100. *Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules).* I

Par Marc KRASNER*) et Mirjana VUKOVIĆ**)

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Nov. 12, 1986)

Les différentes structures graduées (groupes, anneaux, modules) forment les catégories qui ne sont pas fermés par rapport aux compositions directes ou cartésiennes telles que le support de la partie homogène de ces composés soit le produit cartésien restreint resp. cartésien de ceux des composantes. Pourtant, de telles compositions peuvent être définies, mais elles conduisent aux structures plus générales que les structures graduées, qui s'appellent *structures multigraduées*. D'autres part, les homomorphismes quasi-homogènes des structures graduées (et les quasi-homomorphismes de leurs parties homogènes) conduisent à un autre type de structures : groupes, anneaux et modules *quasi-graduées* et leurs correspondants homogènes *groupels*, *anels* et *monels*. Enfin, les Hom et les End des homogroupoïdes abéliens et des moduloïdes constituent une troisième généralisation naturelle des structures graduées.

L'idée vient qu'il existe peut-être des structures généralisant les structures graduées et englobant, comme cas particuliers, toutes les structures qu'on vient de mentionner, et qui soient, en plus, telles que, dans chacun des trois cas (groupes, anneaux, modules), leur catégorie soit fermée par rapport à leur composés direct et cartésien tel que le support de la partie homogène de ces composés soit le produit cartésien restreint resp. cartésien de ceux des composantes. Cette idée est exacte, et, en plus, ce point de vue est très éclairant pour les structures graduées elles-mêmes. On va appeler ces structures les *structures paragraduées* (du moins quand il s'agit des points de vue non-homogène et semi-homogène, car, du point de vue homogène, on est amené à considérer les structures quelque peu plus générales). Nous nous bornons à en donner les définitions, accompagnées de quelques remarques indispensables.

Groupes paragraduées.

1. Point de vue non-homogène. Soient G un groupe (écrit multiplicativement), $(\varDelta, <)$ un ensemble ordonné, qui soit un demi-treillis complet inférieur et supérieurement inductif.

Une application $\pi : \varDelta \to Sg(G)$, qui fait correspondre à chaque $\delta \in \varDelta$ un sous-groupe $G_\delta \in Sg(G)$ de G, est dite une *paragraduation* de G avec l'ensemble des grades (ordonné) $(\varDelta, <)$ si elle satisfait aux axiomes (I)–(VI)

---

*) Professeur émerite de l'Université de Paris VI. Décédé le 13 mai 1985 à l'âge de 73 ans.

**) Prirodno-matematički fakultet (Odsjek za matematiku) Vojvode Putnika 43/IV, 71000 Sarajevo, Jougoslavie.

suivants :

(I) $\pi.0=G_0=\{1\}$, et $\delta<\delta'$ $(\delta, \delta' \in \Delta)$ implique $G_\delta \subseteq G_{\delta'}$;

Remarques. 1) $H=\bigcup_{\delta\in\Delta} G_\delta$ sera appelé la *partie homogène* de G pour π, et les $x \in H$ seront dits les *éléments homogène* de G;

2) Si $x \in H$, $\delta(x)=\text{Inf}\,\{\delta \in \Delta\,;\, x \in G_\delta\}$ s'appelle le *grade* de x. On a $\delta(x)=0$ ssi $x=1$. Les $\delta(x)$, $x \in H$ sont dits les *grades principaux*, et leur ensemble est noté Δ_p. L'application $\delta : x \to \delta(x)$ est une surjection de H sur Δ_p ;

3) La paragraduation $\pi : \Delta \to Sg(G)$ est dite *propre* si elle est injective ;

4) On va noter Δ^* l'ensemble des $\delta \in \Delta$ non-nuls.

(II) Si $\bar{\Delta} \subseteq \Delta$, on a $\bigcap_{\delta\in\bar{\Delta}} G_\delta = G_{\text{Inf}\,\bar{\Delta}}$.

Remarque. 1) Si $x \in H$, on a $x \in \bigcap \{G_\delta\,;\, x \in G_\delta\}$, donc $\delta(x)=\text{Min}\,\{\delta \in \Delta, x \in G_\delta\}$.

(III) Tout G_δ, $\delta \in \Delta$, est invariant dans G.

Remarque. 1) Donc le commutateur $(y, x)=yxy^{-1}x^{-1}$ qu'on notera $z(x, y)$ appartient à $G_{\delta(x)} \cap G_{\delta(y)} = G_{\text{Inf}\,(\delta(x),\delta(y))}$. Ainsi, $z(x, y) \in H$, $\delta(z(x, y)) \leqslant \text{Inf}\,(\delta(x), \delta(y))$ et $yx=z(x, y)xy$.

(IV) H engendre G.

(V) Si $A \subseteq H$ est tel que, pour tous $x, y \in A$, on ait $xy \in H$, il existe un $\delta \in \Delta$ tel que $A \subseteq G_\delta$.

Remarques. 1) Si $x, y \in H$, $xy \in H$ équivaut à l'existence d'une majorante commune de $\delta(x), \delta(y)$;

2) Si π satisfait aux axiomes (I)–(V), il est dit une *postparagraduation* de G, et G muni de π est dit un *groupe postparagradué*. Parmi les relations, qui lient les éléments de H, en tant que générateur de G, il y a en tout cas, les relations $xy=z$ pour tous les $x, y, z \in H$, qui satisfont à cette égalité dans G (relations H-internes) et les relations $yx=z(x, y)xy$ pour tous $x, y \in H$ (relations de commutation gauche). On notera R l'ensemble de toutes ces relations.

(VI) G est engendré par H avec l'ensemble des relations R.

Remarque. 1) Tout groupe postpargradué G est une image H-homomorphe, où H est la partie homogène de G, d'un groupe paragradué contenant H (autrement dit l'image de ce groupe par un homomorphisme, dont la restriction H est l'identité).

Si π satisfait aux axiomes (I)–(V) et à l'axiome (VI′), il s'appelle une *extragraduation* de G, et G muni de π est dit un *groupe extragradué*.

(VI′) Soient $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n \in \Delta_p$, incomparables deux à deux, et soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n \in H$ tels que, pour tout $i=1, 2, \cdots, n$, on ait $\delta(x_i) \leq \delta_i$ et $\delta(x'_i) \leq \delta_i$. Alors, si $x_1 x_2 \cdots x_n = x'_1 x'_2 \cdots x'_n$, on a, pour tout $i=1, 2, \cdots, n$, $\delta(x_i^{-1} x'_i) < \delta_i$.

Remarque. 1) On prouve qu'une extragraduation est toujours une paragraduation. Vraisemblablement, l'inverse n'a pas lieu.

Deux paragraduation $\pi : \Delta \to Sg(G)$ et $\pi' : \Delta' \to Sg(G)$ de G sont dites *équivalentes* si leurs parties homogènes respectives H, H' coïncident. Il résulte de l'axiome (V) que ceci a lieu ssi pour tout $\delta \in \Delta$ existe un $\delta' \in \Delta'$ tel que $G_\delta \subseteq G_{\delta'}$ et vice versa.

2. Point de vue semi-homogène. Si H est un sous-ensemble de G et si $x \in H$, soit $H(x)=\{y \in H\,;\, xy \in H\}$. Alors, H est la partie homogène de G pour quelque paragraduation π de G ssi H satisfait aux trois axiomes suivants :

1°) Si $x \in H$, $g(x)=\{y \in H\,;\, H(y) \supseteq H(x)\}$ est un sous-groupe invariant de G.

Remarques. 1) Donc $z=z(x,y)=yxy^{-1}x^{-1} \in g(x) \cap g(y)$, d'où resulte que $z \in H$ et $H(z) \supseteq H(x) \cup H(y)$;

2) Un groupe $g \subseteq H$ est dit *fortement saturé* si $x \in g$ implique $g(x) \subseteq g$.

2°) Si $A \subseteq H$ est tel que, pour tous $x, y \in A$, on ait $xy \in H$, il existe un sous-groupe $g \subseteq H$ de G fortement saturé tel que $A \subseteq g$.

3°) (a) H engendre G et

(b) il l'engendre avec le système de relations R.

Le couple $(G, H \subseteq G)$, où H satisfait aux axiomes 1°)–3°), définit, donc, la paragraduation de G à l'équivalence et est appelé le *groupe paragradué* du point de vue semi-homogène. Il permet, d'ailleurs, de construire, d'une manière canonique, une certaine paragraduation appartenant à cette classe d'équivalence. Le groupe paragradué (G, H) est extragradué, ssi, au lieu de la partie 3°) (b) de l'axiome 3°), il satisfait à l'axiome

4°) Soient $u_1, u_2, \cdots, u_n \in H$, tels que tous les $H(u_i)$ soient incomparables deux à deux (par rapport à $\subset$), et $x_1, \cdots, x_n, x'_1, \cdots, x'_n \in H$, tels que, pour tout $i=1,2,\cdots,n$, on ait $H(x_i) \cap H(x'_i) \supseteq H(u_i)$. Alors, $x_1x_2\cdots x_n = x'_1x'_2\cdots x'_n$ implique pour tout $i=1,2,\cdots,n$, $H(x_i^{-1}x'_i) \supset H(u_i)$ (on a bien $x_i^{-1}x'_i \in H$, car $x_i, x'_i \in g(u_i)$).

Références

[1] M. Chadeyras: Essai d'une théorie noetherienne homogène pour les anneaux commutatifs dont la graduation est aussi générale que possible. Supll. Bull. Soc. Math. France, Memoire, **22**, 1–143 (1970).

[2] M. Krasner: Une généralisation de la notion de corps-corpoïde. Un corpoïde remarquable de la théorie des corps valué. Comptes Rendus, **219**, 345–347 (1944).

[3] ——: Congruences multiplicatives. Squelettes et corpoïdes. Séminaire Krasner, exp. 4, 1953–1954., vol. 1, Sécr. Math. Fac. Sc. Paris, pp. 39.

[4] ——: Anneaux gradués généraux. Colloque d'algèbre, Rennes, 209–308 (1980).

[5] ——: Le vieux qui est neuf. Revue Roumain de Mathématiques pures et appliquées t. XXVII, 443–472 (1982).