9. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres.* VII

Par J.-L. MAUCLAIRE
C.N.R.S. et Université Waseda

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Jan. 12, 1983)

Une fonction additive est une application $f: \boldsymbol{N}^* \to \boldsymbol{C}$ telle que $f(mn) = f(m)+f(n)$ si $(m,n)=1$.

On dit qu'une fonction additive réelle f admet une distribution asymptotique σ_f s'il existe une fonction de distribution σ_f telle que, en tout point de continuité x de σ_f, on ait:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\le N \\ f(n)<x}} 1 = \sigma_f(x).$$

On se propose ici d'établir le résultat suivant:

Théorème. *Soit f une fonction additive réelle admettant une distribution asymptotique σ_f. Alors, en tout point de continuité x de σ_f, la suite $I_x(n)$ définie par*

$$I_x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(n)<x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est limite-périodique et sa série de Fourier ne comporte que des "sommes de Ramanujan" usuelles.

Preuve. Soit x un point de continuité de σ_f. On pose:

$$f_y(n) = \sum_{\substack{p^B // n \\ p^B \le y}} f(p^B),$$

$$f^*(n) = \sum_{p/n} f(p),$$

$$f_y^*(n) = \sum_{\substack{p/n \\ p\le y}} f(p).$$

On définit $I_{x,y}(n)$ par:

$$I_{x,y}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_y(n)<x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $f_y(n)$ est périodique et que sa série de Fourier ne comporte que des "sommes de Ramanujan" usuelles, pour établir le théorème, il suffira de démontrer que:

$$\lim_{y\to+\infty} \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\le N} |I_{x,y}(n) - I_x(n)| = 0.$$

1. On établit d'abord:

(1) Pour $\varepsilon>0$ fixé, $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\le N \\ |f_y(n)-f(n)|>\varepsilon}} 1 = 0.$

En effet, on a

$$|f_y(n)-f(n)|\leq|f_y^*-f^*(n)|+|(f_y(n)-f(n))-(f_y^*(n)-f^*(n))|$$
$$\leq|f_y^*(n)-f^*(n)|+\sum_{\substack{p^\nu//n\\ p^\nu>y\\ \nu\geq 2}}|f(p^\nu)-f(p)|.$$

D'après un résultat d'Erdös ([1]), on a

$$(\alpha)\qquad \lim_{y\to+\infty}\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leq N\\ |f_y^*(n)-f^*(n)|>\varepsilon/2}}1=0.$$

D'autre part, on a la suite d'inclusions

$$\left\{n\,||(f_y(n)-f(n))-(f_y^*(n)-f^*(n))|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\subset\left\{n\,|\sum_{\substack{p^\nu//n\\ p^\nu>y\\ \nu\geq 2}}|f(p^\nu)-f(p)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\subset\{n\,|\sum_{\substack{p^\nu//n\\ p^\nu>y\\ \nu\geq 2}}|f(p^\nu)-f(p)|>0\}\subset\{n\,|\exists p \text{ premier, } p>\sqrt{y},\ p^2|n\}=A_y.$$

Comme

$$\sum_{\substack{n\leq N\\ n\in A y}}1\leq\sum_{p>\sqrt{y}}\sum_{\substack{n\leq N\\ p^2|n}}1\leq\sum_{p>\sqrt{y}}\left[\frac{N}{p^2}\right]\leq\sum_{\sqrt{y}<p<\sqrt{N}}\left[\frac{N}{p^2}\right]$$
$$\leq N\times\sum_{\sqrt{y}<p}\frac{1}{p^2}+O(\sqrt{N})\leq N\times\frac{1}{\sqrt{y}}+O(\sqrt{N}),$$

en utilisant cette majoration et (α), on obtient (1), puisque l'on a

$$\{n\,||f_y(n)-f(n)|>\varepsilon\}\subset\left(\left\{n\,||f_y^*(n)-f^*(n)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right.$$
$$\left.\cup\left\{n\,||f(n)-f_y(n))-(f^*(n)-f_y^*(n))|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

2. Soit alors

$$E_\varepsilon=\{n\in N^*\,||f_y(n)-f(n)|\geq\varepsilon\}$$
$$F_\varepsilon=\{n\in N^*\,||f_y(n)-f(n)|<\varepsilon\}.$$

Par (1), la densité supérieure $\delta_y(\varepsilon)$ de E_ε tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$.

On écrit alors que

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}|I_{x,y}(n)-I_x(n)|\leq\delta_y(\varepsilon)+\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leq N\\ n\in F_\varepsilon}}|I_{x,y}(n)-I_x(n)|.$$

Mais on a

$$\{n\in F_\varepsilon\,|I_{x,y}(n)-I_x(n)\neq 0\}\subset(\{n\,|f(n)\geq x,\ x-\varepsilon\leq f_y(n)<x\}$$
$$\cup\{n\,|f(n)<x,\ x\leq f_y(n)<x+\varepsilon\}),$$

d'où

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leq N\\ n\in F_\varepsilon}}|I_{x,y}(n)-I_x(n)|\leq(\sigma_{f_y}(x)-\sigma_{f_y}(x-\varepsilon))+(\sigma_{f_y}(x+\varepsilon)-\sigma_{f_y}(x))$$
$$\leq\sigma_{f_y}(x+\varepsilon)-\sigma_{f_y}(x-\varepsilon),$$

σ_{f_y} dénotant la distribution asymptotique de f_y.

Comme x est un point de continuité, pour ε assez petit, on a ([2])

$$\lim_{y\to+\infty}\sigma_{f_y}(x+\varepsilon)=\sigma_f(x+\varepsilon)$$
$$\lim_{y\to+\infty}\sigma_{f_y}(x-\varepsilon)=\sigma_f(x-\varepsilon),$$

d'où le résultat en faisant tendre ε vers 0.

Remarque. Le résultat ici donné provient essentiellement du fait que si l'on reprend les notations de la note I de même titre ([4]) on a "f additive réelle admet une distribution asymptotique si et seulement si la suite de fonctions $f_y : E \to \boldsymbol{R}$ définie presque partout par $f_y(t) = \sum_{p \leq y} f(p^{v_p(t)})$ converge pour presque tout t vers une fonction $f(t)$ (évidemment mesurable sur E), quand y tend vers $+\infty$."

Ce dernier résultat peut s'obtenir à partir du "Théorème des trois séries" de Kolmogorov (voir [3]).

Références

[1] P. Erdös: On the density of some sequences of numbers III. J. London Math. Soc., **13**, 119–127 (1938).

[2] Jessen et Wintner: Distribution function and the Riemann ζ-function. Trans. Amer. Math. Soc., **38**, 48–88 (1935).

[3] M. Kac: Probability methods in analysis and number theory. Bull. Amer. Math. Soc., **55**, 641–665 (1949).

[4] J.-L. Mauclaire: Suites limite-périodiques et théorie des nombres. I. Proc. Japan Acad., **56A**, 180–182 (1980).