Un Théorème D'unicité Pour les Distributions Sphériques sur L'espace Tangent à un Espace Symétrique

By Charles TOROSSIAN

DMi, VRA 762 du CNRS, Ecole Normale Supérieure, France

(Communicated by Kiyosi ITÔ, M. J. A., Dec. 12, 1996)

Résumé: Nous montrons, qu'il n'existe pas de distributions sphériques singulières, sur l'espace tangent à un espace symétrique, lorsque le paramètre est régulier.

1. Introduction—Rappels. Soit G un groupe de Lie semi-simple à centre fini, σ un automorphisme involutif de G et H la composante connexe des points fixes de σ. L'espace G/H est alors un espace symétrique semi-simple. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition en espaces propres relativement à σ (on note par abus σ pour la différentielle de σ à l'origine). On considère un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q}$ (il y un nombre fini de classes de conjugaison sous H de tels sous-espaces, mais ils ont tous la même dimension appelée rang de G/H) et W le groupe de Weyl. La restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{q}$ est non dégénérée, ainsi que sa restriction à $\mathfrak{a}$, ce qui permet d'identifier $\mathfrak{a}^*$ (le dual) à un sous-espace de $\mathfrak{q}^*$.

Soit T une indéterminée et considérons le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $\mathfrak{q}$, $ad^2(X)$ (pour $X \in \mathfrak{q}$)

$$det(T - ad^2(X)_{\mathfrak{q}}) = T^n + \ldots + R(X)T^r$$

où n désigne la dimension de $\mathfrak{q}$ et r le rang de l'espace symétrique. La fonction polynomiale R est évidemment H-invariante. Un élément $X \in \mathfrak{q}$ sera dit générique si on a $R(X) \neq 0$ et régulier si la dimension du centralisateur dans $\mathfrak{h}$ de X est minimale parmi les éléments de $\mathfrak{q}$ (cette notion s'étend bien-sûr pour les éléments de $\mathfrak{q}_C$). On sait d'après Kostant-Rallis [3] que les éléments génériques sont semi-simples et réguliers, ils forment un ouvert dense dans $\mathfrak{q}$ que l'on notera $\mathfrak{q}_{rs}$.

On note $S[\mathfrak{q}_C]$ l'algèbre symétrique complexe de $\mathfrak{q}$ et $S[\mathfrak{q}_C]^H$ celle des invariants. Cette dernière s'identifie aux opérateurs différentiels H-invariants à coefficients constants sur $\mathfrak{q}$. D'après Chevalley l'algèbre $S[\mathfrak{q}_C]^H$ est isomorphe à l'algèbre $S[\mathfrak{a}_C]^W$ qui est une algèbre de polynômes à r générateurs. Les caractères sont donc donnés par l'évaluation en une forme $\Lambda \in \mathfrak{a}_C^*$.

Une distribution u sur $\mathfrak{q}$ est dite sphérique si elle est H invariante et solution propre des équations defférentielles associées à $S[\mathfrak{q}_C]^H$, i.e. si elle vérifie le système

$$M_\Lambda : \partial(P)u = P(\Lambda)u.$$

Dans cette note nous nous intéressons au problème suivant (voir par exemple Sekiguchi [4]):

Problème. Existe-til des distributions sphériques dont le support est inclus dans $\mathfrak{q} - \mathfrak{q}_{rs}$. De telles distributions sont dites singulières.

Nous montrons qu'il n'existe pas de distributions singulières si le paramètre Λ est régulier, i.e. si l'élément H_Λ correspondant via la forme de Killing est régulier dans $\mathfrak{q}_C$ (ce qui est équivalent à générique, car il est semi-simple).

L'idée de ce résultat nous est venue après la lecture d' un article de Kowata [2]. Il nous semble que ce résultat est contenu implicitement dans l'article en question, mais que l'auteur n'a pas remarqué la chose.

Dans le cas des groupes Harish-Chandra montre que toute distribution sphérique est L^1_{loc} et analytique sur les éléments génériques. En particulier il n'existe pas de distributions singulières (ceci quelle que soit la valeur de Λ). Nous expliquons à la fin de cette note les conséquences de notre résultat.

2. Résultats. On garde les notations de l'introduction, et on prend $\Lambda \in \mathfrak{a}_C^*$ régulier. De tels éléments forment un ouvert de Zariski de $\mathfrak{a}_C^*$.

Proposition 1. *Soit u une distribution vérifiant $\partial(P)u = P(\Lambda)u$, pour tout $P \in S[\mathfrak{q}_C]^H$ et $Support(u) \subset S = \{X \in \mathfrak{q},\ R(X) = 0\}$. Alors on a $u = 0$.*

Preuve: Prés d'un point x du support de u, l'ordre de la distribution est finie. Comme R s'annule sur le support, il existe un entier l tel que l'on ait $R^l u = 0$. Alors u vérifie localement le système d'équations

$$\partial(P)u = P(\Lambda)u,\ R^l u = 0.$$

Maintenant on utilise l'élément de Casimir ω d'ordre 2 associé à la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{q}$ (notée Q). C'est un élément de $S[\mathfrak{q}]^H$. On utilise le résultat classique suivant. On considère P une fonction polynomiale sur $\mathfrak{q}$, homogène de degré m et on note $P^\# \in S[\mathfrak{q}_C]$ le polynôme associé via la forme de Killing, alors on a l'égalité suivante comme opérateurs différentiels sur $\mathfrak{q}$ (cf. [2], [1])

$$ad^m\left(\partial\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right)P = m!\partial(P^\#).$$

Près de ce point x on tire des équations ci-dessus que l'on a aussi $\partial((R^\#)^l)u = 0$, ce qui implique que u est nulle localement car on a aussi $\partial((R^\#)^l)u = (R^\#)^l(\Lambda)u$ et $(R^\#)^l(\Lambda) = R(H_\Lambda) \neq 0$. Ainsi $u = 0$ près de ce point, et par suite $u = 0$ partout. □

On tire maintenant les conclusions de la proposition. On a la proposition immédiate, analogue à un théorème d'Harish-Chandra dans le cas des algèbres de Lie.

Theorem 1. *Soit u une distribution sphérique pour une valeur propre Λ régulière. Si u est nulle sur les éléments génériques alors u est nulle partout.*

On sait par ailleurs, en utilisant le front d'onde, qu'une distribution sphérique est en fait analytique sur les éléments génériques. Réciproquement si on se donne une fonction analytique sur les éléments génériques, H invariante et solution du systéme M_Λ (Λ régulier), alors si on peut la prolonger en une distribution vérifiant le système M_Λ, ce prolongement est unique et H-invariant (car on n'a pas utilisé la H-invariance dans la proposition 1). On pent maintenant penser qu'il est possible d'écrire les conditions de recollement analogues aux conditions de sauts d'Harish-Chandra, pour qu'un tel prolongement existe. Par ailleurs il est conjecturé dans [4] que les hyperfonctions sphériques sont en fait des distributions.

Remerciements. Je remercie D. Barlet et J. L. Clerc pour leurs commentaires utiles. Ce texte a été écrit en 1994, lorsque l'auteur e´tait dans l'URA 750 du CNRS à l'institut Elie Cartan de Nancy.

References

[1] S. Helgason: Groups and Geometric Analysis. Academic Press, Orlando (1984).

[2] A. Kowata: Spherical hyperfunctions on the tangent space of symmetric spaces. Hiroshima Math. J., **21**, 401–418 (1991).

[3] B. Kostant and S. Rallis: Orbits and representations with symmetric spaces. Amer. J. Math., **93**, 753–809 (1971).

[4] J. Sekiguchi: Invariant spherical hyperfunctions on the tangent space of symmetric spaces. Advances Studies in Pure Math., **4**, 83–126 (1985).