43. *Le problème de Cauchy pour certaines équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger, X; symétrisations indépendantes du temps*

Par Jiro TAKEUCHI

College of Industrial Technology, Japan et Université de Paris-VI, France

(Communicated by Kiyosi ITÔ, M. J. A., June 8, 1993)

Résumé. Cette Note donne des conditions impliquant que le problème de Cauchy, pour certains opérateurs du type de Schrödinger au sens de la 2-évolution de Petrowsky, soit bien posé dans L^2. Ces conditions signifient qu'on peut réduire cet opérateur en un système diagonal qui est symétrisable par un opérateur pseudo-différentiel, indépendant du temps, borné et inversible dans L^2.

1. Introduction et énoncé des résultats. Soit un opérateur différentiel
$$P(x, D_x, D_t) = D_t^m + a_1(x, D_x)D_t^{m-1} + \cdots + a_m(x, D_x),\ (x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^1,$$
où $D_t = -i\,\partial/\partial t$, $D_x = (D_1, \cdots, D_n)$, $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$,
$$a_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2j} a_{\alpha j}(x) D_x^\alpha \quad (1 \leqq j \leqq m),$$
dont les coefficients $a_{\alpha j}(x)$ sont des fonctions $\mathscr{B}^\infty$ dans $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs complexes.

Nous allons donner des conditions pour que le problème de Cauchy
$$(*) \quad \begin{cases} P(x, D_x, D_t)\, u(x, t) = f(x, t) \text{ sur } \boldsymbol{R}^n \times [0, T] \quad (T > 0), \\ D_t^{j-1}\, u(x, 0) = u_j(x) \text{ dans } \boldsymbol{R}^n \quad (1 \leqq j \leqq m), \end{cases}$$
soit bien posé dans L^2.

Cette Note est une suite de Takeuchi ([7] à [15]).

1.1. Nos conditions s'expriment comme suit:

La première condition pour la partie principale est:

Condition (A.1). Pour $|\alpha| = 2j$ et $1 \leqq j \leqq m$, on a $a_{\alpha j}(x) = a_{\alpha j}$ (Constante).

On note $a_j^0(\xi)$ le symbole principal de l'opérateur $a_j(x, D_x)$ et $P_{2m}(\xi, \tau)$ le symbole principal de l'opérateur $P(x, D_x, D_t)$ au sens de la 2-évolution de Petrowsky [4]:
$$a_j^0(\xi) = \sum_{|\alpha|=2j} a_{\alpha j}\, \xi^\alpha \quad (1 \leqq j \leqq m),$$
$$P_{2m}(\xi, \tau) = \tau^m + a_1^0(\xi)\, \tau^{m-1} + \cdots + a_m^0(\xi).$$
La deuxième condition pour la partie principale est:

Condition (A.2). Les racines (en τ) de l'équation $P_{2m}(\xi, \tau) = 0$ sont non nulles, réelles, distinctes pour $\xi \in \boldsymbol{R}^n \setminus 0$:
$$P_{2m}(\xi, \tau) = \prod_{j=1}^m (\tau - \lambda_j^0(\xi)),\ \lambda_j^0(\xi) \neq \lambda_k^0(\xi) \quad (j \neq k,\ \xi \in \boldsymbol{R}^n \setminus 0),$$

$$\lambda_j^0(\xi) \neq 0 \quad (\xi \in \boldsymbol{R}^n \setminus 0,\ 1 \leqq j \leqq m).$$

Remarque 1. (i) $\lambda_j^0(\xi)$ est positivement homogène de degré 2 en ξ.
(ii) La condition (A. 2) et l'identité d'Euler impliquent que

$$\xi \cdot \nabla_\xi \lambda_j^0(\xi) = 2\lambda_j^0(\xi) \neq 0 \ (\xi \neq 0), \text{ i.e., } \nabla_\xi \lambda_j^0(\xi) \neq 0 \ (\xi \neq 0).$$

On note $a_j^1(x, \xi)$ le symbole sous-principal de $a_j(x, D_x)$ et $P_{2m-1}(x, \xi, \tau)$ le symbole sous-principal de $P(x, D_x, D_t)$ au sens de la 2-évolution de Petrowsky :

$$a_j^1(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2j-1} a_{\alpha j}(x)\xi^\alpha \quad (1 \leqq j \leqq m),$$

$$P_{2m-1}(x, \xi, \tau) = a_1^1(x, \xi)\,\tau^{m-1} + a_2^1(x, \xi)\,\tau^{m-2} + \cdots + a_m^1(x, \xi).$$

Les conditions pour le symbole sous-principal sont :

Condition (B.1). On a

$$\sup_{\substack{(x,\omega,\rho) \in \boldsymbol{R}^n \times S^{n-1} \times \boldsymbol{R}^1 \\ 1 \leqq j \leqq m}} \left| \int_0^\rho \operatorname{Im} P_{2m-1}\,(x + s(\nabla_\xi \lambda_j^0)(\omega),\, \omega,\, \lambda_j^0(\omega))\, ds \right| < +\infty.$$

Condition (B.2). Pour tout multi-indice $\nu(|\nu| \geqq 1)$, on a

$$\sup_{\substack{(x,\omega) \in \boldsymbol{R}^n \times S^{n-1} \\ 1 \leqq j \leqq m}} \int_0^{+\infty} |D_x^\nu \operatorname{Im} P_{2m-1}\,(x + s(\nabla_\xi \lambda_j^0)(\omega),\, \omega,\, \lambda_j^0(\omega))|\, ds < +\infty.$$

Condition (B.3). Pour tout multi-indice ν, on a

$$\sup_{\substack{|\alpha|=2j-1,\ 1 \leqq j \leqq m \\ x \in \boldsymbol{R}^n}} \{\langle x \rangle\, |D_x^\nu(\operatorname{Im} a_{\alpha j}(x))|\} < +\infty,$$

où $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$.

Condition (B.4). Pour tout multi-indice $\nu(|\nu| \geqq 1)$, on a

$$\sup_{\substack{|\alpha|=2j-1,\ 1 \leqq j \leqq m \\ x \in \boldsymbol{R}^n}} \{\langle x \rangle\, |D_x^\nu(\operatorname{Re} a_{\alpha j}(x))|\} < +\infty.$$

Notre résultat s'énonce ainsi :

Théorème 1. *Supposons les conditions (A.1), (A.2), (B.1) à (B.4) vérifiées. Alors, le problème de Cauchy (*) est bien posé dans L^2 : pour tout $f(x, t) \in C_t^1([0, T]\,;\, L^2(\boldsymbol{R}^n))$ et pour tout $(u_1(x), \cdots, u_m(x)) \in H^{2m}(\boldsymbol{R}^n) \times H^{2(m-1)}(\boldsymbol{R}^n) \times \cdots \times H^2(\boldsymbol{R}^n)$, il existe une solution unique $u(x, t)$ du problème de Cauchy (*) telle que*

$$u(x, t) \in C_t^0([0, T]\,;\, H^{2m}(\boldsymbol{R}^n)) \cap C_t^1([0, T]\,;\, H^{2(m-1)}(\boldsymbol{R}^n)) \cap \cdots \cdots \cap C_t^{m-1}([0, T]\,;\, H^2(\boldsymbol{R}^n)),$$

et que de plus on ait l'inégalité d'énergie suivante ;

$$|||\, u(t)\, ||| \leqq C(T) \left\{ |||\, u(0)\, ||| + \int_0^t \| f(s) \|\, ds \right\},\ t \in [0, T],$$

où

$$|||\, u(t)\, |||^2 = \sum_{j=1}^m \| \langle D_x \rangle^{2(m-j)} D_t^{j-1} u(t) \|^2$$

et $\| u(t) \|$ est la $L^2(\boldsymbol{R}^n)$-norme de $u(t) = u(\cdot, t)$.

Remarque 2. Le théorème 1 de cette Note complète le théorème 1.2 de

Takeuchi [5].

1.2. Énonçons des conditions un peu différentes des conditions (B.1) et (B.2):

Condition (C.1). On a

$$\sup_{\substack{(x,\omega,\rho)\in \boldsymbol{R}^n\times S^{n-1}\times \boldsymbol{R}^1\\ 1\leq j,k\leq m}} \left| \int_0^\rho \operatorname{Im} a_k^1(x+s(\nabla_\xi \lambda_j^0)(\omega),\omega)\,ds \right| < +\infty.$$

Condition (C.2). Pour tout multi-indice $\nu(|\nu|\geqq 1)$, on a

$$\sup_{\substack{(x,\omega)\in \boldsymbol{R}^n\times S^{n-1}\\ 1\leq j,k\leq m}} \int_0^{+\infty} |D_x^\nu \operatorname{Im} a_k^1(x+s(\nabla_\xi \lambda_j^0)(\omega),\omega)|\,ds < +\infty.$$

Notre résultat s'énonce ainsi:

Théorème 2. *Supposons les conditions* (*A*.1), (*A*.2), (*C*.1), (*C*.2), (*B*.3) *et* (*B*.4) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy* ($*$) *est bien posé dans* L^2 *au sens du théorème* 1.

1.3. Énonçons une condition plus forte que les conditions (B.1) à (B.3), laquelle contient la condition (B.1) de Takeuchi [8] comme cas particulier.

Condition (D.1). Il existe une constante positive ε_0 telle que, pour tout multi-indice ν, on ait

$$\sup_{\substack{|\alpha|=2j-1,\ 1\leq j\leq m\\ x\in \boldsymbol{R}^n}} \{\langle x\rangle^{1+\varepsilon_0} |D_x^\nu(\operatorname{Im} a_{\alpha j}(x))|\} < +\infty.$$

Notre résultat s'énonce ainsi:

Théorème 3. *Supposons les conditions* (*A*.1), (*A*.2), (*D*.1) *et* (*B*.4) *vérifiées. Alors, le problème de Cauchy* ($*$) *est bien posé dans* L^2 *au sens du théorème* 1.

2. Esquisse de la preuve du théorème 3. En posant

$$U(x,t) = {}^t(u_1(x,t),\cdots,u_m(x,t)),$$
$$u_j(x,t) = \langle D_x\rangle^{2(m-j)} D_t^{j-1} u(x,t) \quad (1\leqq j\leqq m),$$

on a un système de la forme suivante:

$$(**)\quad \begin{cases} D_t\, U(x,t) = M(x,D_x)\, U(x,t) + F(x,t) & \text{sur } \boldsymbol{R}^n\times[0,T], \\ \quad U(x,0) = U_0(x) & \text{dans } \boldsymbol{R}^n, \end{cases}$$

où $F(x,t) = {}^t(0,\cdots,0,f(x,t))$, $U_0(x) = {}^t(\langle D_x\rangle^{2(m-1)}u_1(x),\cdots,u_m(x))$.

Le symbole $\sigma(M)(x,\xi)$ de l'opérateur $M(x,D_x)$ s'écrit comme suit:

$$\sigma(M)(x,\xi) = M_2(\xi) + M_1(x,\xi),$$
$$M_2(\xi) \in \operatorname{Mat}(m\,;S_{1,0}^2(\boldsymbol{R}^n)),\quad M_1(x,\xi)\in \operatorname{Mat}(m\,;S_{1,0}^1(\boldsymbol{R}^n)),$$
$$\text{dét}\,(\tau I - M_2(\xi)) = P_{2m}(\xi,\tau).$$

Grâce à la condition (A.2), on peut diagonaliser le système ($**$) de la façon suivante: Il existe un opérateur pseudo-différentiel diagonal $\mathfrak{D}(x,D_x)\in \operatorname{Mat}(m\,;\text{OP } S_{1,0}^2(\boldsymbol{R}^n))$ et un opérateur pseudo-différentiel inversible $N(x,D_x)\in \operatorname{Mat}(m\,;\text{OP } S_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^n))$ tels que

$$N(x,D_x)\,(D_t - M(x,D_x)) \equiv (D_t - \mathfrak{D}(x,D_x))\,N(x,D_x)$$
$$(\operatorname{mod} \operatorname{Mat}(m\,;\text{OP } S_{1,0}^0(\boldsymbol{R}^n))).$$

On note $\sigma(\mathfrak{D})(x,\xi) = (\delta_{jk}\,\lambda_k(x,\xi))$ le symbole de l'opérateur

$\mathfrak{D}(x, D_x)$. Alors, on a $\lambda_j(x, \xi) = \lambda_j^0(\xi) + \lambda_j^1(x, \xi)$,
où

$$\lambda_j^1(x, \xi) = -P_{2m-1}(x, \xi, \lambda_j^0(\xi))\chi(\xi) \Big/ \frac{\partial P_{2m}}{\partial \tau}(\xi, \lambda_j^0(\xi)) \in S_{1,0}^1(\boldsymbol{R}^n),$$

$\chi(\xi) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $\chi(\xi) = 1$ $(|\xi| \geqq 2)$, $\chi(\xi) = 0$ $(|\xi| \leqq 1)$.

Grâce aux conditions (D.1) et (B.4), on a

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta (\operatorname{Im} \lambda_j^1(x, \xi))| \leqq C_{\alpha\beta} \langle x\rangle^{-1-\varepsilon_0} \langle\xi\rangle^{1-|\alpha|}$$

et

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta (\operatorname{Re} \lambda_j^1(x, \xi))| \leqq C_{\alpha\beta} \langle x\rangle^{-1} \langle\xi\rangle^{1-|\alpha|} \quad (|\beta| \geqq 1).$$

Donc, on peut utiliser le résultat précédent de Takeuchi [15].

Références

[1] A. Baba: The L^2-wellposed Cauchy problem for Schrödinger type equations. Tsukuba J. Math., **16**, 235–256 (1992).

[2] S. Mizohata: Sur quelques équations du type Schrödinger. Séminaire J. Vaillant, Université de Paris-VI (1980/1981).

[3] ——: Sur quelques équations du type Schrödinger. Journées "Équations aux Dérivées Partielles". Saint-Jean-de-Monts, Soc. Math. France (1981).

[4] I. G. Petrowsky: Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nicht-analytischen Funktionen. Bull. Univ. État Moscou, **1**, 1–74 (1938).

[5] J. Takeuchi: On the Cauchy problem for some non-kowalewskian equations with distinct characteristic roots. J. Math. Kyoto Univ., **20**, 105–124 (1980).

[6] ——: Some remarks on my paper "On the Cauchy problem for some non-kowalewskian equations with distinct characteristic roots". ibid., **24**, 741–754 (1984).

[7] ——: Le problème de Cauchy pour quelques équations aux dérivées partielles du type de Schrödinger. C. R. Acad. Sci. Paris, **310**, série I, 823–826 (1990).

[8] ——: ditto. II. ibid., 855–858.

[9] ——: ditto. III. ibid., **312**, série I, 341–344 (1991).

[10] ——: ditto. IV. ibid., 587–590.

[11] ——: ditto. V. ibid., 799–802.

[12] ——: ditto. VI. ibid., **313**, série I, 761–764 (1991).

[13] ——: ditto. VII. ibid., **314**, série I, 527–530 (1992).

[14] ——: ditto. VIII. ibid., **315**, série I, 1055–1058 (1992).

[15] ——: ditto. IX. ibid., **316**, série I (1993)(sous presse).