87. *Existence de bases opérateurs pour l'espace des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants.* I

Par H. CHARRIÈRE
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Oct. 12, 1987)

On définit d'abord, pour des bons opérateurs à n variables, un transformé de Fourier et un produit de convolution dits "partiels". Pour simplifier les notations on prendra, dans les paragraphes 1, 2, 3, deux variables x_1 et x_2, mais x_1 peut être remplacé par un n_1-uple $(y_1, \cdots, y_{n_1})$ et x_2 par un $(n-n_1)$-uple $(y_{n_1+1}, \cdots, y_n)$ de variables.

1) Transformé de Fourier partiel d'un opérateur. Soit

$$Q=(Q_{k,j})_{(k,j)\in N^2\times N^2}$$

un bon opérateur analytique à deux variables ([1]).

Définition. On appelle *transformé de Fourier partiel* par rapport à x_1, de Q, le bon opérateur analytique, noté $\mathcal{F}_{x_1}(Q)$, associé à la matrice infinie dont le terme général $(\mathcal{F}_{x_1}(Q))_{k,j}$ est donné par :

$$(\mathcal{F}_{x_1}(Q))_{(k_1,k_2),(j_1,j_2)}=\sum_{-k_1\le l\le 0} i^{j_1-k_1}(-1)^{l+j_1}(j_1!/(-l)!(k_1+l)!)Q_{(j_1+l,k_2),(k_1+l,j_2)}.$$

On définit de même $\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(Q)$ en remplaçant i par $(-i)$ dans la définition de $(\mathcal{F}_{x_1}(Q))_{k,j}$. Tout bon opérateur à deux variables est entièrement déterminé par ses valeurs sur les fonctions $(x_1, x_2)\to f(x_1)g(x_2)$ et on a la formule suivante, qui sert de définition au transformé de Fourier partiel d'un opérateur Q qui ne serait plus analytique mais C^∞ par exemple :

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{x_1}(Q)((y_1, y_2)\to f(y_1)g(y_2))(x_1, x_2)\\&\quad=\mathcal{F}(y_1\mapsto Q((z_1, z_2)\mapsto e^{-ix_1z_1}g(z_2))(y_1, x_2))(y_1\mapsto f(x_1+y_1)).\end{aligned}$$

Cette formule ramène en effet la connaisance des transformés de Fourier d'opérateurs à celle des transformés de Fourier des opérateurs particuliers que sont les fonctions.

Quelques propriétés : $\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(\mathcal{F}_{x_1}(Q))=\mathcal{F}_{x_1}(\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(Q))=Q$, $\mathcal{F}_{x_1}(\partial Q/\partial x_1)=\mathcal{F}_{x_1}(Q)\circ ix_1$ $\partial(\mathcal{F}_{x_1}(Q))/\partial x_1=\mathcal{F}_{x_1}(Q\circ ix_1)$, $\mathcal{F}_{x_1}(\partial Q/\partial x_2)=\partial(\mathcal{F}_{x_1}(Q))/\partial x_2$, $\mathcal{F}(Q)=\mathcal{F}_{x_1}(\mathcal{F}_{x_2}(Q))=\mathcal{F}_{x_2}(\mathcal{F}_{x_1}(Q))$.

Exemples. 1) Soit $\delta_{(ax_1+bx_2,cx_1+dx_2)}$ l'opérateur $f(x_1, x_2)\to f(ax_1+bx_2, cx_1+dx_2)$, que l'on notera aussi $\delta_{\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)}$

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{x_1}(\delta_{\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)})((y_1, y_2)\to f(y_1)g(y_2))(x_1, x_2)\\&\quad=e^{-ibx_1x_2}\sum_{l\in N}(-i)^l(c^l/l!)f^{(l)}((1-a)x_1)g^{(l)}(dx_2)\end{aligned}$$

en particulier $\mathcal{F}_{x_1}(\delta_{(0,0)})=\delta_{(x_1,0)}=\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(\delta_{(0,0)})$

$$\mathcal{F}_{x_1}(\delta_{(0,x_2)})=1=\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(\delta_{(0,x_2)})$$

2) $\mathcal{F}_{x_1}(\partial^n/\partial x_1^n)=(-ix_1)^n\delta_{(0,x_2)}$

3) $\mathcal{F}_{x_1}(\partial^n/\partial x_2^n)=\delta_{(0,x_2)}\circ\partial^n/\partial x_2^n=\partial^n/\partial x_2^n\circ\delta_{(0,x_2)}$.

2) Produit de convolution partiel de deux opérateurs. Soient $Q=(Q_{k,j})_{(k,j)\in N^2\times N^2}$ et $R=(R_{k,j})_{(k,j)\in N^2\times N^2}$ deux bons opérateurs analytiques.

Définition. On appelle *produit de convolution partiel* par rapport à x_1 de Q et R, et on note $Q\underset{x_1}{\overline{*}}R$, le bon opérateur analytique associé à la matrice infinie dont le terme général est:

$$(Q\underset{x_1}{\overline{*}}R)_{(k_1,k_2),(j_1,j_2)}=\sum_{\substack{h_1\in N,\, l_2\in N\\ \sup(-j_1,-h_1)\leqslant l_1\leqslant 0\\ \sup(-k_1,-h_1)\leqslant L_1\leqslant 0}}(-1)^{h_1+l_1+L_1}C_{j_1}^{-l_1}C_{h_1+l_1}^{-L_1}Q_{(k_1+L_1,k_2),(h_1+L_1,l_2)}R_{(h_1+l_1,l_2),(j_1+l_1,j_2)}$$

(notation: $C_m^p=m!/p!(m-p)!$).

Le produit de convolution partiel en x_1 de Q et R est donc "en x_1" le produit de convolution $R*Q$ et "en x_2" le produit $Q\circ R$. $\mathcal{F}_{x_1}$ le transforme en un produit que l'on va définir, noté $Q\underset{x_1}{\circ}R$, qui est "en x_1" le produit $Q\circ R$ et "en x_2" le produit $R\circ Q$.

Définition. Le *produit* $Q\underset{x_1}{\circ}R$ *de deux bons opérateurs analytiques* Q et R est le bon opérateur analytique associé à la matrice infinie dont le terme général est:

$$(Q\underset{x_1}{\circ}R)_{(k_1,k_2),(j_1,j_2)}=\sum_{(l_1,l_2)\in N^2}Q_{(k_1,l_2),(l_1,j_2)}R_{(l_1,k_2),(j_1,l_2)}.$$

Quelques propriétés:

$\mathcal{F}_{x_1}(Q\underset{x_1}{\overline{*}}R)=\mathcal{F}_{x_1}(R)\underset{x_1}{\circ}\mathcal{F}_{x_1}(Q)$, $\quad\mathcal{F}_{x_1}(Q\underset{x_1}{\circ}R)=\mathcal{F}_{x_1}(R)\underset{x_1}{\overline{*}}\mathcal{F}_{x_1}(Q)$,

$Q\underset{x_1}{\circ}R=R\underset{x_2}{\circ}Q$, $\quad\partial(Q\underset{x_1}{\overline{*}}R)/\partial x_1=\partial Q/\partial x_1\underset{x_1}{\overline{*}}R=Q\underset{x_1}{\overline{*}}\partial R/\partial x_1+((\partial/\partial x_1)\circ Q)\underset{x_1}{\overline{*}}R$

$\partial(Q\underset{x_1}{\overline{*}}R)/\partial x_2=(\partial Q/\partial x_2)\underset{x_1}{\overline{*}}R+Q\underset{x_1}{\overline{*}}\partial R/\partial x_2$.

Des exemples: $(\partial/\partial x_1)\underset{x_1}{\circ}Q=(\partial/\partial x_1)\circ Q$, $(\partial/\partial x_2)\underset{x_1}{\circ}Q=Q\circ\partial/\partial x_2$, si f est une fonction de x_1, $f(x_1)\underset{x_1}{\circ}Q=f(x_1)\circ Q$, si g est une fonction de x_2, $g(x_2)\underset{x_1}{\circ}Q=Q\circ g(x)_2$, $1\underset{x_1}{\overline{*}}Q=Q*\delta_{(x_1,0)}$, $\delta_{(0,x_2)}\underset{x_1}{\overline{*}}Q=Q\underset{x_1}{\overline{*}}\delta_{(0,x_2)}=Q$.

Le produit de convolution partiel peut être défini aussi par la formule:

$$(Q\underset{x_1}{\overline{*}}R)((y_1,y_2)\to f(y_1)g(y_2))(x_1,x_2)$$
$$=Q((u_1,u_2)\to R((v_1,v_2)\to f(u_1+v_1)g(v_2))(x_1-u_1,u_2))(x_1,x_2)$$

3) Forme des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants en fonction des conditions initiales. Soit l'équation (e):

$$\sum_{\substack{0\leq n_1\leq k_1\\ 0\leq n_2\leq k_2}}a_{n_1n_2}\partial^{n_1+n_2}Y/\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}=0,$$

où $a_{n_1n_2}$ est dans C, $a_{k_1k_2}$ non nul et Y un bon opérateur inconnu. Supposons $k_1\geq 1$. On appelle conditions initiales de Y relatives à x_1 la donnée de k_1 bons opérateurs $Q_0,\cdots,Q_{k_1-1}$, constants par rapport à x_1 (c'est à dire vérifiant $\partial Q_i/\partial x_1=0$) tels que

$$\begin{cases}1\underset{x_1}{\overline{*}}\partial^iY/\partial x^i=Q_i\\ 0\leq i\leq k_1-1.\end{cases}$$

Théorème. *Il existe un bon opérateur E, solution de l'équation*

$$\sum_{\substack{0\leq n_1\leq k_1\\ 0\leq n_2\leq k_2}} a_{n_1n_2}\partial^{n_1+n_2}E/\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}=\delta_{(0,0)}.$$

tel que la solution Y de l'équation (e), *de conditions initials* $(Q_i)_{0\leq i\leq k_1-1}$, *s'écrive:*

$$Y=\sum_{0\leq i\leq k_1-1}((\partial/\partial x_1)\circ\partial^i E/\partial x_1^i)\underset{x_2}{\barwedge}\Lambda_i$$

où $\Lambda_0,\cdots,\Lambda_{k_1-1}$ sont de bons opérateurs par rapport à x_1, s'exprimant en fonction des conditions initiales $(Q_i)_{0\leq i\leq k_1-1}$ et des coefficients du polynôme en X

$$\sum_{0\leq n_1\leq k_1}\Big(\sum_{0\leq n_2\leq k_2} a_{n_1n_2}(ix_2)^{n_2}\Big)X^{n_1}.$$

Indication de démonstration. Désignons par P la fonction polynôme

$$\sum_{\substack{0\leq n_1\leq k_1\\ 0\leq n_2\leq k_2}} a_{n_1n_2}i^{n_1+n_2}x_1^{n_1}x_2^{n_2}$$

et le bon opérateur qui lui est associé. Il existe une infinité de bons opérateurs inverses à gauche de P, c'est à dire des opérateurs Q tels que $Q\circ P=1$. Parmi ceux-ci, il faut éviter essentiellement ceux qui sont en "x_1" des fonctions analytiques de x_1. On en choisit un dans ceux qui restent, qu'on désignera abusivement par $1/P$, et on pose $E=\overline{\mathscr{F}}(1/P)$.

E est donc une solution de

$$\sum_{\substack{0\leq n_1\leq k_1\\ 0\leq n_2\leq k_2}} a_{n_1n_2}\partial^{n_1+n_2}E/\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}=\delta_{(0,0)}.$$

Les solutions fondamentales distributions sont exclues des valeurs possibles pour E par le choix de $1/P$. Cherchons Y sous la forme

$$Y=\sum_{0\leq i\leq k_1-1}((\partial/\partial x_1)\circ\partial^i E/\partial x^i)\underset{x_2}{\barwedge}\Lambda_i.$$

Les conditions initiales deviennent un système aux inconnues Λ_i:

$$\text{(S)}\qquad\begin{cases}1\underset{x_1}{\barwedge}\Big(\sum_{0\leq i\leq k_1-1}((\partial/\partial x_1)\circ\partial^{i+j}E/\partial x_1^{i+j})\underset{x_2}{\barwedge}\Lambda_i\Big)=Q_j\\ 0\leq j\leq k_1-1\end{cases}$$

qui s'écrit encore, sous forme matricielle, $1\underset{x_1}{\barwedge}(\mathcal{E}\underset{x_2}{\barwedge}\Lambda)=Q$, où Λ est le vecteur colonne ${}^t(\Lambda_0,\cdots,\Lambda_{k_1-1})$, Q le vecteur colonne ${}^t(Q_0,\cdots,Q_{k_1-1})\cdot\mathcal{E}$ la matrice carrée symétrique d'ordre k_1 dont l'élément à la $h^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $(\partial/\partial x_1)\circ\partial^{h+j-2}E/\partial x_1^{h+j-2}$ et la matrice identité d'ordre k_1.

La constance de Λ par rapport à x_1 entraîne $1\underset{x_1}{\barwedge}(\mathcal{E}\underset{x_2}{\barwedge}\Lambda)=(1\underset{x_1}{\barwedge}\mathcal{E})\underset{x_2}{\barwedge}\Lambda$, la matrice $1\underset{x_1}{\barwedge}\mathcal{E}$ valant

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \overline{\mathscr{F}}_{x_2}(a_0/b_{k_1})\\
\cdot & & & & \overline{\mathscr{F}}_{x_2}(a_1/b_{k_1})\\
\cdot & & & & \vdots\\
\cdot & & & & \overline{\mathscr{F}}_{x_2}(a_p/b_{k_1})\\
0 & & & & \\
\overline{\mathscr{F}}_{x_2}(a_0/b_{k_1}) & \overline{\mathscr{F}}_{x_2}(a_1/b_{k_1}) & \cdots & \overline{\mathscr{F}}_{x_2}(a_{k_1-2}/b_{k_1}) & \overline{\mathscr{F}}_{x_2}(a_{k_1-1}/b_{k_1})
\end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=-b_{k_1-1}/b_{k_1} \\ \vdots \\ a_p=-\sum_{1\le j\le p}(b_{k_1-j}/b_{k_1})a_{p-j} \qquad 0\le p\le k_1-1 \end{cases}$$

$$b_1(x_2)=\sum_{0\le n_2\le k_2} a_{1,n_2}(ix_2)^n 2 \qquad 0\le 1\le k_1$$

on peut alors résoudre de proche en proche le système aux inconnues Λ_i après avoir composé à gauche par $\overline{\mathcal{F}}_{x_2}(b_{k_1})$.

Remarque. Si les conditions initiales Q_i vérifient

$$(\partial/\partial x_2)\circ Q_i=0 \qquad (0\le i\le k_1-1),$$

la solution Y admet aussi la décomposition

$$Y=\sum_{0\le i\le k_1-1}\Lambda_i \,\overline{\otimes}\, ((\partial/\partial x_1)\circ\partial^i E/\partial x_1^i)$$

où $\Lambda_0, \Lambda_1, \cdots, \Lambda_{k_1-1}$ sont des bons opérateurs constants par rapport à x_1 vérifiant $(\partial/\partial x_2)\circ\Lambda_i=0$ $(0\le i\le k_1-1)$. (à suivre)

Référence

[1] H. Charrière: Proc. Japan Acad., 62A, 278–281 (1986).