102. *Existence de bases opérateurs pour l'espace des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. II*

Par H. CHARRIÈRE
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Nov. 12, 1987)

Cette note fait suite à [1]. On utilisera les mêmes notations.

4) **Exemple d'application à la perturbation des conditions au bord.** Soit l'équation $u_{tt}-u_{xx}=0$, où t et x sont des variables réelles. La solution u dont les conditions initiales relatives à t sont $u(0,x)=u_0$ *et* $u_t(0,x)=u_1$ s'écrit:

$$u=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}u_1+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}u_0$$

où $\boldsymbol{E}$ est l'opérateur $f(t,x)\longmapsto(1/2)\int_{-t}^{+t}f(t,v)dv$

et $\boldsymbol{E}_t$ est l'opérateur $f(t,x)\longmapsto(1/2)(f(t,t)+f(t,-t))$.

La solution u, dont les conditions initiales relatives à x sont $u(t,0)=b_0$ et $u_x(t,0)=b_1$ s'écrit:

$$u=\boldsymbol{F}\underset{t}{\ast}b_1+\boldsymbol{F}_x\underset{t}{\ast}b_0$$

où $\boldsymbol{F}$ est l'opérateur $f(t,x)\longmapsto(-1/2)\int_{-x}^{+x}f(v,x)dv$

et $\boldsymbol{F}_x$ est l'opérateur $f(t,x)\longmapsto(-1/2)(f(x,x)+f(-x,x))$.

$\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F}_x$ sont des solutions de l'équation $u_{tt}-u_{xx}=0$ et admettent donc la décomposition suivante, qui permet le "changement de base":

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_t)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F})\\ \boldsymbol{F}_x=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_{xt})+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_x)\\ \quad=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}\partial\delta_{(t,0)}/\partial x\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_t)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}\partial\delta_{(t,0)}/\partial x\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}).\end{cases}$$

On considère maintenant les quatre conditions au bord:

$$(cb+):\ u(t,0)=0\quad\forall t\geq 0\Longleftrightarrow b_0(t)=0\quad\forall t\geq 0$$
$$(cb-):\ u(t,0)=0\quad\forall t\leq 0\Longleftrightarrow b_0(t)=0\quad\forall t\leq 0$$
$$(cbp+):\ u(t,0)=u_x(t,0)\quad\forall t\geq 0\Longleftrightarrow b_0(t)=b_1(t)\quad\forall t\geq 0$$
$$(cbp-):\ u(t,0)=u_x(t,0)\quad\forall t\leq 0\Longleftrightarrow b_0(t)=b_1(t)\quad\forall t\leq 0$$

Désignons par b_1^+, b_1^-, b_1^{p+}, b_1^{p-} la fonction $u_x(t,0)$ dans ces quatre situations. La solution u prend les valeurs correspondantes:

$$u^*=\boldsymbol{F}\underset{t}{\ast}b_1^*=(\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_t)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}))\underset{t}{\ast}b_1^*$$
$$=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_t\underset{t}{\ast}b_1^*)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}\underset{t}{\ast}b_1^*)$$

où $*$ désigne successivement $+$ et $-$,

$$
\begin{aligned}
u^* &= (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_x)\underset{t}{\barwedge} b_1^* \\
&= (\boldsymbol{E}\underset{x}{\barwedge}(\delta_{(t,0)}+\partial\delta_{(t,0)}/\partial x)\underset{x}{\barwedge}(1\underset{t}{\barwedge}\boldsymbol{F}_t)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\barwedge}(\delta_{(t,0)}+\partial\delta_{(t,0)}/\partial x)\underset{x}{\barwedge}(1\underset{t}{\barwedge}\boldsymbol{F}))\underset{t}{\barwedge} b_1^* \\
&= \boldsymbol{E}\underset{x}{\barwedge}(\delta_{(t,0)}+\partial\delta_{(t,0)}/\partial x)\underset{x}{\barwedge}(1\underset{t}{\barwedge}\boldsymbol{F}_t\underset{t}{\barwedge} b_1^*)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\barwedge}(\delta_{(t,0)}+\partial\delta_{(t,0)}/\partial x)\underset{x}{\barwedge}(1\underset{t}{\barwedge}\boldsymbol{F}\underset{t}{\barwedge} b_1^*)
\end{aligned}
$$

où $*$ désigne successivement $p+$ et $p-$.

On definit alors deux types d'application portant sur le couple ${}^t(b_0, b_1)$ des conditions initiales en $x=0$:

—les applications aux perturbations $p^+ : {}^t(0, b_1^+) \to {}^t(b_1^+, b_1^+)$ et $p^- : {}^t(0, b_1^-) \to {}^t(b_1^-, b_1^-)$ qui changent les conditions au bord $(cb+)$ et $(cb-)$ en $(cbp+)$ et $(cbp-)$ respectivement,

—la symétrie $s: {}^t(b_0, b_1) \to {}^t(\delta_{(2t,x)}\underset{t}{\barwedge} b_0,\ \delta_{(2t,x)}\underset{t}{\barwedge} b_1)$ qui échange les conditions au bord valables pour $t \geq 0$ et celles qui sont valables pour $t \leq 0$.

L'identité est obtenue en composant ces applications dans l'ordre suivant

$$
\begin{pmatrix} b_1^- \\ b_1^- \end{pmatrix} \xmapsto{(p^-)^{-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix} \xmapsto{s} \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^+ \end{pmatrix} \xmapsto{p^+} \begin{pmatrix} b_1^+ \\ b_1^+ \end{pmatrix} \xmapsto{s} \begin{pmatrix} b_1^- \\ b_1^- \end{pmatrix}.
$$

Aux applications p^+, p^- et s correspondent respectivement des applications $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ et $\mathcal{S}$ portant sur le couple ${}^t(u_0, u_1)$ des conditions initiales en $t=0$ puisque celui-ci est entièrement déterminé par ${}^t(b_0, b_1)$ et on définit alors l'application $\Pi = \mathcal{S}\circ\mathcal{P}\circ\mathcal{S}\circ(\mathcal{P}^-)^{-1}$ qui mesure la perturbation provoquée sur ${}^t(u_0, u_1)$:

$$\mathcal{S}({}^t(u_0, u_1)) = {}^t(\delta_{(t,2x)}\underset{x}{\barwedge} u_0,\ \delta_{(t,2x)}\underset{x}{\barwedge} u_1)$$

$$\mathcal{P}^+({}^t(u_0, u_1)) = \mathcal{P}^-({}^t(u_0, u_1)) = {}^t((\delta_{(t,0)}+\partial\delta_{(t,0)}/\partial x)\underset{x}{\barwedge} u_0,\ (\delta_{(t,0)}+\partial\delta_{(t,0)}/\partial x)\underset{x}{\barwedge} u_1)$$

$(\mathcal{P}^-)^{-1}({}^t(u_0, u_1)) = {}^t\left(\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\right)\underset{x}{\barwedge} u_0,\ \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\right)\underset{x}{\barwedge} u_1\right)$ où $\int_0^{+\infty} e^{-x}$ désigne l'opérateur $f(t, x) \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-v} f(t, v)dv$, donc

$$
\begin{aligned}
\Pi({}^t(u_0, u_1)) &= \delta_{(t,2x)}\underset{x}{\barwedge}(\delta_{(t,0)}+\partial\delta_{(t,0)}/\partial x)\underset{x}{\barwedge}\delta_{(t,2x)}\underset{x}{\barwedge}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\right)\underset{x}{\barwedge}{}^t(u_0, u_1) \\
&= \overline{\mathcal{F}}_x((1/1+ix)\circ\delta_{(t,-x)}\circ(1+ix)\circ\delta_{(t,-x)})\underset{x}{\barwedge}{}^t(u_0, u_1) \\
&= \overline{\mathcal{F}}_x((1-ix)/(1+ix))\underset{x}{\barwedge}{}^t(u_0, u_1).
\end{aligned}
$$

Référence

[1] H. Charrière: Existence de bases opérateurs pour l'espace des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. I. Proc. Japan Acad., **63A**, 311–314 (1987).