51. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres. VI*

Par J.-L. MAUCLAIRE
Institut de Mathématiques Statistiques

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 13, 1981)

On conserve les notations des notes précédentes de même titre*).

Soit A une suite d'entiers positifs. I_A étant sa fonction caractéristique, on note $M(I_A)$ (resp. $\underline{M}(I_A)$, resp. $\overline{M}(I_A)$) sa densité naturelle (si elle existe), (resp. sa densité inférieure, resp. sa densité supérieure). Aucune des densités M, $\overline{M}$, $\underline{M}$ ne définit une mesure, mais on doit à R. C. Buck la construction d'une mesure sur N, obtenue de la façon suivante ([2]) : Soit $\mathcal{D}_0$ la classe des suites qui sont réunions d'un nombre fini de progressions arithmétiques, ou qui diffèrent d'une telle réunion sur un ensemble fini. Si $A\in\mathcal{D}_0$, $M(I_A)$ existe. A une suite S, on associe $\nu(S)=\liminf M(I_A)$, $A\in\mathcal{D}_0$, $S\subset A$. La classe $\mathcal{D}_\nu$ d'ensembles mesurables dans N pour ν est l'ensemble des S tels que $\nu(S)+\nu(S')=1$, où $S'=N\backslash S$. Si S est ν-mesurable, alors $\nu(S)=M(I_S)$. Une telle mesure a l'avantage d'être définie de façon naturelle. Elle correspond cependant à un cas très particulier d'ensemble m-mesurable sur G, car on a le résultat suivant :

Théorème. *Soit I_A la fonction caractéristique d'un ensemble A ν-mesurable. Alors, il existe un fermé F et un ouvert O de G, de fonctions caractéristiques I_F et I_O, tels que l'on ait :*

1) $\int_G (I_F-I_O)dm=0.$

2) *Pour tout entier $n\in N$, $I_O(n)\le I_A(n)\le I_F(n)$.*

3) *$I_O(n)$, $I_A(n)$, $I_F(n)$ sont dans B^1, et équivalentes dans $\mathcal{B}^1$.*

L'utilisation de ν comme mesure sur N relève donc de la théorie de l'intégrale de Stieltjes-Riemann sur G.

Preuve du théorème. La fonction caractéristique d'une progression arithmétique induit sur G une fonction continue à valeurs 0 ou 1, c'est-à-dire une fonction caractéristique d'ouvert compact. Si A_1 et A_2 sont deux progressions arithmétiques sur N, on voit que $I_{A_1\cup A_2}=I_{A_1}+I_{A_2}-I_{A_1}\cdot I_{A_2}$. On en déduit que la fonction caractéristique d'une réunion finie de progressions arithmétiques induit une fonction caractéristique d'ouvert compact sur G. Comme la fonction caractéristique d'un point est semi-continue supérieurement sur G, à un élément C de $\mathcal{D}_0$, on associe une fonction semi-continue supérieurement de la façon suivante :

---

*) J.-L. Mauclaire, Suites limite-périodiques et théorie des nombres I 180, II 223, III 294, Proc. Japan Acad., 56A (1980) ; IV 72, V 188, ibid., 57A (1981).

comme $C=[(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)\backslash F_1]\cup F_2$, ($A_i$ étant des progressions arithmétiques, $F_1\subset\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, F_1 fini, F_2 fini), on pose $C'=(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)\cup F_2$, et on considère la fonction induite sur G par $I_{C'}$ (que l'on note encore $I_{C'}$).

On pose:

$$g(t)=\liminf_{\substack{C\in\mathcal{D}_0\\ A\subset C}} I_{C'}(t).$$

$g(t)$ est semi-continue supérieurement, ne prend que les valeurs 0 et 1; c'est donc la fonction caractéristique d'un compact F, de plus, par construction, $g(n)\geq I_A(n)$.

On fait de même pour $1-I_A(n)$. On définit:

$$k(t)=\liminf_{\substack{C\in\mathcal{D}_0\\ N\backslash A\subset C}} I_{C'}(t).$$

On voit que $k(n)\geq 1-I_A(n)$, i.e.: $I_A(n)\geq 1-k(n)$, et l'on pose $1-k(t)=f(t)$. Comme $f(t)$ est semi-continue inférieurement sur G et ne prend que les valeurs 0 et 1, c'est la fonction caractéristique d'un ouvert O, de plus, $f(n)\leq I_A(n)$.

On remarque que $f(t)\leq g(t)$. En effet, si pour un $t_0\in G$ on avait $f(t)>g(t)$, comme $f-g$ est semi-continue inférieurement sur G, il existerait un voisinage $V(t_0)$ tel que $f(t)-g(t)>0$ pour $t\in V(t_0)$. Comme N est dense dans G, il existerait $n_0\in V(t_0)$ et on aurait $f(n_0)>g(n_0)$, ce qui contredirait le fait que $f(n)\leq I_A(n)\leq g(n)$ pour tout $n\in N$. Comme

$$\int_G g(t)\,dm(t)\leq \liminf_{\substack{A\subset C\\ C\in\mathcal{D}_0}} \int I_{C'}(t)dm(t)\leq \liminf_{\substack{A\subset C\\ C\in\mathcal{D}_0}} M(I_C),$$

on a:

$$\int_G gdm\leq\nu(A).$$

On montre de même que:

$$\int_G fdm\geq\nu(A),$$

ce qui donne que

$$\int_G (g-f)dm=0.$$

Comme $g\geq f$, $g=f$ presque partout. Comme $g(t)$ est semi-continue supérieurement et $f(t)$ est semi-continue inférieurement, g et f sont continues presque partout, puisqu'égales presque partout.

Un résultat classique ([1]) nous donne que:

$$M(g)=\int_G g(t)dm(t).$$

De plus, $M(|g-I_{C'}(n)|)=M(I_{C'}-g)$, où $C\in\mathcal{D}_0$, $A\subset C$, et comme $I_{C'}\in B^1$, on a $g\in B^1$.

De même pour f: $f\subset B^1$ et $M(f)=\int_G f(t)dm(t)$, d'où:

$$M(g)=M(I_A)=M(f).$$

Comme $f(n) \leq I_A(n) \leq g(n)$, et que $M(g-f)=0$, on en déduit que $I_A \in B^1$ et que $g \sim I_A \sim f$ dans B^1.

Remarque. Il ne faudrait pas croire que O est l'intérieur de F. En effet, si $A=\{n+1\}$, où $n \in N$, on voit sans peine que F est G tout entier, O est $G \setminus \{1\}$, et l'on n'a pas $\mathring{F}=O$.

Je remercie M. Kosaku Okutsu de m'avoir fourni ce contre-exemple et des rectifications qu'il a apportées à la première version de cette note.

Références

[1] Bourbaki: Intégration ch. IV, 5, no. 12, Proposition 22.
[2] R. C. Buck: The measure-theoretic approach to density. Amer. J. Math., **68**, 560–580 (1946).