43. *Sur la notion de fonction multiplicative et quelques problèmes qui lui sont associés.* II

Par Jean Loup MAUCLAIRE
The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 12, 1987)

0. Cette note fait suite à une note de même titre (voir [5]), où un certain nombre de résultats étaient donnés, sans démonstration cependant. Depuis lors, les démonstrations des résultats sus-mentionnés, ainsi que celles des résultats énoncés dans un certain nombres de notes, antérieures, ont été publiées en un travail d'ensemble (voir [6]).

1. **Position du problème.**

a) Soit $\mathcal{N}$ un ensemble de nombres de Beurling, i.e.: un semi-groupe normé par $N(\cdot)$, d'élément générique n, engendré par un ensemble P de nombres premiers p. On suppose que $Z(s)$, la fonction Zêta de $\mathcal{N}$ définie par

$$Z(s)=\sum_{n\in\mathcal{N}}\frac{1}{N(n)^s},$$

ait une abscisse de convergence égale à 1. Dans un tel semi-groupe, les notions de divisibilité sont définies immédiatement, et on utilisera par conséquent les notations en usage dans le cas des entiers strictement positifs.

b) Suite équi-sommable. Si $d\in\mathcal{N}$, on note I_d l'application $\mathcal{N}\to\{0,1\}$ définie par:

$$I_d(n)=1 \text{ si } d \text{ divise } n, \text{ ce que l'on notera } d\,|\,n,$$
$$=0 \text{ sinon.}$$

Soit Γ l'ensemble des combinaisons linéaire finies, à coefficients réels, d'éléments de la forme I_d, i.e.:

$\gamma\in\Gamma$ si et seulement si γ s'écrit

$$\gamma(n)=\sum_d a_d I_d(n), \quad |N(d)|<+\infty, \quad a_d\in\boldsymbol{R}.$$

Définition. Une application a: $\mathcal{N}\to\boldsymbol{C}$ est équi-sommable si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que si $\gamma\in\Gamma$ et γ vérifie

$$\lim_{\sigma\to 1} Z(\sigma)^{-1}\sum_{n\in\mathcal{N}}\frac{|\gamma(n)|}{N(n)^\sigma}<\eta, \quad \text{on ait } \limsup_{\sigma\to 1} Z(\sigma)^{-1}\sum_{n\in\mathcal{N}}\frac{|\gamma(n)||a(n)|}{N(n)^\sigma}<\varepsilon.$$

c) Dans le cas des entiers strictement positifs, M. K. H. Indlekofer a donné la définition suivante:

Définition. Une application $b: \boldsymbol{N}^*\to\boldsymbol{C}$ est uniformément sommable si

$$\lim_{K\to+\infty}\sup_{x\geq 1}\frac{1}{x}\sum_{\substack{|b(n)|>K\\ n\leq x}}|b(n)|=0.$$

M. K. H. Indlekofer a utilisé cette notion pour étendre des résultats dans à P. D. T. A. Elliott, H. Daboussi (voir [3], [2], [1]) portant sur la théorie des fonctions multiplicatives. La méthode de l'auteur précité repose essentiellement sur un résultat de P. Erdös relatif à la notion de fonction additive "finitely distributed" (voir [4]), pour la démonstration duquel une bonne connaissance de la fonction de dénombrement des entiers semble être fondamentale, ce qui amène à douter d'une extension immédiate à des emsembles généraux d'entiers généralisés de Beurling. Le but de cette note est de montrer que le fait d'être uniformément sommable, pour une fonction multiplicative, est parfois une condition suffisante pour qu'elle soit équi-sommable, propriété qui se traduit immédiatement en termes de théorie de la mesure, à partir de quoi on retombe sur les méthodes développés par l'auteur présent dans [6].

2. Enoncé des résultats. $\mathcal{N}$ est un ensemble d'entiers généralisés de Beurling dont la fonction Zêta a une abscisse de convergence égale à 1.

Théorème 1. *Soit f: $\mathcal{N}\to \boldsymbol{C}$ une fonction multiplicative sur $\mathcal{N}$,* i.e.: *$f(n_1\cdot n_2)=f(n_1)\cdot f(n_2)$ si $(n_1, n_2)=1$.*

$$Si \lim_{K\to+\infty} \limsup_{\sigma\to 1+} Z(\sigma)^{-1} \sum_{|f(n)|>K} \frac{|f(n)|}{N(n)^\sigma}=0$$

$$et\ si \limsup_{\sigma\to 1+} Z(\sigma)^{-1} \sum \frac{|f(n)|}{N(n)^\sigma}>0,$$

alors f est équi-sommable.

Théorème 2. *On suppose que $\mathcal{N}$ vérifie l'hypothèse $\mathcal{H}(\mathcal{N})$ suivante:*

$\mathcal{H}(\mathcal{N})$: $\sup_{x>0} \sum_{e^x\le N(p)\le e^{cx}} \frac{1}{N(p)}<+\infty$ *pour tout c, et que f vérifie les hypothèses du Théorème* 1 *ainsi que*

$$\lim_{s\to 1} Z(s)^{-1} \sum_n \frac{f(n)}{N(n)^s} \text{ existe et est non-nulle.}$$

Alors, les quatre séries

$$\sum_p \frac{1-f(p)}{N(p)},\quad \sum_{|f(p)|<2} \frac{|1-f(p)|^2}{N(p)},\quad \sum_{|f(p)|>2} \frac{|f(p)|}{N(p)},\quad \sum_p \sum_{k\ge 2} \frac{|f(p^k)|}{N(p^k)}$$

sont convergentes, et pour tout p, l'expression $\sum_{k\ge 0} \frac{f(p^k)}{N(p)^k}$ *est non-nulle.*

La réciproque vaut

Remarque 1. Il semble que même dans le cas des entiers ordinaires, ce résultat est nouveau.

Théorème 3. *Soit $\mathcal{N}$ vérifiant*

$$\sum_{N(p)\le x} \log N(p)<cx,$$

$$\sum_{N(n)\le x} =Lx+o(x),\quad L>0,\quad x\to+\infty.$$

Soit f: $\mathcal{N}\to \boldsymbol{C}$ une fonction multiplicative sur $\mathcal{N}$. Alors, l'ensemble de conditions:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{N(n)\le x} f(n) \text{ existe et est non-nulle,}$$

et

$$\lim_{K\to+\infty} \limsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{N(n)\le x \\ |f(n)|>K}} |f(n)| = 0$$

équivaut à l'ensemble de conditions : Les quatre séries

$$\sum_p \frac{1-f(p)}{N(p)}, \quad \sum_{|f(p)|<2} \frac{|1-f(p)|^2}{N(p)}, \quad \sum_{|f(p)|>2} \frac{|f(p)|}{N(p)}, \quad \sum_p \sum_{k\ge 2} \frac{|f(p^k)|}{N(p^k)}$$

sont convergentes, et pour tout p, l'expression $\sum_{k\ge 0} \frac{f(p^k)}{N(p^k)}$ *est non-nulle.*

3. Démonstration des théorèmes. On va donner la démonstration du Théorème 1, esquisser celle du Théorème 3, et fournir les indications nécessaires pour établir le Théorème 2.

a) On démontre le Théorème 1.

i) Pour $0<\alpha<1$, α proche de 1, on a :

$$\limsup_{\sigma\to 1} Z(\sigma)^{-1} \sum_n \frac{|f(n)|^\alpha}{N(n)^\sigma} > 0\,;$$

en effet, on a :

$$\begin{aligned}
Z(\sigma)^{-1} &\sum_n \frac{||f(n)|-|f(n)|^\alpha|}{N(n)^\sigma} \\
&= Z(\sigma)^{-1} \sum_{|f(n)|>K} \frac{||f(n)|-|f(n)|^\alpha|}{N(n)^\sigma} + Z(\sigma)^{-1} \sum_{1/K\le|f(n)|\le K} \frac{||f(n)|-|f(n)|^\alpha|}{N(n)^\sigma} \\
&\quad + Z(\sigma)^{-1} \sum_{|f(n)|<1/K} \frac{||f(n)|-|f(n)|^\alpha|}{N(n)^\sigma} \\
&\le Z(\sigma)^{-1} \sum_{|f(n)|>K} \frac{|f(n)|}{N(n)^\sigma} + Z(\sigma)^{-1} \sum_{1/K\le|f(n)|\le K} \frac{1}{N(n)^\sigma} K(1-\alpha)\log K \\
&\quad + Z(\sigma)^{-1} \sum_{|f(n)|<1/K} \frac{1}{K^\alpha}\cdot\frac{1}{N(n)^\sigma} \\
&\le Z(\sigma)^{-1} \sum_{|f(n)|>K} \frac{|f(n)|}{N(n)^\sigma} + Z(\sigma)^{-1}(Z(\sigma)\cdot K(1-\alpha)\log K) + Z(\sigma)^{-1}\left(\frac{1}{K^\alpha}\cdot Z(\sigma)\right) \\
&\le Z(\sigma)^{-1} \sum_{|f(n)|>K} \frac{|f(n)|}{N(n)^\sigma} + K(1-\alpha)\log K + \frac{1}{K^\alpha}.
\end{aligned}$$

En prenant K assez grand, puis α assez près de 1, cette quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut, par conséquent, comme

$$\limsup_{\sigma\to 1+} Z(\sigma)^{-1} \sum_n \frac{|f(n)|}{N(n)^\sigma} > 0,$$

on peut trouver un α, $0<\alpha<1$, tel que :

$$\limsup_{\sigma\to 1+} Z(\sigma)^{-1} \sum_n \frac{|f(n)|^\alpha}{N(n)^\sigma} > 0.$$

ii) On reprend les notations de [6], et on pose

$$\pi_p(u) = \left(1-\frac{1}{N(p)}\right) \sum_{k\ge 0} \frac{|f(p^k)|^u}{N(p^k)}, \qquad 0<u\le 1.$$

$$E_p = \prod_p ([1, p, p^2, \cdots, \cup(\infty_p)]).$$

$E=\prod_p E_p$ est $d\mu$-mesuré pour la mesure

$$d\mu=\bigotimes_p d\mu_p \quad \text{où} \quad \mu_p\{p^\alpha\}=\left(1-\frac{1}{N(p)}\right)\frac{1}{N(p)^\alpha}.$$

La méthode exposée dans [6], ch. II, §3, nous donne que, pour tout g de $C(E, \boldsymbol{R})$, g positif, l'expression $\langle |f|^\alpha, g\rangle$ définie par

$$\limsup_{\sigma\to 1} Z(\sigma)^{-1}\sum \frac{|f(n)|^\alpha}{N(n)^\sigma} g(n)$$

est une forme linéaire continue sur $C(E, \boldsymbol{R})$ qui se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^{1/\alpha}(E, d\mu)$, i.e. :

$$\langle |f|^\alpha, g\rangle=\int_E F_\alpha\cdot g d\mu, \quad \text{où} \quad F_\alpha\in\mathcal{L}^{1/\alpha}(E, d\mu).$$

De plus, $d\mu$-presque-partout et dans $\mathcal{L}^{1/\alpha}(E, d\mu)$, on a

$$F_\alpha(t)=\lim_{y\to+\infty} F_{\alpha,y\_}(t), \quad \text{où} \quad F_{\alpha,y\_}(t)=\prod_{N(p)\leq y}\frac{|f_p(t)|^\alpha}{\pi_p(\alpha)},$$

avec $|f_p(t)|^\alpha=|f(p^{v_p(t)})|^\alpha$. Comme $\langle |f|^\alpha, 1\rangle>0$, on a :

$$0\neq\lim_{y\to+\infty}\int_E F^{1/\alpha}_{\alpha,y\_}(t)\, d\mu(t)=\lim_{y\to+\infty}\prod_{N(p)\leq y}\frac{\pi_p(1)}{\pi_p(\alpha)^{1/\alpha}}$$

et de même

$$0\neq\lim_{y\to+\infty}\int_E (F^{1/\alpha}_{\alpha,y\_})^{1/2} d\mu=\lim_{y\to+\infty}\prod_{N(p)<y}\frac{\pi_p(1/2)}{\pi_p(\alpha)^{1/2\alpha}}$$

le quotient de la deuxième expression par la racine carrée de la première donne :

$\lim_{y\to+\infty}\prod_{N(p)\leq y}\frac{\pi_p(1/2)}{(\pi_p(1))^{1/2}}$ existe et est non-nulle, ce qui implique, par un théorème classique de Kakutani, que $\lim_{y\to+\infty}\prod_{N(p)\leq y}\frac{|f_p(t)|}{\pi_p(1)}$ existe dans $\mathcal{L}(E, d\mu)$, et l'on notera F cette limite.

iii) On remarque alors que, si $g\in\Gamma$, on a :

$$\lim_{\alpha\to 1}\langle |f|^\alpha, |g|\rangle=\int F\cdot|g|\, d\mu=\limsup Z(\sigma)^{-1}\sum_n\frac{|f(n)|\cdot|g(n)|}{N(n)^\sigma},$$

comme le montre le calcul effectué en i), et comme le calcul direct donne $\int_E |g|\, d\mu=\lim_{\sigma\to 1} Z(\sigma)^{-1}\sum_n\frac{|g(n)|}{N(n)^\sigma}$, on en déduit immédiatement l'équi-sommabilité de f.

b) Moyennant le Théorème 1 et [6], p. 114, Théorème, la seule chose à montrer, c'est que la convergence des quatre séries implique que

$$\lim_{K\to+\infty}\limsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{N(n)\leq x\\ |f(n)|>K}}|f(n)|=0.$$

Or, à $|f|$ est associée F, un élément de $\mathcal{L}^1(E, d\mu)$. On voit facilement que, si u est point de continuité, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{N(n)\leq x\\ |f(n)|>u}}|f(n)|=\int_{F(t)>u} F d\mu=o(1), \qquad u\to+\infty.$$

(Pour ces associations, voir [6], (Th. 2. e, p. 16, et Th. 1, p. 77.) L'argument précédent est un exemple typique d'application de la théorie qui s'y trouve développée.)

c) Le Théorème 2 se déduit du Théorème 1, et de [6] (p. 77, Th. 1) et par un argument analogue à celui exposé ci-dessus, on montre que

$$\limsup_{\sigma \to 1} Z(\sigma)^{-1} \sum_{|f(n)|>K} \frac{|f(n)|}{N(n)^{\sigma}} = o(1), \qquad k \to +\infty.$$

Références

[1] H. Daboussi: Sur les fonctions multiplicatives ayant une valeur moyenne non-nulle. Bull. Soc. Math. France, **109**, 183–206 (1981).

[2] P. D. T. A. Elliott: A mean-value theorem for multiplicative functions. Proc. London Math. Soc., 3, **31**, 418–438 (1975).

[3] K. H. Indlekofer: A mean-value theorem for multiplicative functions. Math. Z., **172**, 418–438 (1980).

[4] P. Erdös: On the distribution function of additive functions. Ann. of Math., **47**, no. 1, 1–20 (1946).

[5] J.-L. Mauclaire: Sur la notion de fonction multiplicative et quelques problèmes qui lui sont associés. Proc. Japan Acad., **61**A, 228–231 (1985).

[6] ——: Intégration et théorie des nombres. Travaux en cours, Hermann, Paris (1986).