36. Suites limite-périodiques et théorie des nombres. IX

Par J.-L. MAUCLAIRE
Faculty of Education, Waseda University and C.N.R.S.

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 12, 1984)

1. Introduction. Une fonction arithmétique multiplicative est une application $N^* \to C$ vérifiant $f(1)=1$ et $f(mn)=f(m)\cdot f(n)$ si $(m,n)=1$.

On sait que l'existence d'une moyenne arithmétique non-nulle $M(f)=\lim_{x\to+\infty}(1/x)\sum_{n\le x}f(n)$ assortie d'une condition limitant la croissance de $|f(n)|^\alpha$ est équivalente à l'énoncé suivant:

(A): Pour tout $c>0$, les quatre séries suivantes

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p}, \quad \sum_{|f(p)-1|<c} \frac{|f(p)-1|^2}{p}, \quad \sum_{|f(p)-1|<c} \frac{|f(p)|^\alpha}{p},$$

$$\sum_p \sum_{k\ge 2} \frac{|f(p^k)|^\alpha}{p^k}, \quad \alpha\ge 1 \text{ fixé},$$

sont convergentes et pour tout p, l'expression $\pi_p=\sum_{k\ge 0}(f(p^k)/p^k)$ est non-nulle, p décrivant l'ensemble des nombres premiers.

(Pour un exposé général, voir [1], où la plupart des résultats obtenus à ce sujet sont présentés.)

Dans le cas où les conditions (A) son satisfaites, la fonction f est limite-périodique au sens de Besicovich pour l'exposant α. Les seules améliorations possibles pour ce genre d'énoncé ne peuvent porter que sur la limitation de la croissance de $|f(n)|^\alpha$, et il est tentant de chercher une condition minimale. Ajoutons aussi que l'on a cherché une méthode d'étude de ce genre de question dans un cadre d'analyse fonctionnelle. (Pour une réponse partielle, voir [2].) Enfin, mentionnons que tous les beaux résultats qui ont été établis pour les fonctions multiplicatives sur les entiers, possédant une moyenne non-nulle et satisfaisant à une bonne condition de limitation de croissance de leur module, n'ont pas permis d'élucider le sens des conditions (A), qui peuvent se définir pour n'importe quel système d'entiers généralisés de Beurling.

On se propose ici de présenter un résultat à ce sujet ainsi que le principe de démonstration essentiellement nouveau suivant lequel il s'établit, qui semble assez bien répondre aux préoccupations ci-dessus exposées. Pour des raisons de commodité et de clarté, on se restreint au cas des fonctions multiplicatives à une variable sur les entiers ordinaires, avec $\alpha=1$. Précisons cependant que la méthode est générale et qu'une version étendue du résultat ici présenté figurera lors de la publication (prochaine) de la totalité de ce travail.

2. Notations et remarques préliminaires. $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Si $p \in \mathcal{P}$, $E_p = [1, p, p^2, \cdots] \cup \{0\}_p$ est compact pour la topologie de base $V(\{p^\alpha\}) = \{p^\alpha\}$, $V(\{0\}_p) = [p^N, p^{N+1}, \cdots] \cup \{0\}_p$. $E = \prod_p E_p$ est compact pour la topologie produit; on définit μ_p par $\mu_p(\{p^\alpha\}) = (1 - 1/p) \cdot 1/p^\alpha$ comme mesure de Borel régulière de masse 1, et donc, $d_\mu = \otimes_p d_{\mu_p}$ est de Borel, régulière, de masse 1 sur E. $t \in E$ signifie $t = \{t_p\}_{p \in \mathcal{P}}$, et l'on écrira $t = t_{y-} \cdot t_{y+,z-} \cdot t_{z+}$, si $y \leq z$, où $t_{y-} = \{t_p\}_{p<y}$, $t_{y+,z-} = \{t_p\}_{y \leq p < z}$, $t_{z+} = \{t_p\}_{p \geq z}$. $N^* = \{1, 2, \cdots\}$ se plonge dans E de façon dense. On remarque que:

$\Gamma = \{\gamma : N^* \to \boldsymbol{R},\ \gamma = \sum_{\text{finie}} \lambda_d I_d,\ \lambda_d \in \boldsymbol{R},\ I_d(n) = 1 \text{ si } d \mid n,\ 0 \text{ si } d \nmid n\}$ définit un sous-espace de $\mathcal{C}(E, \boldsymbol{R})$, l'espace des fonctions continues de E vers $\boldsymbol{R}$, dense dans $\mathcal{C}(E, \boldsymbol{R})$ pour la norme $\| \ \|_\infty$ de la topologie uniforme.

$\mathcal{L}(E, d\mu)$ est l'espace des fonctions d_μ-intégrables sur E.

3. Enoncé du résultat. A la fonction multiplicative f on associe les séries de Dirichlet

$$\tilde{F}(s) = \sum_{n \geq 1} (f(n)/n^s), \qquad \tilde{G}(s) = \sum_{n \geq 1} (|f(n)|/n^s).$$

On considère les conditions suivantes:

$$(\mathrm{T}) \quad \begin{cases} (\mathrm{T}_1): \lim_{\sigma \to 1+} \zeta(\sigma)^{-1} \cdot \tilde{F}(\sigma) = A \text{ existe et est non-nulle.} \\ (\mathrm{T}_2): \tilde{G}(\sigma) \text{ existe pour } \sigma > 1 \text{ et } \limsup_{\sigma \to 1+} \zeta(\sigma)^{-1} \tilde{G}(\sigma) = B < +\infty. \\ (\mathrm{T}_3): \forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } \eta > 0 \text{ tel que:} \\ \quad \text{si } \gamma \in \Gamma \text{ vérifie } \lim_{\sigma \to 1} \zeta(\sigma)^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (|\gamma(n)|/n^\sigma) < \eta \\ \quad \text{alors } \limsup_{\sigma \to 1+} \zeta(\sigma)^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (|f(n)| \cdot |\gamma(n)|/n^\sigma) < \varepsilon. \end{cases}$$

On considère la condition suivante:

(L): La suite de fonctions $F_y(t)$ définie d_μ-presque-partout sur E par $F_y(t) = \prod_{p \leq y} f(t_p)$ tend d_μ-presque-partout et dans $\mathcal{L}^1(E, d\mu)$ vers une fonction $F(t)$ $d\mu$-intégrable telle que $\int_E f(t) d\mu(t) = A \neq 0$.

($f(t_p)$ est définie ici par $f(t_p) = f(p^\alpha)$ si $t_p = p^\alpha$, $\alpha \geq 0$, α fini.)

Le résultat est le suivant:

Théorème: *Les conditions* (A), (T), (L) *sont équivalentes.*

4. Exposition de la méthode de démonstration. En fait, la condition (L) est le *deus ex machina.* Je vais exposer les idées permettant d'établir que (T) implique (A) et brièvement indiquer comment (A) implique (T). La condition (L) apparaît naturellement d'elle-même.

4-1. On suppose que les conditions (T) sont vérifiées.

On écrit $\langle f, g \rangle = \lim_{\sigma \to 1+} \zeta(\sigma)^{-1} \sum (f(n) g(n)/n^\sigma)$ quand cette expression a un sens.

On montre d'abord que

$$\langle f, I_d \rangle = A \cdot \prod_{p^\alpha \| d} \left(\left(\frac{1}{\sum_{k \geq 0} (f(p^k)/p^k)} \right) \cdot \sum_{r \geq 0} \frac{f(p^{\alpha+r})}{p^{\alpha+r}} \right)$$

existe, *ce qui nécessite* T_3.

4-2. Si $\gamma \in \Gamma$, alors $\langle f, \gamma \rangle$ existe par 4-1; de plus, $\gamma \mapsto \langle f, \gamma \rangle$ est uniformément continue sur Γ et par conséquent, si $g \in \mathcal{C}(E, \boldsymbol{R})$, $g \mapsto \langle f, g \rangle$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(E, \boldsymbol{R})$. Donc $\mathrm{Re}\langle f, g \rangle = F^+(g) - F^-(g)$, où $F^+(g) = \int_E g\,dm^+$, dm^+ étant une mesure de Borel régulière positive, ceci d'après le théorème de représentation de Riesz. On démontre alors que dm^+ est absolument continue par rapport à $d\mu$, i.e.: $dm^+ = \check{F}^+ d\mu$, où $\check{F}^+ \in \mathcal{L}(E, d\mu)$, $\check{F}^+ \geq 0$ $d\mu$-p-p. On utilise le fait que l'on a de même $F^-(g) = \int \check{F}^- g\,d\mu$, et que l'on peut traiter de la même façon $\mathrm{Im}\langle f, g \rangle$. Ce qui nous donne que:

$$\langle f, g \rangle = \int_E \mathcal{F} g\,d\mu, \quad \text{où} \quad \mathcal{F} \in \mathcal{L}^1(E, d\mu), \quad \text{et} \quad \int_E \mathcal{F} = \langle f, 1 \rangle = A \neq 0.$$

4-3. On définit, si t_{y^-} n'a pas de composante nulle, $\hat{F}_{y^-}(t)$ par:

$$\hat{F}_{y^-}(t) = \hat{F}(t_{y^-}) = \int_{\prod_{p>y} E_p} \mathcal{F}(t_{y^-} t_{y^+}) \bigotimes_{p>y} d\mu_p(t_p)$$

$$= A \cdot \prod_{p<y} \left(f(t_p) \cdot \frac{1}{(1-1/p) \prod_{k\geq 0} (f(p^k)/p^k)} \right).$$

On pose $F = \hat{F} \cdot A^{-1}$.

Un théorème classique de Jessen nous donne que $F_{y^-}(t) \to F(t)$ $d\mu$-p-p et dans $\mathcal{L}^1(E, d\mu)$, et que:

$$F_{y^+}(t) = \prod_{p>y} \frac{f(t_p)}{(1-1/p) \sum_{k\geq 0} (f(p^k)/p^k)} \to 1 \quad d\mu\text{-p-p et dans } \mathcal{L}^1(E, d\mu).$$

4-4. On établit que:

Lemme. *Si h est multiplicative à valeurs* 0 *où* 1, *alors*, $\prod_{p>y} h(t_p) \to 1$ $d\mu$-p-p *et dans* $\mathcal{L}^1(E, d\mu)$ *si et seulement si* $\sum_{h(p)=0} 1/p < +\infty$.

4-5. On remarque que $I(n) = 1$ si $f(n) = 0$, 0 sinon, vérifie les conditions du Lemme, et comme $\int \mathcal{F} \neq 0$, on a $\prod_{p>y} I(t_p) \to 1$ $d\mu$-p-p et dans $\mathcal{L}^1(E, d\mu)$.

4-6. Soit h la fonction définie par

$$h(p^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad h \text{ multiplicative.}$$

Alors, la fonction $I \cdot h \cdot |F|$ définit une fonction mesurable strictement positive sur $\{t \,|\, Ih(t) \neq 0\}$ pour la mesure induite $I \cdot h \cdot d\mu$, limite $I \cdot h \cdot d\mu$-p-p de $I \cdot h \cdot |F_{y^-}|$. Le théorème des trois séries de Kolmogorov nous donne que $\sum_{|f(p)|<1/c} 1/p < +\infty$, $\sum_{|f(p)|>c} 1/p < +\infty$ pour $c > 1$. On peut alors démontrer que $\sum_{|f(p)|>c} \sum_{k\geq 1} (|f(p^k)|/p^k) < +\infty$ et que $\sum_p \sum_{k\geq 2} (|f(p^k)|/p^k) < +\infty$.

4-7. Pour démontrer que $\sum_{|f(p)|<c} (|f(p)-1|^2/p) < +\infty$, on utilise le fait que $(I \cdot F_{y^-}/|F_{y^-}|^{1/2})$, $I \cdot |F_{y^-}|^{1/2}$ sont dans $\mathcal{L}^1(E, d\mu)$. Il s'agit là de calculs directs visant à éliminer les termes

$$\left|\prod_{p<y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot\sum\frac{f(p^k)}{p^k}\right|.$$

4-8. On démontre que $\sum_{|f(p)|<c}((1-f(p))/p)$ converge en utilisant une méthode due essentiellement à Delange [3]. Mentionnons que c'est la seule fois où une propriété des entiers (autre que la convergence de $\zeta(s)$ pour $\operatorname{Re} s>1$) est utilisée.

4-9. On en déduit alors facilement que

$$\lim_{y\to+\infty}\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum\frac{f(p^k)}{p^k}=A.$$

4-10. Pour établir que (A)$\Rightarrow$(T), on utilise la méthode suivie dans 4-8 pour établir le lien entre la fonction f vérifiant (A) et les propriétés au voisinage de 1 de $\tilde{F}(s)\zeta(s)^{-1}$. On vérifie alors que la suite $|f_{y^-}(t)| =\prod_{p\leq y}|f(t_p)|$ tend vers une limite $F(t)$ dans $\mathcal{L}^1(E, d\mu)$, et par conséquent, si $\gamma\in\Gamma$, on a:

$$\lim_{y\to+\infty}\int_E|f_{y^-}(t)|\gamma(t)d\mu(t)=\lim_{y\to+\infty}\lim_{\sigma\to1+}\zeta(\sigma)^{-1}\sum_{n\geq1}\frac{|f_{y^-}(n)|\gamma(n)}{n^\sigma}$$

$$=\lim_{\sigma\to1+}\zeta(\sigma)^{-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\sum_{n\geq1}\frac{|f_{y^-}(n)|\gamma(n)}{n^\sigma}$$

$$=\lim_{\sigma\to1+}\zeta(\sigma)^{-1}\sum_n\frac{|f(n)|\gamma(n)}{n^\sigma}=\int_E|f(t)|\gamma(t)d\mu(t)$$

comme la mesure $Fd\mu$ de base μ, de densité F, est absolument continue pour μ, la condition T_3 est satisfaite puisque

$$\int_E\gamma(t)d\mu(t)=\lim_{\sigma\to1}\zeta(\sigma)^{-1}\cdot\sum_{n\geq1}\frac{\gamma(n)}{n^\sigma}.$$

5. Conclusion. On remarquera que tout tourne sur le fait que la fonction définie $d\mu$-p-p par

$$F(t)=\lim_{y\to+\infty}\prod_{p<y}\frac{f(t_p)}{(1-1/p)\sum(f(p^k)/p^k)}$$

est intégrable. La méthode de dualité suivie s'arrête au niveau de la normalisation de la mesure. On ne peut pas montrer directement que $\lim_{y\to+\infty}\prod_{p<y}(1-1/p)\sum(f(p^k)/p^k)$ existe et est non-nulle. Il s'agit là d'un phénomène classique lorsque l'on utilise ce genre de méthode; on est donc amené à procéder alors par une méthode analytique pour établir le lien avec la fonction ζ.

Références

[1] Schwarz, W.: Remarks on the theorem of Elliott and Daboussi, and applications (preprint) (Extended version of two survey lectures given at the Warszawa International Banach Center, on September 6, 1982 and September 8, 1982).

[2] Mauclaire, J.-L.: Suites limite-périodiques et théorie des nombres II. Proc. Japan Acad., **56A**, 223–224 (1980).

[3] Delange, H., et Daboussi, H.: On a theorem of P.D.T.A. Elliott on multiplicative functions. J. London Math. Soc., **14**, 345–356 (1976).