78. Sur les solutions élémentaires des opérateurs linéaires aux différences à coefficients constants possédant les termes infinis dépendant du paramètre

Par Mamoru SAWADA
Département de Mathématique, Faculté d'Éducation, Université Yamanashi

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Oct. 12, 1988)

1. F. Trèves a considéré l'existence des solutions élémentaires des opérateurs aux dérivées partielles à coefficients constants dépendant du paramètre [1]. Il a prouvé que l'on pouvait les choisir comme les C^∞fonctions du paramètre à valeur dans $\mathscr{D}'$. (espace des distributions) [2]

Dans cette note, nous allons prouver la même conclusion de Trèves pour les opérateurs linéaires aux différences à coefficients constants possédant les termes infinis dépendant du paramètre.

2. Théorème. *Soit Λ une C^∞variété. $\{C_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ soit une suite des C^∞ fonctions en $\lambda \in \Lambda$ à valeur dans $\boldsymbol{C}$ qui ait les propriétés que pour tout λ $\{C_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty \neq \{0\}$ et pour tout opérateur différentiel D_λ sur Λ $\sum_{j=1}^\infty |D_\lambda C_j(\lambda)|$ converge localement uniformément dans Λ. Et $\{a_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ soit la même suite à valeur dans R^n qui ait les propriétés que pour tout λ $\{a_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ soient mutuellement distinctes et pour tout opérateur différentiel D_λ $\{D_\lambda a_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ soit localement uniformément bornée dans Λ. Alors les opérateurs linéaires aux différences à coefficients constants possédant les termes infinis dépendant du paramètre $\sum_{j=1}^\infty C_j(\lambda)\tau_{a_j(\lambda)}$ ont une solution élémentaire E_λ qui est une C^∞ fonction en λ à valeur dans $\mathscr{D}'$.*

Démonstration. En établissant le Lemme 3 de cette note, on peut le prouver par la même méthode que [1] dans lequel on a obtenu le Théorème 1 des Lemmes 3 et 4.

3. Lemme 1. *Soient $\{C_j\}_{j=1}^\infty \neq \{0\}$ une suite des nombres complexes qui soit absolument convergente, $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$ et $\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$ une suite des nombres réels tel que $|\alpha_j| \leqq M$. Posons $F(\eta, z) = \sum_{j=1}^\infty C_j e^{i\eta_j} e^{i\alpha_j z}$ pour $z \in \boldsymbol{C}$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$. Alors on obtient* (1) *$F(\eta, z) \not\equiv 0$ pour tout η.*

(2) *$F(\eta, z)$ est uniformément continue en η dans un disque $\{z \mid |z| \leqq r\}$ pour tout $r > 0$.*

(3) *Il existe un entier $m > 0$ tel que $F(\eta, z)$ admet au plus m racines, si l'on compte chacune avec son ordre de multiplicité dans l'unité-disque $\{z \mid |z| \leqq 1\}$ pour tout η.*

(4) *On fixe un m de* (3). *Pour tout $\{r_k\}_{k=1}^{m+1}$; $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{m+1} < 1$, on pose $\Phi(\eta) = \mathrm{Max}_{1 \leqq k \leqq m+1} \inf_{|z| = r_k} |F(\eta, z)|$. Alors $\Phi(\eta)$ admet un minimum positif dans R^∞.*

Démonstration. (1) S'il n'était pas vrai, on pourrait faire l'hypothèse que $C_1 \neq 0$ et $-C_1=\sum_{j=2}^{\infty} C_j e^{i(\alpha_j-\alpha_1)z}$. On pose $s^+(z)=\sum_{\alpha_{j'}>\alpha_1} C_{j'} e^{i(\alpha_{j'}-\alpha_1)z}$ et $s^-(z) =\sum_{\alpha_{j''}<\alpha_1} C_{j''} e^{i(\alpha_{j''}-\alpha_1)z}$. Sup $\{|s^-(z)| \mid z\,;\ \mathrm{Im}\, z \leqq -\delta\}$ tend vers 0 lorsque $\delta \to +\infty$. Donc il existe $G>0$ tel que $|C_1|/2 \leqq |s^+(z)| \leqq 3|C_1|/2$ pour z; $\mathrm{Im}\, z \leqq -G$.

Pour z; $\mathrm{Im}\, z \geqq -G$, on obtient

$$|s^+(z)| \leqq \sum_{j'} |C_{j'}|\,|e^{i(\alpha_{j'}-\alpha_1)z}| \leqq \sum_{j'} |C_{j'}|\,|e^{(M+|\alpha_1|)G}.$$

On en déduit que s^+ et s^- sont bornés dans tout $\boldsymbol{C}$ et ne sont pas constants. Mais c'est en contradiction avec le théorème de Liouville.

(2) Soit $\eta^0 \in R^\infty$. Dans un disque $\{z \mid |z| \leqq r\}$, on a $|F(\eta, z)-F(\eta^0, z)| \leqq \sum_{j=1}^{N} |C_j|\,|\eta_j-\eta_j^0|\, e^{rM}+2e^{rM} \sum_{j>N} |C_j|$.

Pour $\varepsilon>0$, on prend N tel que $2e^{rM} \sum_{j>N} |C_j|<\varepsilon/2$ et pose $V(\eta^0)= \{\eta \in R^\infty \mid |\eta_j-\eta_j^0|<\varepsilon e^{-rM}/2(\sum_{j=1}^{N} |C_i|)$ pour $1 \leqq j \leqq N\}$. Alors pour tout $\eta \in V(\eta^0)$, on obtient $|F(\eta, z)-F(\eta^0, z)|<\varepsilon$.

(3) S'il existe un entier N_j tel que $\eta_j-\eta'_j=2\pi N_j$ pour tout j, $F(\eta, z)= F(\eta', z)$. Donc on peut toujours supposer que $\eta \in [0, 2\pi]^\infty$. Soit $\eta^0 \in [0, 2\pi]^\infty$. On déduit de (1) que $F(\eta^0, z)$ admet au plus m_0 racines dans le disque $\{z \mid |z| \leqq 2\}$. Donc il existe un r; $1<r<2$ tel que $\inf_{|z|=r} |F(\eta^0, z)|>0$.

On déduit de (2) qu'il existe un voisinage $V(\eta^0)$ de η^0 tel que pour tout $\eta \in V(\eta^0)$, $|F(\eta, z)-F(\eta^0, z)|<\inf_{|z|=r} |F(\eta^0, z)|$ dans le disque $\{z \mid |z| \leqq r\}$.

Spécialement on obtient $|F(\eta, z)-F(\eta^0, z)|<|F(\eta^0, z)|$ dans le cercle $\{z \mid |z|=r\}$. On déduit du théorème de Rouché que pour tout $\eta \in V(\eta^0)$, $F(\eta, z)$ admet au plus m_0 racines dans le disque $\{z \mid |z| \leqq r\}$.

Donc il est clair que pour tout $\eta^0 \in [0, 2\pi]^\infty$, il existe un voisinage $V(\eta^0)$ de η^0 et un entier m_0 tel que pour tout $\eta \in V(\eta^0)$, $F(\eta, z)$ admet au plus m_0 racines dans l'unité-disque $\{z \mid |z| \leqq 1\}$.

Comme $[0, 2\pi]^\infty$ est compact, il existe un entier $m>0$ tel que $F(\eta, z)$ admet au plus m racines dans l'unité-disque $\{z \mid |z| \leqq 1\}$ pour tout $\eta \in [0, 2\pi]^\infty$.

(4) On déduit des (2) et (3) que $\Phi(\eta)$ est une fonction continue et positive. Donc on obtient la conclusions dans $[0, 2\pi]^\infty$ qui est compact.

Lemme 2. *Soit $\Lambda \subset R^d$ pour un entier $d>0$. Soit $\{C_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty}$ une suite des fonctions continues en $\lambda \in \Lambda$ à valeur dans $\boldsymbol{C}$ tel que la série $\sum_{j=1}^{\infty} |C_j(\lambda)|$ converge uniformément dans Λ et elle soit positive pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit $\{a_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty}$ la même suite à valeur dans R^n qui soient mutuellement distinctes et $|a_j(\lambda)| \leqq M<\infty$ $(j=1, 2, \cdots)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Alors pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$ il existe un voisinage $U(\lambda_0)$ de λ_0, un $\theta \in R^n$; $|\theta|=1$, un entier $m>0$, un nombre réel $K>0$ tel que pour $\{r_k\}_{k=1}^{m+1}$; $0<r_1<r_2<\cdots<r_{m+1}<1$, tout $\xi \in R^n$, tout $\lambda \in U(\lambda_0)$*

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq m+1} \inf_{|z|=r_k} \left| \sum_{j=1}^{\infty} C_j(\lambda) e^{-i\langle a_j(\lambda), \xi+z\theta\rangle} \right| \geqq \frac{K}{2}.$$

Démonstration. D'abord on peut choisir θ tel que $|\theta|=1$ et $j \neq j' \Rightarrow \langle a_j(\lambda_0), \theta\rangle \neq \langle a_{j'}(\lambda_0), \theta\rangle$. Alors on applique le Lemme 1 à

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j(\lambda_0) e^{-i\langle a_j(\lambda), \xi\rangle} e^{-i\langle a_j(\lambda_0), \theta\rangle z}.$$

Soit K son minimum positif dans $\Lambda \times R^n$. On obtient

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} C_j(\lambda) e^{-i\langle a_j(\lambda), \xi+z\theta\rangle} - \sum_{j=1}^{\infty} C_j(\lambda_0) e^{-i\langle a_j(\lambda), \xi\rangle} e^{-i\langle a_j(\lambda_0), \theta\rangle z} \right|$$

$$\leqq \sum_{j\leqq N} |C_j(\lambda)-C_j(\lambda_0)|\,e^M + \sum_{j\leqq N} |C_j(\lambda_0)|\,|a_j(\lambda)-a_j(\lambda_0)|\,e^M$$
$$+\left\{\sum_{j>N}^{\infty} |C_j(\lambda)| + \sum_{j>N}^{\infty} |C_j(\lambda_0)|\right\} e^M$$

dans l'unité-disque $\{z\,|\,|z|\leqq 1\}$.

Donc il est clair qu'il existe un voisinage de $U(\lambda_0)$ de λ_0 tel que

$$\underset{1\leqq k\leqq m+1}{\mathrm{Max}}\ \inf_{|z|=r_k} \left|\sum_{j=1}^{\infty} C_j(\lambda) e^{-i\langle a_j(\lambda),\,\xi+z\theta\rangle}\right| \geqq \frac{K}{2}$$

pour tout $\xi \in R^n$ tout $\lambda \in U(\lambda_0)$.

Lemme 3. *Posons* $Q(\lambda,\xi)=\sum_{j=1}^{\infty} C_j(\lambda) e^{-i\langle a_j(\lambda),\,\xi\rangle}$. *On suppose que* Λ, $\{C_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty}$, $\{a_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty}$ *satisfassent aux mêmes hypothèses du Lemme* 2. *Ensuite soient* $\{C_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty}$, $\{a_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty}$ *une suite des* C^1*fonctions. Alors pour tout* $\lambda_0 \in \Lambda$, *il existe un voisinage* $U(\lambda_0)$ *de* λ_0 *dans lequel pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe* $\delta>0$ *tel que*

$$|\xi-\xi'|<\delta, \qquad |\lambda-\lambda'|<\frac{\delta}{|\xi'|+1} \Rightarrow |Q(\lambda,\xi+z\theta)-Q(\lambda',\xi'+z\theta)|<\varepsilon$$

pour $\xi, \xi' \in R^n$, $\lambda, \lambda' \in U(\lambda_0)$, $|\theta|=1$.

Démonstration. Prenons N tel que $2\sum_{j>N}^{\infty}|C_j(\lambda)|\,e^M<\varepsilon/4$. Pour $j=1,2,\cdots,N$, on obtient

$$|C_j(\lambda)e^{-i\langle a_j(\lambda),\,\xi+z\theta\rangle}-C_j(\lambda')e^{-i\langle a_j(\lambda'),\,\xi'+z\theta\rangle}|$$
$$\leqq |C_j(\lambda)-C_j(\lambda')|\,e^M+|C_j(\lambda')|\,|e^{-i\langle a_j(\lambda),\,\xi+z\theta\rangle}-e^{-i\langle a_j(\lambda),\,\xi'+z\theta\rangle}|$$
$$+|C_j(\lambda')|\,|e^{-i\langle a_j(\lambda),\,\xi'+z\theta\rangle}-e^{-i\langle a_j(\lambda'),\,\xi'+z\theta\rangle}|$$
$$\leqq |C_j(\lambda)-C_j(\lambda')|\,e^M+|C_j(\lambda')|\,e^M M\,|\xi-\xi'|+|C_j(\lambda')|\,|a_j(\lambda)-a_j(\lambda')|\,(|\xi'|+1)e^M.$$

Par l'hypothèse, on peut supposer qu'il existe constants $L_j, \gamma_j, s>0$ tel que $|C_j(\lambda)-C_j(\lambda')|\leqq L_j|\lambda-\lambda'|$, $|a_j(\lambda)-a_j(\lambda')|\leqq \gamma_j|\lambda-\lambda'|$, $\sum_{j=1}^{\infty}|C_j(\lambda)|\leqq s<+\infty$ pour λ, λ' qui appartiennent au voisinage $U(\lambda_0)$ de λ_0. Donc on obtient la conclusion en prenant $\delta>0$ tel que

$$\mathrm{Max}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} L_j + s \underset{1\leqq j\leqq N}{\mathrm{Max}}\ \gamma_j\right)e^M,\ s e^M M\right]\delta<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Je tiens à remercier Prof. T. Muramatu pour l'aide qu'il m'a apportée.

Références

[1] F. Trèves: Fundamental solutions of linear partial differential equations with constant coefficients depending on parameter. Amer. J. Math., vol. LXXXIV, pp. 561–577 (1962).

[2] L. Schwartz: Théorie des Distributions. Tome 1. Hermann, Paris (1950).