97. *Une justification mathématique pour l'équation de Korteweg-de Vries approchant des ondes longues de surface de l'eau*

Par Tadayoshi KANO*) et Takaaki NISHIDA**)

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Dec. 12, 1985)

1. Introduction. Dans cette Note, on étudie des ondes longues de surface de l'eau s'écoulant d'une vitesse constante. Leur ampleur est petite comparée à la profondeur de l'eau mais finie, c'est-à-dire qu'elle n'est pas infinitesimale. Certaines de ces ondes sont approchées par les solutions de l'équation de Korteweg-de Vries, d'où une justification mathématique pour cette équation.

2. Le problème de Cauchy non-dimensionnel pour les ondes de surface de l'eau remplissant la région $\Omega(t)=\{(x, y) : x \in \boldsymbol{R},\ 0<y<\Gamma(t, x)\}$ se ramène à déterminer une représentation conforme $z=z(t, \zeta)=x+i\delta y$ de $\Omega(t)\subset \boldsymbol{C}$ sur $\Omega_1=\{\zeta=\xi+i\delta\eta : \xi \in \boldsymbol{R},\ 0<\eta<1\}$ et l'image $\varphi=\varphi(t, \xi, \eta)$ de potentiel de vitesses $\Phi=\Phi(t, x, y)$ par cette représentation, [1], [2].

Pour les ondes longues (voir le paragraphe 1 de [3]) sur les eaux courantes d'une vitesse κ constante, il s'agit en fait du problème de Cauchy pour les équations suivantes sur $\eta=1$:

$$y^1=\frac{A_\delta}{\delta}x^1, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} x_t^1=\delta^2 w^1 A_\delta x_\xi^1 A_\delta \varphi_\xi^1 - B_\delta(w^1 A_\delta \varphi_\xi^1)-\delta^2 x_\xi^1 B_\delta(w^1 A_\delta\varphi_\xi^1), \\ \varphi_t^1= -\dfrac{A_\delta}{\delta}x^1+\dfrac{\delta^2}{2}w^1((A_\delta\varphi_\xi^1)^2-(\varphi_\xi^1)^2)-\kappa w^1\varphi_\xi^1-\dfrac{\kappa^2}{2\delta^2}w^1 \\ \qquad -(\kappa+\delta^2\varphi_\xi^1)B_\delta(w^1A_\delta\varphi_\xi^1), \end{cases} \tag{2.2}$$

où x^1, y^1 et φ^1 sont définies par

$$x=\xi+\delta^2 x^1,\quad y=\frac{A_\delta}{\delta}x=1+\delta^2 y^1,\quad \varphi=-t+\kappa\xi+\delta^2\varphi^1,$$

et $w^1=[(1+\delta^2 x_\xi^1)^2+\delta^4(A_\delta x_\xi^1)^2]^{-1}$, reprenant les notations de [1], [2] et [3].

3. Le système quasi-linéaire par rapport à $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}$, déduit de (2.2), admet une et une seule solution $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}(t, \xi\,;\,\delta) \in X_\rho \cap L_\rho^\sigma$, pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour les données initiales $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}(0, \xi) \in X_{\rho_0}\cap L_{\rho_0}^\sigma$.

Puisque $\partial/\partial\xi((\kappa^2/2\delta^2)w^1)$ n'a pas de singularité par rapport à δ, notre solution $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}(t, \xi\,;\,\delta)$ est aussi, comme dans [3], indéfiniment différentiable par rapport à $\delta\in[0, 1]$ dans $X_\rho\cap L_\rho^\sigma$, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, et peut être prolongée comme fonction harmonique de $(\xi, \delta\eta)$ pour $(\xi, \eta)\in\Omega_{1+\bar{a}\rho}=\{(\xi, \eta) : \xi\in\boldsymbol{R},\ 0\leqq\eta<1+\bar{a}\rho,\ \bar{a}>0\}$ en tant que telle.

---

*) Département de Mathématiques, Université d'Osaka, Toyonaka 560.
**) Département de Mathématiques, Université de Kyoto, Kyoto 606.

Définissons $\gamma=\gamma(t, x; \delta)$ par

$$(3.1) \qquad \gamma(t, x; \delta)=y^1(t, \xi(t, x; \delta), 1; \delta),$$

$\xi(t, x; \delta)$ étant la fonction implicite définie par $x=x(t, \xi, 1; \delta)$. D'où

$$(3.2) \qquad \Gamma(t, x; \delta)=1+\delta^2\gamma(t, x; \delta).$$

Ensuite, d'après

$$(3.3) \qquad \phi(t, x, y; \delta)=\varphi^1(t, \xi(t, x, y; \delta), \eta(t, x, y; \delta); \delta)$$

définie pour $(\xi, \eta) \in \Omega_{1+\bar{a}\rho}$, on a le potentiel de vitesses

$$(3.4) \qquad \Phi(t, x, y; \delta)=-t+\kappa x+\delta^2\phi(t, x, y; \delta).$$

Alors, comme dans [3], on a la proposition suivante pour γ et le potentiel de vitesses sur la surface :

$$(3.5) \qquad \tilde{\phi}(t, x; \delta)=\phi(t, x, 1+\delta^2\gamma(t, x; \delta); \delta),$$

Proposition 3.1. *La solution* $\{\gamma, \tilde{\phi}\}$ *satisfait à l'équation suivante dans* $X_\rho \cap L^\sigma_\rho$, *pour* $|t|<a_1(\rho_1-\rho)$, *quel que soit* $\rho<\rho_1$ *pour les données initiales* $\{\gamma, \tilde{\phi}_x\}(0, x) \in X_{\rho_1} \cap L^\sigma_{\rho_1}$:

$$(3.6) \qquad \begin{cases} u_t+\kappa u_x+\gamma_x+\delta^2 uu_x=O(\delta^4) \\ \gamma_t+\kappa\gamma_x+u_x+\dfrac{\delta^2}{3}u_{xxx}+\delta^2(\gamma u)_x=O(\delta^4), \end{cases}$$

où $u=\tilde{\phi}_x \in \{X_\rho \cap L^\sigma_\rho\}_{0\leq\rho<\rho_1}$.

4. Soit maintenant $\{\gamma, \tilde{\phi}\}$ une solution pour les données initiales $\{\gamma, \tilde{\phi}_x\}(0, x) \in X_{\rho_1} \cap L^\sigma_{\rho_1}$ satisfaisant à

$$(4.1) \qquad \gamma(0, x)-\tilde{\phi}_x(0, x)=O(\delta^2), \qquad \gamma(0, x)+\tilde{\phi}_x(0, x)=O(1).$$

Une diagonalisation de (3.6) par

$$(4.2) \qquad \gamma-u=\gamma-\tilde{\phi}_x=2g, \qquad \gamma+u=\gamma+\tilde{\phi}_x=2f$$

nous donne deux équations suivantes :

$$(4.3) \qquad f_t+(\kappa+1)f_x+\frac{\delta^2}{6}f_{xxx}+\frac{3}{2}\delta^2 ff_x=O(\delta^4),$$

$$(4.4) \qquad g_t+(\kappa-1)g_x-\frac{\delta^2}{6}g_{xxx}-\frac{3}{2}\delta^2 gg_x=\delta^2\Big(-\frac{1}{6}f_{xxx}-\frac{1}{2}ff_x\Big)+O(\delta^4),$$

dans $X_\rho \cap L^\sigma_\rho$, pour $|t|<a_1(\rho_1-\rho)$, quel que soit $\rho<\rho_1$.

5. Solution de l'équation de Korteweg-de Vries. D'après le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski, le problème de Cauchy pour l'équation de Korteweg-de Vries

$$(5.1) \qquad F_t+(\kappa+1)F_x+\frac{\delta^2}{6}F_{xxx}+\frac{3}{2}\delta^2 FF_x=0$$

admet une et une seule solution dans l'échelle d'espaces de Banach $S=\bigcup_{\rho>0} B_\rho$, c'est-à-dire que pour les données initiales dans B_{ρ_1}, il existe une solution unique $F(t) \in B_\rho$, pour $|t|<a_1(\rho_1-\rho)$, quel que soit $\rho<\rho_1$:

$$(5.2) \qquad B_\rho=\left\{\begin{array}{l} u : \text{holomorphes sur } \Omega_\rho=\{z=x+iy,\ x \in \boldsymbol{R},\ |y|<\rho\} \\ \text{munies de norme } \|u\|_\rho=\|(1+|k|)\exp(\rho|k|)\hat{u}(k)\|_{L^2(\boldsymbol{R})}<\infty \\ \hat{u} \text{ étant la transformée de Fourier de } u \end{array}\right\}.$$

On va comparer f dans (4.3), celles qui appartiennent à B_ρ, avec F ci-dessus ayant toutes les deux les mêmes données initiales dans B_{ρ_1}.

D'après le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski, la dépendance continûe de solution du second membre montre le

Théorème 5.1. *Pour* $\delta<\delta_0$, *on a*

$$\|F(t)-f(t)\|_{B_\rho}=O(\delta^4), \tag{5.3}$$

pour $|t|<a_1(\rho_2-\rho)$, *pour* $\rho<\rho_2$, *quel que soit* $\rho_2<\rho_1$.

Soit maintenant G la solution de l'équation non-homogène de Korteweg-de Vries :

$$G_t+(\kappa-1)G_x-\frac{\delta^2}{6}G_{xxx}-\frac{3}{2}\delta^2 GG_x=\delta^2\Big(-\frac{1}{6}F_{xxx}-\frac{1}{2}FF_x\Big). \tag{5.4}$$

On a alors pour g appartenant à B_ρ, le

Corollaire 5.2. *Pour* $\delta<\delta_0$, *on a*

$$\|G(t)-g(t)\|_{B_\rho}=O(\delta^4), \tag{5.5}$$

pour $|t|<a_1(\rho_2-\rho)$, *pour* $\rho<\rho_2$, *quel que soit* $\rho_2<\rho_1$.

6. Equation de Broer-Peregrine. En employant les valeurs de potentiel de vitesses au bas-fond de l'eau, soit $\phi^0=\phi^0(t, x ; \delta)=\phi(t, x, 0 ; \delta)$, nous avons le système suivant, au lieu de (3.6), par rapport à $\{\gamma, v=\phi^0_x\}(t, x ; \delta)$:

$$\begin{cases} \gamma_t+\kappa\gamma_x+v_x-\dfrac{\delta^2}{6}v_{xxx}+\delta^2(\gamma v)_x=O(\delta^4), \\ v_t+\gamma_x+\kappa v_x-\dfrac{\delta^2}{2}v_{xxx}-\dfrac{\delta^2}{2}v_{xxt}+\delta^2 vv_x=O(\delta^4), \end{cases} \tag{6.1}$$

dans X_ρ pour $|t|<a_1(\rho_1-\rho)$, quel que soit $\rho<\rho_1$.

D'après les mêmes considérations que dans le paragraphe 4, on a de (6.1) les équations suivantes dans X_ρ pour $|t|<a_1(\rho_1-\rho)$:

$$m_t+(\kappa-1)m_x-\frac{3\kappa-1}{12}\delta^2 m_{xxx}-\frac{\delta^2}{4}m_{xxt}-\frac{3}{2}\delta^2 mm_x=O(\delta^4), \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} n_t+(\kappa+1)n_x-\frac{3\kappa+1}{12}\delta^2 n_{xxx}-\frac{\delta^2}{4}n_{xxt}+\frac{3}{2}\delta^2 nn_x \\ =\delta^2\Big(-\frac{3\kappa-1}{12}m_{xxx}-\frac{1}{4}m_{xxt}-mm_x\Big)+O(\delta^4), \end{aligned} \tag{6.3}$$

pour $2m(t)=(\gamma-v)(t)$ et $2n(t)=(\gamma+v)(t)$ avec les données initiales telles que $m(0, x)=O(\delta^2)$ et $n(0, x)=O(1)$ dans X_{ρ_1}.

Les solutions $m(t)$ et $n(t)$ sont approchées respectivement par les solutions $M(t)$ et $N(t)$ de l'équation de Broer-Peregrine suivantes [5], [6] :

$$M_t+(\kappa-1)M_x-\frac{3\kappa-1}{12}\delta^2 M_{xxx}-\frac{\delta^2}{4}M_{xxt}-\frac{3}{2}\delta^2 MM_x=0, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} N_t+(\kappa+1)N_x-\frac{3\kappa+1}{12}\delta^2 N_{xxx}-\frac{\delta^2}{4}N_{xxt}+\frac{3}{2}\delta^2 NN_x \\ =\delta^2\Big(-\frac{3\kappa-1}{12}M_{xxx}-\frac{1}{4}M_{xxt}-MM_x\Big), \end{aligned} \tag{6.5}$$

pour les mêmes données initiales dans X_{ρ_1} :

Théorème 6.1. *Pour* $\delta<\delta_0$, *on a*

$$\|M(t)-m(t)\|_\rho=O(\delta^4), \qquad \|N(t)-n(t)\|_\rho=O(\delta^4) \tag{6.6}$$

pour $|t|<a_1(\rho_2-\rho)$, *pour tout* $\rho<\rho_2$, *quel que soit* $\rho_2<\rho_1$.

L'équation de Broer-Peregrine (6.4) admet une solution particulière du type soliton et a une bonne relation linéaire de dispersion.

Références

[1] T. Kano et T. Nishida: C. R. Acad. Sci. Paris, t. **287**, Sér. A, p. 83 (1978).
[2] ——: Lect. Note Num. Appl. Anal., t. **6**, ed. M. Mimura-T. Nishida, Kinokuniya-North Holland, pp. 39–57 (1984).
[3] ——: Proc. Japan Acad., **61**A, 91–94 (1985).
[4] D. J. Korteweg and G. de Vries: Phil. Magaz., **39**, 422–443 (1895).
[5] L. J. F. Broer: Appl. Sci. Res., Sect. B, **11**, 273–285 (1964).
[6] D. H. Peregrine: Waves on beaches and resulting sediment transport. ed. R. E. Meyer, Acad. Press, pp. 95–121 (1972).