Structure and Orbits of Certain Prehomogeneous Vector Spaces Related with Orthogonal Roots

By Iris MULLER

Institut de Recherches Mathématiques Avancées, U.A. 001 du C.N.R.S. Université Louis Pasteur

(Communicated by Kiyosi ITÔ, M. J. A., May 13, 1996)

Abstract: We define a particular class of prehomogeneous vector spaces of parabolic type, in relation with orthogonal roots, on a field of characteristic 0. When the field is algebraically closed, this class contains all prehomogeneous vector spaces of parabolic type, irreducible, regular and reduced for which the conormal bundles of all the orbits are good holonomic varieties, and in general all prehomogeneous vector spaces of parabolic type, commutative and regular. To these prehomogeneous, we associate a root system and give the structure and orbits in term of this root system and certain quadratic forms, for a local or global field of characteristic 0.

1. Notations et définitions. Soit $\boldsymbol{F}$ un corps de caractéristique 0 et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple $\boldsymbol{Z}$-graduée définie sur $\boldsymbol{F}: \mathfrak{g} = \oplus_{i\in \boldsymbol{Z}}\mathfrak{g}_i$. On note H_0 l'unique élément de $\mathfrak{g}_0$ tel que pour tout j on ait $ad(H_0)/\mathfrak{g}_j = jId_{\mathfrak{g}_j}$. B est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

G_e désigne le groupe des automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}_0$ et $Aut_0(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont élémentaires sur une clôture algébrique de $\boldsymbol{F}$.

On rappelle que le groupe G, centralisateur de H_0 dans $Aut_0(\mathfrak{g})$ opère sur $\mathfrak{g}_1$ et que le triplet $(G, \mathfrak{g}_1, Ad)$, noté ici $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$, est un espace vectoriel préhomogène de type parabolique ([6]).

Si x est un élément non nul de $\mathfrak{g}_1$, il existe $h \in \mathfrak{g}_0$ et $y \in \mathfrak{g}_{-1}$ tels que (x, h, y) soit un sl_2-triplet. Les éléments h qui apparaissent ainsi sont dits 1-*simples* et les sl_2-triplets 1-adaptés ([2], [4]). A tout élément h 1-*simple* on associe l'algèbre $\mathfrak{g}(h)$, partie semi-simple de l'algèbre (réductive) engendrée par les sous-espaces propres de $ad(h)$ de valeur propre 2 dans $\mathfrak{g}_1$ et de valeur propre -2 dans $\mathfrak{g}_{-1}$.

Définition 1. *Un élément h 1-simple est dit 1-simple minimal si et seulement si $\mathfrak{g}(h)$ est de $\boldsymbol{F}$-rang un.*

Définition 2. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est dit*

1) *Faiblement commutatif si et seulement si il existe n éléments 1-simples minimaux, commutants deux à deux, deux à deux orthogonaux pour B, de somme $2H_0$.*

2) *Presque commutatif si et seulement si il existe n sl_2-triplets 1-adaptés $(x_i, h_i, y_i)_{1\le i\le n}$ commutants deux à deux, tels que pour tout i, h_i soit 1-simple minimal et $\sum_{1\le i\le n} h_i = 2H_0$.*

3) *Quasi commutatif si et seulement si il existe n éléments 1-simples minimaux $(h_i)_{1\le i\le n}$ de somme $2H_0$ tels que les algèbres $\mathfrak{g}(h_i)$ et $\mathfrak{g}(h_j)$ commutent pour $1 \le i \ne j \le n$.*

Les préhomogènes de type parabolique, commutatifs (i.e. $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour $i \ge 2$) et réguliers sont quasi-commutatifs. Lorsque $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$, ce résultat figure dans [5].

2. Structure des préhomogènes faiblement commutatifs et classification. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est un préhomogène faiblement commutatif, on note $h_1, \dots, h_n$ les éléments 1-simples minimaux ayant les propriétés énoncées dans le 1) de la définition 2. $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre abélienne, déployée, maximale de $\mathfrak{g}$ contenant la sous-algèbre $\mathfrak{b} = \oplus_{1\le i\le n}\boldsymbol{F}h_i$ et Δ est le système de racines associé, que l'on gradue également $(\Delta_i = \{\lambda \in \Delta / \lambda(H_0) = i\})$; on choisit un ordre sur Δ pour lequel toute racine de $\cup_{i\ge 1}\Delta_i$ est positive. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines de Δ_1 de co-racines respectives $h_1, \dots, h_n$.

Par analogie avec la définition 1, une racine λ de Δ_1 est dite 1-minimale si et seulement si la co-racine h_λ est 1-simple minimale. Les racines simples appartenant à Δ_1 sont 1-minimales.

On note s_λ (resp. $\mathfrak{g}^\lambda$) la symétrie (resp. le sous-espace radiciel) correspondant à la racine λ.

Lemme 3. 1) *Δ_i est vide pour $i \ge 3$.*

2) *Toute racine de Δ_2 est somme de deux racines de*

Δ_1.

3) $\Delta_1 = \{\lambda_i,\ s_\delta(\lambda_i),\ 1 \leq i \leq n,\ \delta \in \Delta_0\}$ *ainsi qu'éventuellement de racines de la forme* $(\lambda_i + \lambda_j)/2$, *qui ne sont pas* 1-*minimales.*

Ainsi $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})$, l'algèbre engendrée par $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$, est un idéal de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{b} \bigoplus_{i \neq 0} \mathfrak{g}_i$, on peut donc supposer que $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})$ ce que l'on fait dorénavant.

Proposition 4. *Soient* $h'_1, \ldots, h'_m$ *des éléments* 1-*simples minimaux vérifiant les propriétés du* 1) *de la définition* 2, *alors* $m = n$ *et à la permutation des indices près, il existe* g *dans* G_e *tel que* $g(h'_i) = h_i$ *pour* $i = 1, \ldots, n$.

Proposition 5. $\mathfrak{g}_1$ *est un* $\mathfrak{g}_0$-*module simple si et seulement si* Δ *est irréductible.*

Ainsi, comme on a supposé que $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(\mathfrak{g}_{\pm 1})$, les composantes irréductibles des préhomogènes faiblement commutatifs sont associés à des paraboliques maximaux ([6]); pour en donner la liste, il suffit d'indiquer l'unique racine simple ($\in \Delta_1$) qui définit le parabolique maximal (notation: (Δ, λ_0) lorsque Δ est irréductible).

Soit R l'ensemble des restrictions non nulles de Δ à $\mathfrak{b}$.

Proposition 6. 1) *R est un système de racines qui est irréductible lorsque Δ est irréductible.*

2) *Lorsque R est réduit, il existe une sous-algèbre semi-simple,* $\mathfrak{g}_R$, *admettant* $\mathfrak{b}$ *comme sous-algèbre de Cartan et R comme système de racines.*

Dans les notations des planches de [1], on a:

Proposition 7. *Δ étant irréductible,* (Δ, λ_0) *est associé à un préhomogène faiblement commutatif si et seulement si il figure dans la liste suivante*:

i) (A_{2n-1}, α_n), (C_n, α_n), (D_{2n}, α_{2n}) *ou* (D_{2n}, α_{2n-1}), (E_7, α_7)

ii) (B_k, α_n) *ou* (D_k, α_n) *avec* $2n < k$, (B_{2n}, α_n)

iii) (BC_k, α_n) *ou* (C_k, α_n) *avec* $2n < k$, (BC_{2n}, α_n)

iv) (F_4, α_1), (E_6, α_2), (E_7, α_1) *ou* (E_8, α_8)

v) (B_n, α_n), (BC_n, α_n), (C_{2n}, α_n), (D_{2n}, α_n), (E_7, α_2), (E_8, α_1), (F_4, α_4), (G_2, α_2).

Le préhomogène associé est quasi-commutatif si et seulement si la racine λ_0 *de la liste ci-dessus est longue.*

(R, λ_0) *est de type* (C_n, α_n) *dans le cas* i), (B_{2n}, α_n) *dans le cas* ii), (BC_{2n}, α_n) *dans le cas* iii), (F_4, α_1) *dans le cas* iv); $\Delta = R$ *pour chaque cas de* v).

Le cas i) de la proposition 7 correspond aux préhomogènes de type parabolique commutatifs, irréductibles et réguliers.

Dans les cas (BC_n, α_k) suivant les notations de la planche II de [1] (cf. également n°14§4, chap. VI de [1]) on a:

$$\Delta = \{\pm \varepsilon_i,\ \pm 2\varepsilon_i,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n \quad \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j\ 1 \leq i < j \leq n\}$$

$\alpha_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}$ *pour* $k = 1, \ldots, n-1$ *et* $\alpha_n = \varepsilon_n$.

Dans le cas algébriquement clos, on peut montrer à l'aide des résultats de [8] que les préhomogènes quasi-commutatifs irréductibles sont exactement les préhomogènes irréductibles, réguliers et réduits au sens de [7] tels que tous les fibrés conormaux associés aux orbites sont de bonnes variétés holonomiques.

Les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ s'obtiennent aisément par orthogonalisation successives en prenant $\lambda_1 = \lambda_0$.

3. Orbites 1-simples. W^R est le sous-groupe du groupe de Weyl de Δ qui normalise l'ensemble $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et $\boldsymbol{P}$ désigne le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, permutation de $\{1, \ldots, n\}$ ainsi défini. A toute partie I non vide de $\{1, \ldots, n\}$ on associe l'élément $h_I = \sum_{i \in I} h_i$.

Proposition 8. *h_I et h_J sont dans la même orbite de G ou de G_e si et seulement si I et J sont dans la même orbite de* $\boldsymbol{P}$.

$\bar{\boldsymbol{F}}$ étant une clôture algébrique de $\boldsymbol{F}$, on note $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\boldsymbol{F}} \bar{\boldsymbol{F}}$. A l'aide de [9] on établit:

Théorème 1. 1) *On suppose que* $(\bar{\mathfrak{g}}_0, \bar{\mathfrak{g}}_1)$ *et* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *sont faiblement commutatifs alors tout élément* 1-*simple est dans l'orbite de* G_e *de l'un des* h_I.

2) *Lorsque* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est quasi commutatif* (*resp.* $(\bar{\mathfrak{g}}_0, \bar{\mathfrak{g}}_1)$ *est faiblement commutatif et* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est presque commutatif*), *les orbites* 1-*simples sont en bijection avec les orbites de* $\boldsymbol{P}$ *dans l'ensemble des parties non vides de* $\{1, \ldots, n\}$.

Les hypothèses du 1) du théorème 1 ont la formulation équivalente à celle-ci: $(\bar{\mathfrak{g}}_0, \bar{\mathfrak{g}}_1)$ est faiblement commutatif et $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ n's pas de composantes irréductibles de type (B_k, α_n), réduit ou non avec $k+1 \leq 2n \leq 2(k-1)$; lorsqu'on suppose de plus que $(\bar{\mathfrak{g}}_0, \bar{\mathfrak{g}}_1)$ est quasi-commutatif, $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est presque commutatif.

A tout ensemble A de racines de R, on associe le sous-ensemble $\tilde{A} = \{i \in \{1, \ldots, n\},\ \exists \mu \in A$ tel que $\mu(h_i) \neq 0\}$. Lorsqu'on suppose que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est faiblement commutatif, que Δ est irréductible et que $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ est de dimension un, ceci dans les notations de la proposition 7, les représentants des orbites 1-simples, à l'action de

W^R près, sont donnés par les éléments $h_{\tilde{A}}$, A décrivant les sous-ensembles de racines deux à deux fortement orthogonales de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \cup \{\lambda \in R_2 /$ il existe $1 \leq i < j < k < l \leq n$ vérifiant $\lambda = (\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l)/2\}$.

Dans tous ces cas, les orbites 1-simples ne dépendent que du type de (R, λ_0). Lorsque $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$ ceci explique l'analogie de certains diagrammes d'holonomie (cf. [3]).

4. Orbites de certains préhomogènes quasi-commutatifs. Dans ce paragraphe, on considère une algèbre graduée $\mathfrak{g} = \oplus_{i \in \boldsymbol{Z}} \mathfrak{g}_i$, on donne les orbites des $\boldsymbol{F}$-formes $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ des préhomogènes quasi-commutatifs $(\bar{\mathfrak{g}}_0, \bar{\mathfrak{g}}_1)$ pour lesquels $\bar{\mathfrak{g}}_1$ est un $\bar{\mathfrak{g}}_0$-module simple et le rang de $\mathfrak{g}$ est supérieur ou égal au degré de l'invariant relatif polynomial fondamental, noté ici P ([7]), ceci lorsque $\boldsymbol{F}$ est un corps local ou global de caractéristique 0. Dans ces conditions $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi-commutatif et le degré de P est égal au rang de R. Ces hypothèses sont équivalentes aux suivantes: $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi-commutatif, Δ est irréductible, n'est pas de type G_2, et $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ est de dimension un dans les notations de la proposition 7 ($\Leftrightarrow \lambda_0$ est blanche, non fléchée et non contiguë à une racine compacte dans le diagramme de Satake de Δ). Dorénavant on suppose ces hypothèses vérifiées.

Theoreme 2. *Toute orbite de G dans $\mathfrak{g}_1$ rencontre $\oplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$.*

Ce résultat est une généralisation de la réduction des formes quadratiques.

Avant de donner le résultat essentiel, indiquons deux notations:

(i) soit x un élément de $\mathfrak{g}_1$, on note Q_x la forme quadratique obtenue à partir de la restriction de B au centralisateur de x dans $\mathfrak{g}_0$:

$$(\mathfrak{g}_0)_x = \{y \in \mathfrak{g}_0, [x, y] = 0\} \quad Q_x(y) = B(y, y) \text{ pour } y \in (\mathfrak{g}_0)_x$$

(ii) soit C un ensemble fini, $(e_c)_{c \in C}$ une base de $\boldsymbol{F}^C = \boldsymbol{F} \times \ldots \times \boldsymbol{F}$ et $a \in \boldsymbol{F}^C$, $\oplus_{c \in C} a_c Z_c^2$ désigne la forme quadratique définie sur $\boldsymbol{F}^C$ par:

$$x = \sum_{c \in C} Z_c e_c \to \sum_{c \in C} a_c Z_c^2.$$

On choisit un système de Chevalley approprié de $\mathfrak{g}_R$: $(X_\lambda, h_\lambda, X_{-\lambda})_{\lambda \in R}$. A toute racine courte de R_1, lorsqu'il en existe, $\lambda = (\lambda_i + \lambda_j)/2$, on associe la forme quadratique f_λ définie sur $E_{-1,1}^{i,j} = \{x \in \mathfrak{g}_1 / -[h_i, x] = [h_j, x] = x,\ [h_k, x] = 0, 1 \leq k \neq i, j \leq n\}$ par $f_\lambda(x) = \dfrac{B(ad(x)^2(X_{\lambda_i}), X_{-\lambda_j})}{2B(X_{\lambda_j}, X_{-\lambda_j})}$.

Par le choix du système de Chevalley, à deux racines courtes correspondent deux formes quadratiques équivalentes et on note f l'une de ces formes; f est anisotrope si et seulement si $\Delta = R$. Les autres propriétés de f figurent dans [4].

A tout élément $x = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i X_{\lambda_i}$, $a_i \in \boldsymbol{F}$, on associe le n-uplet $a = (a_1, \ldots, a_n)$; λ étant une racine de R on note $a^\lambda = \Pi_{1 \leq i \leq n} a_i^{n(\lambda, \lambda_i)}$. On associe également une classe de formes quadratiques, définie selon le système de racines R, relativement invariante ou invariante par le sous-groupe $\cap_{1 \leq i \leq n} G_{h_i}$, G_{h_i} désignant le centralisateur de h_i dans G. On note χ_1 le caractère associé et $H = \chi_1(\cap_{1 \leq i \leq n} G_{h_i})$ est regardé comme un sous-groupe de $\boldsymbol{F}^* / \boldsymbol{F}^{*2}$:

1) Lorsque $R = C_n$, $\tilde{Q}_x$ est la classe d'équivalence de $\oplus_{1 \leq i \leq n} af$ et $H = \boldsymbol{F}^* / \boldsymbol{F}^{*2}$.

2) Lorsque $R = F_4$, $\tilde{Q}_x$ est la classe d'équivalence de Q_x définie ci-dessus dans (i).

3) Lorsque $R = E_7$ ou E_8, $\tilde{Q}_x$ est la classe d'équivalence définie par la forme quadratique $\oplus_{\lambda \in R_2} a^\lambda Z_\lambda^2$ selon (ii) ci-dessus

$\chi_1 = 1$ dans les cas exceptionnels F_4, E_7, E_8.

4) Lorsque $R = B_{2n}$ (resp. D_{2n}) on désigne par R_1^B l'ensemble des racines courtes de R_1 lorsque $R = B_{2n}$, $\tilde{Q}_x$ est la classe d'équivalence de $\dot{\oplus}_{\lambda \in R_1^B} a^\lambda Z_\lambda^2$ et H est un sous-groupe de $\{s \in \boldsymbol{F}^* / sf \sim f\} / \boldsymbol{F}^{*2}$; $H = \boldsymbol{F}^* / \boldsymbol{F}^{*2}$ lorsque Δ est de type D_k et $H = \{Id\}$ lorsque $\Delta = B_k$ et $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$.

Théorème 3. *$x = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i X_{\lambda_i}$ et $x' = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i X_{\lambda_i}$ sont dans la même orbite de G si et seulement si*

i) $h = \sum_{a_i \neq 0} h_i$ et $h' = \sum_{b_i \neq 0} h_i$ sont dans la même orbite de G

ii) il existe t dans H tel que $t\tilde{Q}_x = \tilde{Q}_{x'}$

iii) $P(x) \in \chi(G) P(x')$.

La condition *iii*) est inutile sauf dans le cas où $R = F_4$, alors $\chi(G) = \boldsymbol{F}^{*2}$.

Les cas où $R = C_n$ ou F_4 ont fait l'objet de [4].

Lorsque $\boldsymbol{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique ou un corps global de caractéristique 0, la classe d'équivalence de la forme quadratique Q_x ne suffit pas en général à séparer les orbites, cependant on a la simplification suivante lorsque $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$:

Corollaire. *$\Delta \neq B_n$ ou bien $\bar{\mathfrak{g}}$ est de type B_p*

1) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$

Deux sl_2-triplets 1-adaptés, (x, h, y) et $(x', h',$

y'), sont dans la même orbite de G si et seulement si h et h' sont dans la même orbite de G et Q_x et $Q_{x'}$ sont équivalentes.

2) ***F*** *est un corps global alors*

x et x' de $\mathfrak{g}_1$ sont dans la même orbite de G si et seulement x et x' sont dans la même orbite de G_v pour toute place v de ***F***.

References

[1] N. Bourbaki: Groupes et algèbres de Lie, chap. **4—5—6** (1968).

[2] N. Bourbaki: Groupes et algèbres de Lie, chap. **7—8** (1975).

[3] T. Kimura: The *b*-functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces. Nagoya Math. J., **85**, 1–80 (1982).

[4] I. Muller: Formes quadratiques et classification d'orbites pour une classe d'espaces préhomogènes. C.R.Acad. Sci. Paris, **312**, série 1, 319–322 (1991).

[5] I. Muller, H. Rubenthaler and G. Schiffmann: Structure des espaces préhomogène associés à certaines algèbres de Lie graduées. Math. Ann, **274**, 95–123 (1986).

[6] H. Rubenthaler, Espaces préhomogènes de type parabolique. Thèse, Université de Strasbourg (1982).

[7] M. Sato and T. Kimura: A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. Nagoya Math J., **65**, 1–155 (1977).

[8] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima: Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces. Inv. Math., **6**, 117–179 (1980).

[9] E. B. Vinberg: Classification of Homogeneous Nilpotent Elements of a semi-simple Lie Algebra. Selecta Math. Sovietica, **6**, 15–35 (1987).