gamma = \{i\bar{\xi}; \xi \in \Gamma_1\}$$

et on définit sur Γ la fonction $a(\xi) = a_1(i\bar{\xi})$ qui est évidemment une fonction d'appui sur Γ. En tenant compte de la relation $\operatorname{Re}(iz\xi) = -\operatorname{Im} z\xi$ ($z, \xi \in \boldsymbol{C}$) on a alors:

$$\Omega = \Omega_1(a_1, \Gamma_1) = \{z \in \boldsymbol{C} \mid -\operatorname{Im}(z\xi) \leqq a(\xi);\ \forall \xi \in \Gamma\} .$$

On conviendra de noter Ω par $\Omega(a, \Gamma)$ et on dira encore que Ω et (Γ, a) sont en dualité.

Pour Γ et a donnés comme ci-dessus et pour $\xi \in \operatorname{pr}(\Gamma)$ on pose:

$$H_\xi = \{z \in \boldsymbol{C} \mid -\operatorname{Im}(z\xi) \leqq a(\xi)\} .$$

Si $\xi = e^{i\beta} \in \operatorname{pr}(\Gamma)$ tout $z \in \boldsymbol{C}$ s'écrit de façon unique $z = \lambda e^{-i\beta} + \mu e^{i(\pi/2-\beta)}$ ($\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$) et $z \in H_\xi$ si, et seulement si, $\mu \geqq -a(\xi)$. On a:

$$\Omega = \Omega(a, \Gamma) = \bigcap_{\xi \in \operatorname{pr}(\Gamma)} H_\xi .$$

Pour $\varepsilon > 0$ l'ε-voisinage Ω_ε de Ω peut s'écrire:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega(a + \varepsilon|\xi|, \Gamma) .$$

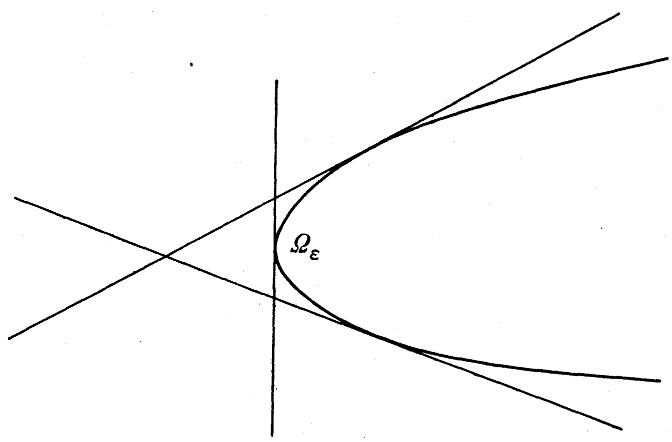
Pour $\xi \in \operatorname{pr}(\Gamma)$ le demi-plan fermé:

$$H_{\xi,\varepsilon} = \{z \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Im}(z\xi) + a(\xi) \leqq -\varepsilon\}$$

est le demi-plan fermé "d'appui" à Ω_ε ne contenant pas Ω_ε, tel que sa frontière $\Delta_{\xi,\varepsilon}$ soit une droite de vecteur directeur $\bar{\xi}$.

Soient maintenant ξ_1 et ξ_2 deux éléments de $\operatorname{pr}(\Gamma)$ et Γ' le secteur convexe engendré par ξ_1 et ξ_2. Pour $\xi \in \operatorname{pr}(\Gamma')$ on a

$$H_{\xi_1,\varepsilon} \cap H_{\xi_2,\varepsilon} \subset H_{\xi,\varepsilon} .$$



On remarquera surtout que l'intersection d'une droite parallèle à $\Delta_{\xi,\varepsilon}$ avec Ω_ε (ou Ω) est un ensemble compact.

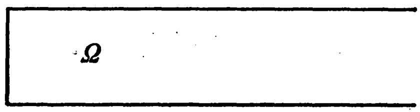
Si Ω et (Γ, a) sont en dualité, pour $z_0 \in \boldsymbol{C}$ et $\Omega_1 = z_0 + \Omega$ alors Ω_1 est en dualité avec (Γ, b) où $b(\xi) = a(\xi) - \operatorname{Im}(z_0\xi)$. De même $\Omega_2 = e^{-i\theta}\Omega$ est en dualité avec (Γ_2, b) où $\Gamma_2 = e^{i\theta}\Gamma$ et $b(\xi) = a(e^{-i\theta}\xi)$.

Pour terminer ce chapitre voici quelques exemples.

i) ([11]). Soient k_1, k_2 et $b \in \boldsymbol{R}$ tels que $k_1 \leqq k_2$. Pour $\Gamma = \{\xi \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Im} \xi > 0\}$ il est clair que

$$a(\xi) = \begin{cases} -b \operatorname{Im} \xi - k_1 \operatorname{Re} \xi & \text{si } \operatorname{Re} \xi \geqq 0 \\ -b \operatorname{Im} \xi - k_2 \operatorname{Re} \xi & \text{si } \operatorname{Re} \xi \leqq 0 \end{cases}$$

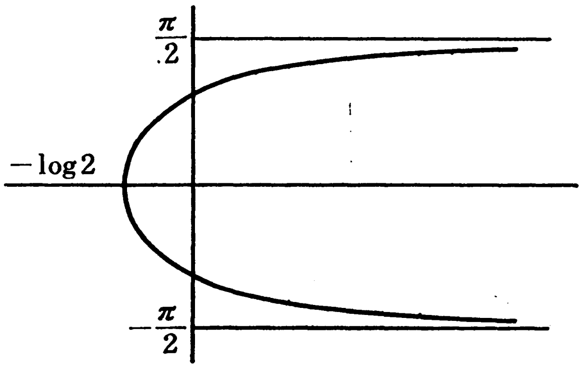
est une fonction d'appui sur Γ. Dans ce cas $\Omega = \Omega(a, \Gamma) = [b, +\infty) + i[k_1, k_2]$.



ii) Soient $\Gamma = \{\xi \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Re} \xi > 0, \operatorname{Im} \xi > 0\}$ et $a(\xi) = -(\operatorname{Im} \xi + \operatorname{Re} \xi)$. Alors $\Omega = \{z \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Re} z \geqq 1, \operatorname{Im} z \geqq 1\}$.

iii) ([5]) Soit $\Omega = \{z = x + iy \in \boldsymbol{C} \mid e^{-x} \leqq 2 \cos y\}$. Alors

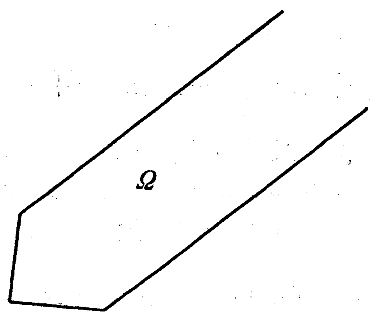
$$\Gamma = \{\xi \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Im} \xi > 0\} \quad \text{et} \quad a(\xi) = \operatorname{Im} \xi \log\left(\frac{2 \operatorname{Im} \xi}{|\xi|}\right) - \operatorname{Re} \xi\left(\operatorname{Arg} \xi + \frac{\pi}{2}\right).$$



iv) Soit $\Gamma = \{\xi \in \boldsymbol{C} \mid -\pi/4 < \operatorname{Arg} \xi < 3\pi/4\}$. Il est clair que

$$a(\xi)=\begin{cases} -\operatorname{Im}\xi & \text{si} \quad -\frac{\pi}{4}<\operatorname{Arg}\xi\leqq 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0\leqq\operatorname{Arg}\xi\leqq\frac{\pi}{2} \\ -\operatorname{Re}\xi & \text{si} \quad \frac{\pi}{2}\leqq\operatorname{Arg}\xi<\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

est une fonction d'appui sur Γ. Dans ce cas Ω est l'ensemble représenté par la figure ci-dessous.



Chapitre I
Fonctionnelles analytiques à porteur non borné

Dans ce chapitre, Ω sera un ensemble convexe fermé non compact de $\boldsymbol{C}$, distinct de $\boldsymbol{C}$, en dualité avec (Γ, a) où Γ est un secteur ouvert convexe et a une fonction d'appui sur Γ.

§1.1. Espace $\mathscr{H}(\Omega)$.

On désigne par ξ_0 le point de $\operatorname{pr}(\Gamma)$ se trouvant sur la "bissectrice" de Γ.

Pour $\varepsilon>0$ et $\varepsilon'>0$ soient $\mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega)$ l'espace de Banach des $f\in\mathscr{H}(\mathring{\Omega}_\varepsilon)$ telles que $\|f\|_{\varepsilon,\varepsilon'}=\sup_{z\in\mathring{\Omega}_\varepsilon}|f(z)e^{-i\varepsilon'\xi_0 z}|<+\infty$ et $\mathscr{H}_{0,\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega)$ son sous-espace constitué des fonctions qui se prolongent par continuité à Ω_ε et sont telles que $\lim_{\substack{z\in\Omega_\varepsilon\\|z|\to\infty}}|f(z)e^{-i\varepsilon'\xi_0 z}|=0$.

Lemme 1.1.1. *Il existe $K>0$ et $K_1\in\boldsymbol{R}$ tels que, pour $w\in\Omega_\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ donné) on ait* $\operatorname{Im}(\xi_0 w)\geqq K|w|+K_1$.

Preuve. Elémentaire.

Proposition 1.1.2. *Pour $\varepsilon>\varepsilon_1>0$, $\varepsilon'>\varepsilon_1'>0$ l'injection canonique*

$$\pi^{\varepsilon,\varepsilon'}_{\varepsilon_1,\varepsilon'_1}\colon \mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega)\longrightarrow \mathscr{H}_{\varepsilon_1,\varepsilon'_1}(\Omega)$$

est continue et compacte. Le système $(\mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega), \pi^{\varepsilon,\varepsilon'}_{\varepsilon_1,\varepsilon'_1})$ *est un système inductif d'espaces de Banach dont on notera* $\mathscr{H}(\Omega)$ *la limite inductive topologique qui est un espace du type D.F.S.*

Pour $\alpha>\alpha_1>0$, $\alpha'>\alpha'_1>0$ *l'injection canonique*

$$\theta^{\alpha,\alpha'}_{\alpha_1,\alpha'_1}\colon \mathscr{H}_{0,\alpha,\alpha'}(\Omega)\longrightarrow \mathscr{H}_{0,\alpha_1,\alpha'_1}(\Omega)$$

est continue et compacte. Le système $(\mathscr{H}_{0,\alpha,\alpha'}(\Omega), \theta^{\alpha,\alpha'}_{\alpha_1,\alpha'_1})$ *est un système inductif qui détermine aussi* $\mathscr{H}(\Omega)$.

PREUVE. Si $f\in\mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega)$ l'inégalité

$$|f(z)\exp(-i\varepsilon'_1\xi_0 z)|\leqq \exp[(\varepsilon'-\varepsilon'_1)(a(\xi_0)+\varepsilon_1)]\,|f(z)\exp(-i\varepsilon'\xi_0 z)|$$

pour $z\in\mathring{\Omega}_{\varepsilon_1}$ prouve que $f\in\mathscr{H}_{\varepsilon_1,\varepsilon'_1}(\Omega)$ et la continuité de $\pi^{\varepsilon,\varepsilon'}_{\varepsilon_1,\varepsilon'_1}$. Pour montrer sa compacité, soit $(m_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante de nombres réels tendant vers $+\infty$ avec k telle que $m_1\geqq -a(\xi_0)-\varepsilon_1$. L'ensemble

$$K_k=\mathring{\Omega}_{\varepsilon_1}\cap\{z\,|\,\mathrm{Im}\,(\xi_0 z)\leqq m_k\}$$

est d'adhérence compacte contenue dans $\mathring{\Omega}_\varepsilon$ et $K_k\subset K_{k+1}\subset\mathring{\Omega}_{\varepsilon_1}$ avec $\mathring{\Omega}_{\varepsilon_1}=\bigcup_{k\geq 1}K_k$. $z\in\mathring{\Omega}_{\varepsilon_1}\backslash K_k$ implique que:

$$\exp(\varepsilon'_1\,\mathrm{Im}\,\xi_0 z)\leqq\exp((\varepsilon'_1-\varepsilon')m_k)\exp(\varepsilon'\,\mathrm{Im}\,\xi_0 z)\ .$$

Pour la seconde affirmation on remarque successivement que:

a) l'image $\pi^{\varepsilon,\varepsilon'}_{\varepsilon_1,\varepsilon'_1}(\mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega))$ est en fait contenue dans $\mathscr{H}_{0,\varepsilon_1,\varepsilon'_1}(\Omega)$ lui-même sous-espace de $\mathscr{H}_{\varepsilon_1,\varepsilon'_1}(\Omega)$ (on notera $j_{\varepsilon_1,\varepsilon'_1}$ cette injection canonique) d'après 1.1.1.

b) $\theta^{\alpha,\alpha'}_{\alpha_1,\alpha'_1}=\pi^{\alpha,\alpha'}_{\alpha_1,\alpha'_1}\circ j_{\alpha,\alpha'}$.

Ce qui assure que $\mathscr{H}(\Omega)$ est, algébriquement, égal à chacune des limites inductives déterminées par les deux systèmes inductifs considérés.

Les deux topologies d'espace D.F.S qu'on déduit sur $\mathscr{H}(\Omega)$ étant plus fines que la topologie séparée de la convergence simple, le théorème du graphe fermé prouve qu'elles sont identiques (cf. [4]). D'où la proposition.

§1.2. Intégration sur le bord d'un ensemble convexe de C.

Une "route sans fin" $(\gamma, [a, b[)$ est une application

$$\gamma\colon [a, b[\longrightarrow C \qquad (-\infty<a<b\leqq+\infty)$$

absolument continue telle que $\lim_{t\to b}|\gamma(t)|=+\infty$. On dit qu'une fonction continue au voisinage de $\gamma([a, b[)$ est intégrable le long de γ si $t \to f(\gamma(t))\gamma'(t)$ est intégrable sur $[a, b[$.

On conserve la notation usuelle:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{[a,b[} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt .$$

Deux routes $(\gamma_1, [a_1, b_1[)$ et $(\gamma_2, [a_2, b_2[)$ seront dites équivalentes si $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ où φ est une bijection absolument continue ainsi que son inverse de $[a_1, b_1[$ aur $[a_2, b_2[$ telle que $\varphi(a_1) = a_2$ et $\lim_{t \to b_1} \varphi(t) = b_2$.

Si f est intégrable le long de γ_1 alors f est aussi intégrable le long de γ_2 et on a

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz .$$

On définit de même des routes sans fin du type $(\gamma,]c, d])$ et $(\gamma,]e, f[)$.

PROPOSITION 1.2.1. *Le bord ∂F d'un convexe fermé non vide, non borné et distinct de $\boldsymbol{C}$ est le support d'une route sans fin.*

PREUVE. Si F n'est pas un demi-plan fermé, on peut supposer que $F \subset \{z \in \boldsymbol{C} \mid \operatorname{Re} z \geqq 0\}$ la droite $\operatorname{Re} z = 0$ étant une droite d'appui et que, pour tout $x \geqq 0$:

$$(x + i\boldsymbol{R}) \cap F = x + iJ_x$$

où $J_x = [h(x), g(x)]$ est un intervalle compact non vide de $\boldsymbol{R}$ tel que $h(x) < g(x)$ pour $x > 0$ si F n'est pas une demi-droite. Les fonctions g et h ainsi définies sur $\boldsymbol{R}^+$ sont convexe et concave respectivement donc absolument continue. D'où la proposition.

§ 1.3. Représentation intégrale de Cauchy pour $\mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega)$.

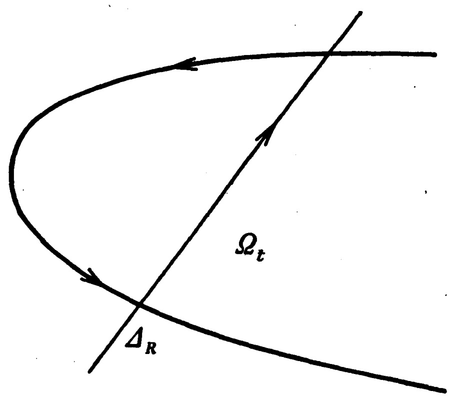
THÉORÈME 1.3.1. (*Représentation intégrale de Cauchy*). *Pour $f \in \mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega)$ et $\varepsilon_1' < \varepsilon'$, $t_1 < t < \varepsilon$ et $z \in \Omega_{t_1}$ on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L_t} f(w) \frac{e^{i\varepsilon_1'\xi_0(z-w)}}{w - z} dw$$

où L_t est la route sans fin bord de Ω_t.

PREUVE. Pour R assez grand l'intersection $\Delta_R \cap \Omega$ est un compact non vide avec $\Delta_R = \{w \mid \operatorname{Im} \xi_0 w = R\}$.

Le théorème de Cauchy appliqué au circuit $L_{t,R}$ suggéré ci-dessous



donne

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{L_{t,R}} f(w)\frac{e^{i\varepsilon'\xi_0(z-w)}}{w-z}dw\ .$$

On démontre classiquement que

a) $w \longrightarrow \dfrac{f(w)e^{i\varepsilon'_1\xi_0(z-w)}}{w-z}$

est intégrable le long de L_t grâce à 1.1.1.

b) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{L_{t,R}\cap\Delta_R}\frac{f(w)e^{i\varepsilon'_1\xi_0(z-w)}}{w-z}dw=0\ ,$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{L_{t,R}}\frac{f(w)e^{i\varepsilon'_1\xi_0(z-w)}}{w-z}dw=\frac{1}{2i\pi}\int_{L_t}\frac{f(w)e^{i\varepsilon'_1\xi_0(z-w)}}{w-z}dw\ .$$

D'où le théorème.

Proposition 1.3.2. *La correspondance $f\to f'$ est une application linéaire continue de $\mathscr{H}(\Omega)$ dans lui-même.*

Preuve. Pour $0<\varepsilon'_1<\varepsilon'$, $0<t_1<t<\varepsilon$ et $f\in\mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega)$ on prouve comme précédemment la représentation $f'(z)-i\varepsilon'_1\xi_0 f(z)=G(z)(z\in\Omega_{t_1})$ avec

$$G(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{L_t}\frac{f(w)e^{i\varepsilon'_1\xi_0(z-w)}}{(w-z)^2}dw\ .$$

Majorant en suite $|G(z)|$ en utilisant 1.1.1 on obtient une inégalité

$$\|G\|_{t_1,\varepsilon'_1}\leqq C\|f\|_{\varepsilon,\varepsilon'}\quad (C\geqq 0)\ .$$

Ce qui achève la démonstration.

En vue d'obtenir une transformation de Cauchy pour les éléments μ de $\mathscr{H}'(\Omega)$ on remarque, pour $w\in\Omega^c$, la fonction:

$$z \longrightarrow \frac{e^{i\varepsilon'\xi_0(z-w)}}{w-z}$$

est un élément de $\mathscr{H}(\Omega)$, ce qui permet de considérer le nombre complexe

$$\varphi_{\varepsilon'}(w) = \frac{1}{2i\pi}\left\langle \mu_z, \frac{e^{i\varepsilon'\xi_0(z-w)}}{w-z} \right\rangle$$

et on démontre la

Proposition 1.3.3. *Soient* $\mu \in \mathscr{H}'(\Omega)$, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, ε, ε', ε'' *et* t *des réels* >0 *tels que* $f \in \mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon''}(\Omega)$, $t < \varepsilon$ *et* $\varepsilon' < \varepsilon''$. *On a*

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{L_t} f(w)\varphi_{\varepsilon'}(w)dw \ .$$

Preuve. Soient $0 < \alpha < t_1 < t < \varepsilon$ de telle sorte que $f \in \mathscr{H}_{0,\alpha,\varepsilon'}(\Omega)$. La forme linéaire μ restreinte à $\mathscr{H}_{0,\alpha,\varepsilon'}(\Omega)$ se représente classiquement par une mesure bornée $d\nu$ sur Ω_α pour laquelle

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{\Omega_\alpha} f(z)e^{-i\varepsilon'\xi_0 z}d\nu(z) \qquad \text{(cf. [13])} \ .$$

Pour $z \in \dot{\Omega}_{t_1}$ donc aussi pour $z \in \Omega_\alpha$ on a la représentation

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{L_t} f(w)\frac{e^{i\varepsilon'\xi_0(z-w)}}{w-z}dw \ .$$

D'où

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{\Omega_\alpha}\left(\int_{L_t} f(w)\frac{e^{-i\varepsilon'\xi_0(z-w)}}{w-z}dw\right)d\nu(z) \ .$$

Comme $|w-z| \geqq t - t_1$ on voit qu'on peut conclure en utilisant le théorème de Fubini, la fonction $w \rightarrow |f(w)e^{-i\varepsilon'\xi_0 w}|$ étant intégrable sur L_t pour la mesure $|dw|$. D'où la proposition.

§1.4. Espace $H^1_\Omega(C)$. Transformation de Cauchy.

On se propose de définir un espace qui sera celui des transformées de Cauchy des éléments de $\mathscr{H}(\Omega)$. On suit la construction de [11].

Pour $\varepsilon' > 0$ soient $H_{\varepsilon'}(\Omega^c)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω^c telles que, pour tout $0 < \varepsilon < r$

$$q^{\varepsilon'}_{r,\varepsilon}(f) = \sup_{w \in \Omega_r \setminus \dot{\omega}_\varepsilon} |f(w)e^{i\varepsilon'\xi_0 w}| < +\infty$$

et $H_{\varepsilon'}(C)$ l'ensemble des fonctions entières telles que, pour tout $\varepsilon > 0$

$$p_\varepsilon^{\varepsilon'}(f)=\sup_{w\in\Omega_\varepsilon}|f(w)e^{i\varepsilon'\xi_0 w}|<+\infty\ .$$

La famille de semi-normes $(q_{r,\varepsilon}^{\varepsilon'})$, $0<\varepsilon<r$, munit $H_{\varepsilon'}(\Omega^c)$ d'une topologie d'espace de Fréchet. On désignera par $H^1_{\varepsilon',\Omega}(C)$ le quotient de $H_{\varepsilon'}(\Omega^c)$ par son sous-espace $H_{\varepsilon'}(C)$.

Pour $\varepsilon_1'<\varepsilon'$ l'espace $H_{\varepsilon_1'}(\Omega^c)$ est un sous-ensemble de $H_{\varepsilon'}(\Omega^c)$. En effet, pour $0<\varepsilon<r$, $w\in\Omega_r\backslash\mathring{\Omega}_\varepsilon$ et $f\in H_{\varepsilon_1'}(\Omega^c)$

$$|f(w)|\leqq q_{r,\varepsilon}^{\varepsilon_1'}(f)e^{\varepsilon_1'\operatorname{Im}\xi_0 w}=q_{r,\varepsilon}^{\varepsilon_1'}(f)e^{\varepsilon'\operatorname{Im}\xi_0 w}e^{(\varepsilon'-\varepsilon_1')\operatorname{Im}\xi_0 w}\ .$$

Il existe une constante $C>0$ telle que $e^{(\varepsilon_1'-\varepsilon')\operatorname{Im}\xi_0 w}\leqq C$ pour tout $w\in\Omega_r\backslash\mathring{\Omega}_\varepsilon$. Ceci résulte de la compacité de $\Omega_r\cap\{w\,|\operatorname{Im}\xi_0 w\leqq 0\}$.

De même $H_{\varepsilon_1'}(C)$ est contenu dans $H_{\varepsilon'}(C)$ et l'injection canonique $H_{\varepsilon_1'}(\Omega^c)\to H_{\varepsilon'}(\Omega^c)$ induit par passage aux quotients, une application naturelle $J_{\varepsilon',\varepsilon_1'}$ de $H^1_{\varepsilon_1',\Omega}(C)$ dans $H^1_{\varepsilon',\Omega}(C)$.

PROPOSITION 1.4.1. 1) *L'espace $H_{\varepsilon'}(C)$ est un sous-espace fermé de $H_{\varepsilon'}(\Omega^c)$ et $H^1_{\varepsilon',\Omega}(C)$ est naturellement un espace de Fréchet.*

2) *Les applications $J_{\varepsilon',\varepsilon_1'}$ sont injectives, linéaires et continues.*

3) *Le système $(H^1_{\varepsilon',\Omega}(C), J_{\varepsilon',\varepsilon_1'})$ est un système projectif.*

PREUVE. 1) Soit $(f_n)_{n\geq1}$ une suite d'éléments de $H_{\varepsilon'}(C)$ qui converge dans l'espace $H_{\varepsilon'}(\Omega^c)$ vers un élément f.

Pour $0<\varepsilon<r$ fixés et $k\in N$ il existe un entier $n(k)$ tel que n, $p\geqq n(k)$ implique $q_{r,\varepsilon}^{\varepsilon'}(f_n-f_p)\leqq 1/k$. On a aussi $p_r^{\varepsilon'}(f_n-f_p)\leqq 1/k$. Cela résulte du théorème classique de Phragmén-Lindelöf ([5]) qui donne:

Si H est holomorphe au voisinage de Ω_r telle que $\sup_{z\in\partial\Omega_r}|H(z)|\leqq A$ et $|H(z)|\leqq Me^{N|z|}$ pour $z\in\Omega_r$ (où A, M, N sont >0) alors $\sup_{z\in\Omega_r}|H(z)|\leqq A$.

Par suite il existe une fonction f_r telle que la suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge uniformément vers f_r sur tout compact de Ω_r. La collection des $f_r(r>0)$ se recolle en une fonction entière f_0 qui prolonge f et appartient à $H_{\varepsilon'}(C)$. On vérifie que $n\geqq n(k)$ implique $p_r^{\varepsilon'}(f_n-f_0)\leqq 1/k$. D'où 1).

2) Le théorème de Phragmén-Lindelöf assure que $H_{\varepsilon'}(C)\cap H_{\varepsilon_1'}(\Omega^c)\subset H_{\varepsilon_1'}(C)$.

3) Elémentaire.

NOTATION 1.4.2. On note $H^1_\Omega(C)$ la limite projective $\varprojlim_{\varepsilon'>0} H^1_{\varepsilon',\Omega}(C)$.

THÉORÈME 1.4.3. *Soit $\mu\in\mathscr{H}'(\Omega)$. La famille de fonctions $(\varphi_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$, où*

$$\varphi_{\varepsilon'}(w)=\frac{1}{2i\pi}\left\langle\mu_z, \frac{e^{i\varepsilon'\xi_0(z-w)}}{w-z}\right\rangle \qquad (w\in\Omega^c)$$

définit un élément de $H^1_\Omega(C)$ qui sera noté $\mathscr{C}(\mu)$ et appelé la "transformée de Cauchy" de μ. L'application $\mathscr{C}$ de $\mathscr{H}'(\Omega)$ dans $H^1_\Omega(C)$ est linéaire et continue (transformation de Cauchy).

PREUVE. L'holomorphie de $\varphi_{\varepsilon'}$ (dont on sait déjà qu'elle est définie) dans Ω^c résulte de la représentation de μ par une mesure bornée convenable et des théorèmes de Morera et de Fubini.

La continuité de μ donne l'existence de $C_{\varepsilon,\varepsilon'}>0$ telle que, pour $f\in \mathscr{H}_{\varepsilon/2,\varepsilon'}(\Omega)$ on ait

$$|\langle\mu, f\rangle|\leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'}\|f\|_{\varepsilon/2,\varepsilon'}\ .$$

Or $w\in\Omega^c_\varepsilon$ implique que $f(z)=(1/2i\pi)e^{i\varepsilon'\xi_0 z}/(w-z)$ est un élément de $\mathscr{H}_{\varepsilon/2,\varepsilon'}(\Omega)$ de norme majorée par $1/\varepsilon\pi$. Par suite

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\left\langle\mu_z, \frac{e^{i\varepsilon'\xi_0 z}}{w-z}\right\rangle\right|\leqq\frac{C_{\varepsilon,\varepsilon'}}{\varepsilon\pi}\ .$$

Ainsi $\varphi_{\varepsilon'}\in H_{\varepsilon'}(\Omega^c)$.

Si maintenant on a $0<\varepsilon'<\varepsilon'_1$, la fonction $\varphi_{\varepsilon'}-\varphi_{\varepsilon'_1}$ est prolongeable en un élément de $H_{\varepsilon'_1}(C)$. On considère

$$G(\zeta)=\frac{e^{-i\varepsilon'\xi_0\zeta}-e^{-i\varepsilon'_1\xi_0\zeta}}{\zeta}$$

qui est entière de ζ.

Pour $\varepsilon>0$, $z\in\Omega_{2\varepsilon}$ et $w\in\Omega_\varepsilon$ tels que $|w-z|\geqq\varepsilon$ on a l'inégalité

$$|e^{i\xi_0(\varepsilon'_1-\varepsilon')(z-w)}-1|\leqq 1+e^{(\varepsilon'_1-\varepsilon')(a(\xi_0)+2\varepsilon)}e^{(\varepsilon'_1-\varepsilon')\operatorname{Im}\xi_0 w}$$

qui est donc aussi vraie pour tout $z\in\Omega_{2\varepsilon}$ par le principe du maximum.

L'égalité

$$e^{-i\varepsilon'\xi_0 z}G(w-z)=e^{-i\varepsilon'\xi_0 w}\left[\frac{e^{i\xi_0(\varepsilon'_1-\varepsilon')(z-w)}-1}{z-w}\right]$$

implique

$$\|G(w-\cdot)\|_{\varepsilon,\varepsilon'}\leqq\frac{e^{\varepsilon'\operatorname{Im}\xi_0 w}}{\varepsilon}(1+e^{(\varepsilon'_1-\varepsilon')(a(\xi_0)+2\varepsilon)}e^{(\varepsilon'_1-\varepsilon')\operatorname{Im}\xi_0 w})\ .$$

Ainsi, pour $w\in\Omega_\varepsilon$ fixé, la fonction $z\to G(w-z)$ est un élément de $\mathscr{H}_{\varepsilon',2\varepsilon}(\Omega)$ et la fonction H: $w\to(1/2i\pi)\langle\mu_z, G(w-z)\rangle$ existe et vérifie, pour des constantes convenables $A_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon'_1}$ et $B_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon'_1}$

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\langle\mu_z, G(w-z)\rangle\right|\leqq A_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon'_1}e^{\varepsilon'\operatorname{Im}\xi_0 w}+B_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon'_1}e^{\varepsilon'_1\operatorname{Im}\xi_0 w}$$

et, bien sûr, prolonge $\varphi_{\varepsilon'}-\varphi_{\varepsilon_1'}$.

On constate que H est holomorphe dans Ω_ε comme précédemment et

$$\sup_{w\in\Omega_\varepsilon}|e^{i\varepsilon_1'\xi_0 w}H(w)|\leqq B_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_1'}+\sup_{w\in\Omega_\varepsilon}A_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_1'}e^{(\varepsilon'-\varepsilon_1')\operatorname{Im}\xi_0 w}$$
$$\leqq B_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_1'}+A_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_1'}e^{(\varepsilon_1'-\varepsilon')(a(\xi_0)+2\varepsilon)}$$

assure que $H=\varphi_{\varepsilon'}-\varphi_{\varepsilon_1'}$ est élément de $H_{\varepsilon_1'}(C)$.

On notera $\bar\varphi_{\varepsilon'}$ la classe de $\varphi_{\varepsilon'}$ dans $H^1_{\varepsilon',\Omega}(C)$. Soit Ψ l'élément de $\prod_{\varepsilon'>0}H^1_{\varepsilon',\Omega}(C)$ égal à $(\bar\varphi_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$. Puisque $\varphi_{\varepsilon'}-\varphi_{\varepsilon_1'}\in H^1_{\varepsilon',\Omega}(C)$, on a $J_{\varepsilon',\varepsilon_1'}(\bar\varphi_{\varepsilon'})=\bar\varphi_{\varepsilon_1'}$. Ainsi Ψ détermine un élément $\mathscr{C}(\mu)$ de l'espace $\varprojlim_{\varepsilon'>0}H^1_{\varepsilon',\Omega}(C)$.

Enfin la continuité de l'application $\mathscr{C}$ résulte de la continuité des applications $\mu\to\varphi_{\varepsilon'}$ de $\mathscr{H}'(\Omega)$ dans $H_{\varepsilon'}(\Omega^c)$ qui provient elle-même de

$$\sup_{w\in\Omega_r\setminus\mathring{\Omega}_\varepsilon}|e^{i\varepsilon'\xi_0 w}\varphi_{\varepsilon'}(w)|\leqq\frac{1}{2\pi}\|\mu\|_{\varepsilon/2,\varepsilon'}\sup_{\substack{z\in\Omega_{\varepsilon/2}\\ w\in\Omega_r\setminus\mathring{\Omega}_\varepsilon}}\frac{1}{|w-z|}$$

où $\|\mu\|_{\varepsilon/2,\varepsilon'}$ est la norme de $\mu|\mathscr{H}_{\varepsilon/2,\varepsilon'}(\Omega)$. D'où le théorème.

Nous allons démontrer que la transformation de Cauchy $\mathscr{C}$ est un isomorphisme topologique en explicitant sa réciproque.

PROPOSITION 1.4.4. *Soient $\Psi=(\bar\varphi_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ un élément de $H^1_\Omega(C)$ et f un élément de $\mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon_1'}(\Omega)$. Pour $0<t<\varepsilon$ et $0<\varepsilon'<\varepsilon_1'$ l'intégrale*

$$I(t,\varphi_{\varepsilon'})(f)=\int_{L_t}\varphi_{\varepsilon'}(w)f(w)dw$$

existe et est indépendante de $0<t<\varepsilon$, du représentant $\varphi_{\varepsilon'}$ de $\bar\varphi_{\varepsilon'}$ et de $0<\varepsilon'<\varepsilon_1'$. De plus $f\to I(t,\varphi_{\varepsilon'})(f)$ est un élément de $\mathscr{H}'_{\varepsilon,\varepsilon'}(\Omega)$.

PREUVE. On a par hypothèse

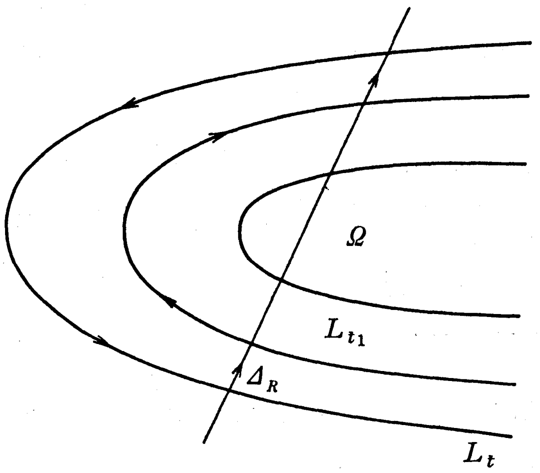
$$|f(w)|\leqq\|f\|_{\varepsilon,\varepsilon_1'}\exp(-\varepsilon_1'\operatorname{Im}\xi_0 w)\qquad(w\in\Omega_\varepsilon)$$
$$|\varphi_{\varepsilon'}(w)|\leqq q^{\varepsilon}_{\varepsilon,t}\exp(\varepsilon'\operatorname{Im}\xi_0 w)\qquad(w\in\mathring{\Omega}_\varepsilon\setminus\mathring{\Omega}_t)\,,$$

ce qui assure l'existence de l'intégrale considérée.

Pour $0<t_1<t<\varepsilon$ le théorème de Cauchy assure que

$$\int_{\gamma_R^{t,t_1}}\varphi_{\varepsilon'}(w)f(w)dw=0$$

où γ_R^{t,t_1} est le circuit suggéré ci-dessous:



Les inégalités déjà citées impliquent que:

a) $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R^{t,t_1}\cap\Delta_R} \varphi_{\varepsilon'}(w)f(w)dw = 0,$

d'où l'indépendance de I par rapport à t.

Les autres indépendances résultent de ce que $\varphi \in H_{\varepsilon'}(C)$ pour $\varepsilon' < \varepsilon_1'$ implique

$$\int_{L_t} \varphi(w)f(w)dw = 0\ ,$$

b) la continuité de I.

D'où la proposition.

Cette proposition nous permet, suivant toujours en cela [11], d'introduire une application notée Int et appelée transformation intégrale

$$\mathrm{Int}\colon H^1_\Omega(C) \longrightarrow \mathscr{H}'(\Omega)$$

en posant

$$\mathrm{Int}\,(\Psi)(f) = I(t, \varphi_{\varepsilon'})(f)$$

pour t et $\varphi_{\varepsilon'}$ comme ci-dessus.

THÉORÈME 1.4.5. *L'application* Int *est l'application réciproque de l'application* $\mathscr{C}$. *Les deux sont des isomorphismes topologiques.*

PREUVE. L'égalité $\mathrm{Int}\circ\mathscr{C} = \mathrm{id}_{\mathscr{H}'(\Omega)}$ provient de 1.3.3. Prouvons donc que $\mathscr{C}\circ\mathrm{Int} = \mathrm{id}_{H^1_\Omega(C)}$.

Pour $\Psi = (\bar{\varphi}_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$, $\mu = \mathrm{Int}\,(\Psi)$ et $\mathscr{C}(\mu) = (\bar{\alpha}_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ on a pour $f \in \mathscr{H}_{\varepsilon,\varepsilon_1'}(\Omega)$

et $0<\varepsilon'<\varepsilon_1'$:

$$\int_{L_\varepsilon}(\alpha_{\varepsilon'}(w)-\varphi_{\varepsilon'}(w))f(w)dw=0$$

par définition de μ et 1.3.3.

La fonction $\beta_{\varepsilon'}=\alpha_{\varepsilon'}-\varphi_{\varepsilon'}$ se prolonge en un élément de $H_{\varepsilon'}(C)$. La preuve est celle de [11].

La partie topologique résulte de la continuité de $\mathscr{C}$ (1.4.3) et du théorème du graphe fermé.

§1.5. Espace Exp (Γ, a) et transformation de Fourier-Borel.

DÉFINITION 1.5.1. Soient Γ un secteur ouvert convexe non vide de C de sommet l'origine et a une fonction d'appui sur Γ. Le point ξ_0 étant le point de pr (Γ) se trouvant sur la bissectrice de Γ, soit $\Gamma_{\varepsilon'}$ le secteur ouvert convexe $\varepsilon'\xi_0+\Gamma$. Une fonction f holomorphe dans Γ sera dite de type exponentiel a dans Γ si, quels que soient ε et $\varepsilon'>0$, il existe $C_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)\geqq 0$ telle que

$$|f(\zeta)|\leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)e^{a(\zeta-\varepsilon'\xi_0)+\varepsilon|\zeta|} \qquad (\zeta\in\Gamma_{\varepsilon'}) .$$

PROPOSITION 1.5.2. *Il existe une topologie naturelle d'espace F.N sur l'espace* Exp (Γ, a).

PREUVE. Il suffit de vérifier les conditions $H.S_1$ et $H.S_2$. Pour cela soit

$$M_k(\zeta)=e^{-a(\zeta-(1/k)\xi_0)-(1/k)|\zeta|} \qquad (k\in N^*) .$$

On a alors

$$\mathrm{Exp}\,(\Gamma, a)=\lim_{\substack{\longleftarrow\\ k\geqq 1}}\mathscr{H}(\Gamma_{1/k}, M_k)$$

(cf. 0.2.2 pour les notations).

Condition $H.S_1$. Elle provient de l'inégalité

$$\left(\frac{M_k(\zeta)}{M_{k+1}(\zeta)}\right)^2\leqq\exp\left(\frac{2}{k(k+1)}a(\zeta_0)\right)\exp\left(\frac{-2|\zeta|}{k(k+1)}\right)$$

qui assure l'intégrabilité de M_k/M_{k+1} dans $\Gamma_{1/k}$.

Condition $H.S_2$. Soit d un nombre strictement positif et strictement plus petit que

$$\inf\left(d(\Gamma_{1/k}, \Gamma^c_{1/(k+1)}), d\left(\frac{1}{k(k+1)}\xi_0, \Gamma^c\right)\right),$$

où $d(A, B)$ désigne la distance des ensembles A et B.

Pour tout $\zeta \in \Gamma_{1/k}$ on pose $d_\zeta = d$ et on vérifie que

$$\sup_{\substack{\zeta \in \Gamma_{1/k} \\ |\zeta - w| \leq d}} M_{k+1}^{-1}(w) M_k(\zeta) < +\infty$$

(car d_ζ ne dépend pas de $\zeta \in \Gamma_{1/k}$), en écrivant que $w - \xi_0/(k+1) = (\zeta - \xi_0/k) + (w - \zeta + (1/k - 1/(k+1))\xi_0)$ et en remarquant que le choix de d permet de considérer $a(w - \zeta + (1/(k(k+1)))\xi_0)$.

PROPOSITION 1.5.3. *La correspondance $f \to f'$ est une application linéaire continue de* $\operatorname{Exp}(\Gamma, a)$ *dans lui-même.*

PREUVE. Elle est élémentaire en utilisant le théorème de Cauchy.

Pour $\zeta \in \Gamma$ la fonction entière $e^{iz\zeta}$ définit un élément de $\mathscr{H}(\Omega)$. En effet si $\varepsilon' > 0$ est assez petit $\zeta - \varepsilon' \xi_0 \in \Gamma$ et

$$\sup_{z \in \Omega_\varepsilon} |e^{iz\zeta - i\varepsilon'\xi_0 z}| \leqq e^{a(\zeta - \varepsilon'\xi_0) + \varepsilon|\zeta - \varepsilon'\xi_0|} .$$

On peut donc introduire la "transformation de Fourier-Borel" dans $\mathscr{H}'(\Omega)$ en posant $\mathscr{F}(\mu)(\zeta) = \langle \mu_z, e^{iz\zeta} \rangle$ $(\zeta \in \Gamma)$.

PROPOSITION 1.5.4. *Soit $\mu \in \mathscr{H}'(\Omega)$, la fonction $\mathscr{F}(\mu)$ est élément de* $\operatorname{Exp}(\Gamma, a)$. *La transformation $\mathscr{F}$ est linéaire et continue de $\mathscr{H}'(\Omega)$ dans* $\operatorname{Exp}(\Gamma, a)$.

PREUVE. L'holomorphie de $\mathscr{F}(\mu)$ se prouve en représentant μ par une mesure. La continuité de μ donne des inégalités

$$|\mathscr{F}(\mu)(\zeta)| \leqq \|\mu\|_{\varepsilon, \varepsilon'} e^{\varepsilon\varepsilon'} e^{a(\zeta - \varepsilon'\xi_0) + \varepsilon|\zeta|}$$

si $\zeta \in \Gamma_{\varepsilon'}$. Ces inégalités assurent aussi la continuité de $\mathscr{F}$. D'où la proposition.

Nous allons introduire deux transformations dites respectivement de Laplace ($\mathscr{L}$) et de Polya ($\mathscr{P}$).

$$\operatorname{Exp}(\Gamma, a) \underset{\mathscr{P}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}} H_\Omega^1(C)$$

réciproques l'une de l'autre vérifiant, de plus, $\mathscr{F} = \mathscr{P} \circ \mathscr{C}$ et $\mathscr{F}^{-1} = \operatorname{Int} \circ \mathscr{L}$.

Pour $f \in \operatorname{Exp}(\Gamma, a)$, $\varepsilon' > 0$ et $\xi' \in \operatorname{pr}(\Gamma)$ on considère la fonction de w:

$$F_{\varepsilon'}(\xi', w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon'\xi_0 + R^+ \xi'} f(\tau) e^{-iw\tau} d\tau$$

qui est définie et holomorphe dans $H^{\varepsilon}_{\xi'}=\{w\in C\,|\,\mathrm{Im}\, w\xi'<-a(\xi')\}$ (demi-plan s'appuyant sur Ω et ne contenant pas Ω) comme on le constate classiquement.

De plus on vérifie que $F_{\varepsilon'}(\xi', w)=F_{\varepsilon'}(\xi'', w)$ pour $w\in H^{\varepsilon}_{\xi'}\cap H^{\varepsilon}_{\xi''}$ grâce au théorème de Cauchy.

On dispose donc d'une famille de fonctions $(F_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ dans $\Omega^{c}=\bigcup_{\xi'\in \mathrm{pr}(\Gamma)} H^{\varepsilon}_{\xi'}$ pour laquelle on a la

PROPOSITION 1.5.5. *La famille $(F_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ définit un élément de $H^{1}_{\Omega}(C)$ noté $\mathscr{L}(f)$ et appelé transformé de Laplace de f. L'application $\mathscr{L}$ (transformation de Laplace) est linéaire et continue.*

PREUVE. Pour $\xi'\in \mathrm{pr}(\Gamma)$ et $\varepsilon>0$ soit $H'_{\xi',\varepsilon}=\{w\,|\,a(\xi')+\mathrm{Im}\, w\xi'<-\varepsilon\}$ de telle sorte que $\Omega^{c}_{\varepsilon}=\bigcup_{\xi'\in\mathrm{pr}(\Gamma)} H'_{\xi',\varepsilon}$.

Pour $w\in H'_{\xi',\varepsilon}$ on a

$$|e^{i\varepsilon'\xi_0 w}F_{\varepsilon'}(w)|\leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)\int_0^\infty e^{-t(\varepsilon/2)}dt\ .$$

Ainsi $F_{\varepsilon'}\in H_{\varepsilon'}(\Omega^{c})$. Maintenant, si $0<\varepsilon'_1<\varepsilon'$ on a l'expression

$$F_{\varepsilon'_1}(w)-F_{\varepsilon'}(w)=\int_{[\varepsilon'_1\xi_0,\varepsilon'\xi_0]} f(\tau)e^{-iw\tau}d\tau$$

($[\varepsilon'_1\xi_0, \varepsilon'\xi_0]$ est le segment d'extrémités $\varepsilon'_1\xi_0$ et $\varepsilon'\xi_0$), qui se déduit des définitions et du théorème de Cauchy. Cela montre que $F_{\varepsilon'_1}-F_{\varepsilon'}$ se prolonge en un élément de $H_{\varepsilon'}(C)$. Par suite $(\bar{F}_{\varepsilon'})_{\varepsilon'}$ est un élément de $H^{1}_{\Omega}(C)$.

La continuité de $\mathscr{L}$ résulte des calculs montrant l'appartenance $F_{\varepsilon'}\in H_{\varepsilon'}(\Omega^{c})$.

PROPOSITION 1.5.6. *On a $\mathscr{L}\circ\mathscr{F}=\mathscr{C}$.*

PREUVE. Pour $\mu\in\mathscr{H}'(\Omega)$, $\xi'\in\mathrm{pr}(\Gamma)$, $\varepsilon>0$ assez petit, $w\in H_{\xi'}$ la fonction $(\tau, z)\to e^{i(z-w)\tau}\varphi_{\varepsilon'}(z)$ est $(d|\tau|\times d|w|)$-intégrable sur $(\varepsilon'\xi_0+R^{+}\xi')\times L_{\varepsilon}$ pour $0<\varepsilon'_1<\varepsilon'$. Comme

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}\circ\mathscr{F}(\mu))_{\varepsilon'}(w)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon'\xi_0+R^{+}\xi'}\mathscr{F}(\mu)(\tau)e^{-iw\tau}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon'\xi_0+R^{+}\xi'}\Big(\int_{L_\varepsilon}\varphi_{\varepsilon'_1}(z)e^{iz\tau}dz\Big)d\tau\end{aligned}$$

par 1.3.3. et

$$(\mathscr{L}\circ\mathscr{F}(\mu))_{\varepsilon'}(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{L_\varepsilon}\varphi_{\varepsilon'_1}(z)\Big(\int_{\varepsilon'\xi_0+R^{+}\xi'}e^{i(z-w)\tau}d\tau\Big)dz$$

par le théorème de Fubini, on obtient

$$((\mathscr{L}\circ\mathscr{F})(\mu))_{\varepsilon'}=\mathscr{C}(\mu)_{\varepsilon'}$$

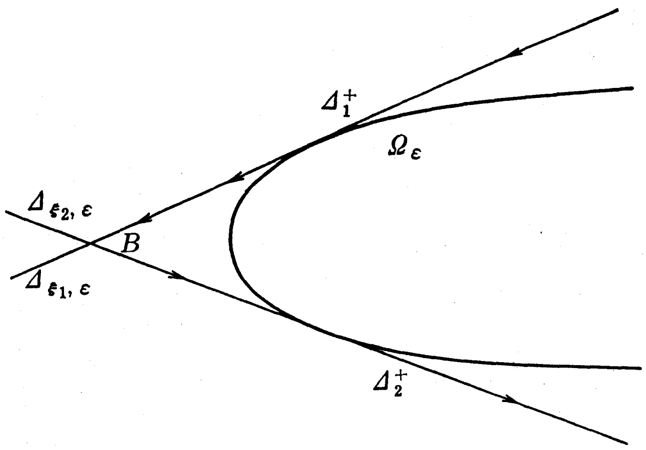
compte tenu de la définition de $\varphi_{\varepsilon'_1}$ et de 1.3.3. C.Q.F.D

On introduit la "transformation de Polya" $\mathscr{P}$ en posant, pour $\Psi=(\bar{\varphi}_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}\in H^1_\Omega(\boldsymbol{C})$

$$\mathscr{P}(\Psi)(\zeta)=\int_{L_\varepsilon} e^{iw\zeta}\varphi_{\varepsilon'}(w)dw\ .$$

On constate que $\mathscr{P}(\Psi)\in\operatorname{Exp}(\Gamma, a)$ et que $\mathscr{P}: H^1_\Omega(\boldsymbol{C})\to\operatorname{Exp}(\Gamma, a)$ est linéaire et continue car $\mathscr{P}=\mathscr{F}\circ\operatorname{Int}$.

On se propose à présent de prouver que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{L}$ sont réciproques l'une de l'autre. Voici tout d'abord un lemme dans l'énoncé duquel γ_ε désignera le chemin:



$\gamma_\varepsilon=\Delta_1^+\Delta_2^+ \qquad B=\Delta_{\xi_2,\varepsilon}\cap\Delta_{\xi_1,\varepsilon}$

($\xi_1, \xi_2\in\operatorname{pr}\Gamma$ sont tels que ξ_0 soit intérieur au secteur Γ_1 limité par $\boldsymbol{R}^+\xi_1$ et $\boldsymbol{R}^+\xi_2$).

LEMME 1.5.7. *Soit $\Psi\in H^1_\Omega(\boldsymbol{C})$, $\Psi=(\bar{\varphi}_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ tel que $\bar{\varphi}_{\varepsilon'}$ admette un représentant $\varphi_{\varepsilon'}$, pour lequel $e^{i\varepsilon'\xi_0 w}\varphi_{\varepsilon'}(w)$ soit borné sur Ω^c_ε (un tel représentant existe, prendre $\mathscr{C}(\operatorname{Int}\Psi)_{\varepsilon'}$). Si Γ'_1 est un sous-secteur relativement compact de $\mathring{\Gamma}_1$ et $\zeta\in\varepsilon'\xi_0+\Gamma'_1$ l'intégrale*

$$\int_{\gamma_\varepsilon} e^{iw\zeta}\varphi_{\varepsilon'}(w)dw$$

converge pour $|\zeta|$ assez grand et vaut $\mathscr{P}(\Psi)(\zeta)$.

PREUVE. De routine.

THÉORÈME 1.5.8. *Les applications $\mathscr{L}$ et $\mathscr{P}$ sont des isomorphismes d'E.L.C réciproques l'un de l'autre.*

PREUVE. Soit $f\in \operatorname{Exp}(\Gamma, a)$ et $\Psi=\mathscr{L}(f)$. Pour $\lambda>\varepsilon'$, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\Psi)(\lambda\xi_0)&=\int_{\gamma_\varepsilon} e^{iw\lambda\xi_0}F_{\varepsilon'}(w)dw\\ &=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{\Delta_1^+} e^{iw\lambda\xi_0}\left(\int_{\varepsilon'\xi_0+R^+\xi_1} f(\tau)e^{-iw\tau}d\tau\right)dw+\int_{\Delta_2^+} e^{iw\lambda\xi_0}\left(\int_{\varepsilon'\xi_0+R^+\xi_2} f(\tau)e^{-iw\tau}d\tau\right)dw\right].\end{aligned}$$

On constate que le théorème de Fubini s'applique et on obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\Psi)(\lambda\xi_0)&=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\varepsilon'\xi_0+R^+\xi_2} f(\tau)\frac{e^{iB(\lambda\xi_0-\tau)}}{\tau-\lambda\xi_0}d\tau-\int_{\varepsilon'\xi_0+R^+\xi_1} f(\tau)\frac{e^{iB(\lambda\xi_0-\tau)}}{\tau-\lambda\xi_0}d\tau\right]\\ &=f(\lambda\xi_0)\end{aligned}$$

par le théorème de Cauchy.

On a donc $\mathscr{P}\circ\mathscr{L}=\mathrm{id}_{\operatorname{Exp}(\Gamma,a)}$ par prolongement analytique.

D'où le théorème.

Ce qui précède prouve aussi le

THÉORÈME 1.5.9 ([15]). *La transformation de Fourier-Borel est un isomorphisme d'E.L.C. de $\mathscr{H}'(\Omega)$ sur* $\operatorname{Exp}(\Gamma, a)$.

§1.6. Espaces $\mathscr{H}_c(\Omega)$, $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$ et isomorphismes de Fourier-Borel.

On peut introduire (cf. [15]) une notion (différente de celle venant d'être étudiée) de fonctions de type exponentiel dans un secteur Γ relativement à une fonction d'appui a de telle sorte que l'espace de ces fonctions apparaisse comme l'espace des sections d'un faisceau défini sur le compactifié radial de $\boldsymbol{C}$ pour a convenable. Ces fonctions sont aussi les transformées de Fourier-Borel des éléments du dual d'une limite inductive d'espaces de fonctions holomorphes définies dans des voisinages "coniques" de Ω. Ces espaces, qui vont être décrits ci-dessous, sont justiciables de théorèmes analogues à ceux énoncés précédemment pour $\mathscr{H}(\Omega)$, $\operatorname{Exp}(\Gamma, a)$ et $H^1_\Omega(\boldsymbol{C})$. Ces théorèmes seront énoncés sans démonstration celles-ci étant en tous points semblables à celles déjà-vues.

Soit $(\Gamma_k)_{k\geq 1}$ une exhaustion de Γ (cf. 0.3). L'espace $\mathscr{H}_c(\Omega)$ est l'espace du type D.F.S

$$\mathscr{H}_c(\Omega)=\varinjlim_{k\geq 1}\mathscr{H}\left(\mathring{\Omega}_{k,c},\ \exp\left(\frac{1}{k}|z|\right)\right)$$

où $\Omega_{k,c}$ est l'ensemble $\Omega(\Gamma_k, a(z)+(1/k)|z|)$.

On choisit Γ_1 de telle sorte que $\xi_0 \in \Gamma_1$. On vérifie qu'algébriquement et topologiquement on a

$$\mathscr{H}_c(\Omega) = \varinjlim_{k \geqq 1} \mathscr{H}\left(\mathring{\Omega}_{k,c}, \exp\left(\frac{-i\xi_0 z}{kK}\right)\right)$$

où K est un réel >0 tel que $\operatorname{Im} \xi_0 w \geqq K|w| + K_1$ pour tout $w \in \Omega_{1,c}$ (conformément au lemme 1.1.1). De même

$$\mathscr{H}_c(\Omega) = \varinjlim_{k \geqq 1} \mathscr{H}_0\left(\Omega_{k,c}, \exp\left(\frac{-i\xi_0 z}{kK}\right)\right)$$

où les fonctions f de $\mathscr{H}_0(\Omega_{k,c}, \exp(-i\xi_0 z/kK))$ sont de plus continues sur $\Omega_{k,c}$ et sont telles que

$$\lim_{\substack{z \in \Omega_{k,c} \\ |z| \to \infty}} \left| f(z) \exp\left(\frac{-i\xi_0 z}{kK}\right)\right| = 0 .$$

Pour $\varepsilon > 0$, $\Omega_{k,\varepsilon,c}$ l'ε-voisinage de $\Omega_{k,c}$ et $L_{k,\varepsilon}$ la route sans fin $\partial\Omega_{k,\varepsilon,c}$, on a le

THÉORÈME 1.6.1. (Représentation intégrale de Cauchy). *Pour* $f \in \mathscr{H}(\mathring{\Omega}_{k,c}, \exp(-i\xi_0 z/kK))$, $0 < \varepsilon < 1/(k(k+1))$ *et* $\varepsilon' < \varepsilon$ *on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L_{k+1,\varepsilon}} f(w) \frac{e^{i\xi_0(z-w)/((k+1)K)}}{w-z} dw \qquad (z \in \Omega_{k+1,\varepsilon',c}) .$$

REMARQUE. Si $w \in Q_{k+1,c}$ la fonction

$$z \longrightarrow \frac{e^{i\xi_0 z/((k+1)K)}}{w-z}$$

est élément de $\mathscr{H}(\mathring{\Omega}_{k+1,c}, \exp(-i\xi_0 z/((k+1)K)))$, si $\mu \in \mathscr{H}_c'(\Omega)$ on définit pour $w \notin \Omega_{k+1,c}$

$$\varphi_{k+1}(w) = \frac{1}{2i\pi} \left\langle \mu_z, \frac{e^{i\xi_0(z-w)/((k+1)K)}}{w-z} \right\rangle .$$

PROPOSITION 1.6.2. *Pour* $f \in \mathscr{H}(\mathring{\Omega}_{k,c}, \exp(-i\xi_0 z/kK))$, $\mu \in \mathscr{H}_c'(\Omega)$ *et* $0 < \varepsilon < 1/(k(k+1))$ *on a*

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{L_{k+1,\varepsilon}} f(w) \varphi_{k+1}(w) dw .$$

Pour $k \geqq 2$, *soit* $H_{\Omega,k,c}$ *l'espace des fonctions holomorphes* h *dans* $\Omega_{k,c}^c$ *telles que pour tout* $0 < \varepsilon < 1 - 1/k$

$$q_{k,\varepsilon}(h) = \sup_{z \in \Omega_{1,\varepsilon} \setminus \Omega_{k,\varepsilon,\varepsilon}} \left| h(w) \exp\left(\frac{i\xi_0 w}{kK}\right) \right| .$$

Cet espace muni de ces normes auxquelles on adjoint celles de la convergence uniforme sur tout compact de Ω_k^c est un espace de Fréchet. Nous noterons $H_{k,\varepsilon}(C)$ le sous-espace (fermé) de $H_{\Omega,k,\varepsilon}$ constitué des fonctions entières f telles que $\sup_{w \in \Omega_{1,\varepsilon}} |f(w) \exp(iw\xi_0/kK)| < +\infty$ et nous noterons $H^1_{k,\varepsilon}$ le quotient $H_{\Omega,k,\varepsilon}/H_{k,\varepsilon}(C)$ qui est aussi un espace de Fréchet. On a des applications naturelles $\varphi_{k+1,k}: H^1_{k+1,\varepsilon} \to H^1_{k,\varepsilon}$ injectives et le système $(H^1_{k,\varepsilon}, \varphi_{k+1,k})_{k\geq 2}$ est projectif et détermine un espace de Fréchet $H^1_{\Omega,\varepsilon} = \varprojlim_{k\geq 2} H^1_{k,\varepsilon}$. Nous noterons $\dot{\varphi}_k$ la classe de φ_k dans $H^1_{k,\varepsilon}$.

THÉORÈME 1.6.3. *Soit $\mu \in \mathscr{H}_\varepsilon'(\Omega)$. La suite $(\dot{\varphi}_k)_{k\geq 2}$ est un élément de $H^1_{\Omega,\varepsilon}$, noté $\mathscr{C}(\mu)$ appelé transformé de Cauchy de μ. L'application $\mathscr{C}$ (transformation de Cauchy) est linéaire continue de $\mathscr{H}_\varepsilon'(\Omega)$ dans $H^1_{\Omega,\varepsilon}$.*

PROPOSITION 1.6.4. *Soient $\psi = (\psi_k)_{k\geq 2}$ un élément de $H^1_{\Omega,\varepsilon}$, $f \in \mathscr{H}_\varepsilon(\Omega)$, k tel que $f \in \mathscr{H}(\dot{\Omega}_{k,\varepsilon}, \exp(-i\xi_0 z/kK))$ et $0 < \varepsilon < 1/(k(k+1))$. L'intégrale*

$$I_{\varepsilon,k} = \int_{L_{k+1,\varepsilon}} \psi_{k+1}(z) f(z) dz$$

est indépendante de ε et de k et définit un élément de $\mathscr{H}_\varepsilon'(\Omega)$ noté Int (ψ). *L'application* Int *est linéaire continue.*

THÉORÈME 1.6.5. *Les applications* Int *et $\mathscr{C}$ sont réciproques l'une de l'autre.*

L'espace $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ est l'espace des fonctions holomorphes dans Γ telles que, pour tout $\Gamma' \subset\subset \Gamma$, tout $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ on ait

$$\sup_{\substack{z \in \Gamma' \\ |z| > \delta}} |f(z) \exp(-a(z) - \varepsilon |z|)| < +\infty .$$

Désignons par $\Gamma(k)$ l'ensemble $\Gamma_k \cap \{z \mid |z| > 1/k\}$. L'espace $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ sera, topologiquement

$$\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a) = \varprojlim_{k\geq 1} \mathscr{H}\left(\Gamma(k), \exp\left(-a(z) - \frac{1}{k}|z|\right)\right) .$$

C'est un espace du type F.N. On vérifie que

$$\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a) = \varprojlim_{k} \mathscr{H}\left(\Gamma'(k), \exp\left(-a(z) - \frac{1}{k}|z|\right)\right) ,$$

où $\Gamma'(k) = \Gamma_k \cap \{z \mid |z| > 1/kK\}$.

Si $\xi \in \Gamma$ alors $z \to e^{iz\xi}$ est élément de $\mathscr{H}_c(\Omega)$ et, pour $\mu \in \mathscr{H}_c'(\Omega)$ on définit la transformée de Fourier-Borel de μ par

$$\mathscr{F}\mu(\xi) = \langle \mu_z, e^{iz\xi} \rangle .$$

PROPOSITION 1.6.6. *Soit $\mu \in \mathscr{H}_c'(\Omega)$. La fonction $\mathscr{F}(\mu)$ est élément de* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ *et la transformation de Fourier-Borel $\mathscr{F}$ est linéaire continue de $\mathscr{H}_c'(\Omega)$ dans* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$.

Pour $f \in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ on pose

$$F_k(\xi', w) = \frac{1}{2\pi} \int_{R+\xi'} f(\tau) e^{-iw\tau} d\tau \qquad (\xi' \in \Gamma_k) .$$

PROPOSITION 1.6.7. *La collection $(F_k(\xi', \cdot))_{\xi' \in \Gamma_k}$ détermine, par recollement, une fonction F_k holomorphe dans $\Omega^c_{k,c}$. La fonction $F_k \in H_{\Omega,k,c}$. La famille $(F_k)_{k \geq 2}$ définit un élément $\mathscr{L}(f)$ de $H^1_{\Omega,c}$ appelé transformée de Laplace de f. La transformation de Laplace $f \to \mathscr{L}(f)$ est linéaire continue de* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ *dans $H^1_{\Omega,c}$ et on a $\mathscr{L} \circ \mathscr{F} = \mathscr{C}$.*

Si on pose $\mathscr{P} = \mathscr{F} \circ \mathscr{C}$ (transformation de "Polya") on a $\mathscr{P} \circ \mathscr{L} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)}$.

THÉORÈME 1.6.8. *La transformation de Fourier-Borel est un isomorphisme d'E.L.C entre $\mathscr{H}_c'(\Omega)$ et* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$.

REMARQUE. Comme on peut s'y attendre les espaces $\mathrm{Exp}(\Gamma, a)$ et $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ (resp. $\mathscr{H}(\Omega)$ et $\mathscr{H}_c(\Omega)$) sont assez différents même lorsque a est borné sur $\mathrm{pr}\, \Gamma$. Nous allons en fournir un exemple.

Soit $\Omega = [0, +\infty) + i[1/4, 3/4]$, il est clair que $f(z) = e^{-z}/\sin z$ est élément de $\mathscr{H}(\Omega)$, mais n'est pas élément de $\mathscr{H}_c(\Omega)$ contrairement à ce qui est annoncé en [14].

Bibliographie

[1] C. A. BERENSTEIN et B. A. TAYLOR, A new look at interpolation theory for entire functions of one variable, Advances in Math., **33** (1979), 109-143.

[2] C. A. BERENSTEIN et D. STRUPPA, Interpolation problems in cones, Preprint, Univ. Orsay, 1981.

[3] R. P. BOAS, Entire Functions, Academic Press, 1954.

[4] A. GROTHENDIECK, Espaces Vectoriels Topologiques, Publicaçao de Sociedade de Matematica de Sao Paulo 3 a Ediçao, 1964.

[5] E. HILLE, Analytic Function Theory, vol. II, Blaisdell Publ. Company, 1962.

[6] T. KAWAÏ, On the theory of Fourier hyperfunctions and its application to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA **17** (1970), 467-483.

[7] B. MALGRANGE, Rapport sur les théorèmes d'indice de Boutet de Monvel et Kashiwara. Prépubl. Institut Fourier, 1982.

[8] A. MÉRIL, Fonctionnelles analytiques à porteur non borné et applications, Thèse 3ème cycle, Bordeaux I, 1981.

[9] A. MÉRIL, Analytic functionals with unbounded carriers and mean periodic functions, a paraître au Trans. Amer. Math. Soc..

[10] A. MÉRIL, Problèmes d'interpolation dans quelques espaces de fonctions non entières, preprint.

[11] M. MORIMOTO, Analytic functionals with non compact carriers, Tokyo J. Math., Vol. **1**, n°1 (1978), 77–103.

[12] M. MORIMOTO et P. SARGOS, Transformation des founctionnelles analytiques à porteurs non compacts, Tokyo J. Math., vol. **4**, n°2 (1981), 457–492.

[13] J. W. de ROEVER, Fourier transform of holomorphic functions and application to Newton interpolation series I, Publ. Math. Centrum, Amsterdam, 1974.

[14] J. W. de ROEVER, Fourier transform of holomorphic functions and application to Newton interpolation series II, T.W. 148 Math. Centrum, Amsterdam, 1975.

[15] J. W. de ROEVER, Complex Fourier transformation and analytic functionals with unbounded carriers, Math. Center. Trac. 89, Amsterdam, 1978.

Address actuelle:
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C.N.R.S. N°226
351, COURS DE LA LIBÉRATION
33405 TALENCE CEDEX, FRANCE