46. *Solutions analytiques et non-analytiques pour des équations du premier ordre à symboles principaux dégénérés*

Par Akira NAKAOKA

Université des sciences techniques de Kyoto

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., April 13, 1981)

1. Introduction. On considère l'équation suivante ;

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial u/\partial x_j = u, \tag{1.1}$$

où tous les coefficients sont analytiques dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$. On suppose, de plus, que $a_j(0)=0$ $(j=1, 2, \cdots, n)$. Ici on se propose d'étudier deux problèmes suivants pour (1.1) :

Problème 1. Existence d'une solution $u(x)\not\equiv 0$ analytique à l'origine.

Problème 2. Existence d'une solution de la forme $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}H(x)$ avec $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\in \mathbf{C}^n$, $H(x)$ étant une fonction analytique $\not\equiv 0$.

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice $\partial(a_1, \cdots, a_n)/\partial(x_1, \cdots, x_n)(0)$ et Λ l'enveloppe convexe de $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. Alors on voit qu'il faut exister un multi-indice $(\nu_1, \cdots, \nu_n)\in \overline{\mathbf{N}}^n$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{n} \nu_j\lambda_j = 1, \tag{1.2}$$

pour que le problème 1 soit affirmatif, où $\overline{\mathbf{N}}=\mathbf{N}\cup\{0\}$. Mais, comme on le voit facilement, (1.2) n'est pas suffisante en général. En effet, l'équation suivante donne un contre exemple : $x^2\partial u/\partial x+(x+y)\partial u/\partial y=u$. Une raison à cela est que dans ce cas où $0\in\Lambda$. En effet, on peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Supposons que* $0\notin\Lambda$ *et que* (1.2) *soit vraie pour un certain multi-indice* $(\nu_1, \cdots, \nu_n)\in\overline{\mathbf{N}}^n$, *alors nous pouvons trouver une solution analytique* $\not\equiv 0$ *de* (1.1).

Dans le cas où $0\notin\Lambda$ la situation n'est pas compliquée tellement pour le problème 2. Tout d'abord, remarquons que nous pouvons toujours supposer, sans perdre la généralité, que les coefficients aient la forme

$$a_j(x)=\lambda_j x_j+\varepsilon_j x_{j+1}+A_j(x) \tag{1.3}$$

par un changement de variables, où $\varepsilon_j=1$ ou 0 et $A_j(x)$ s'annule à l'origine avec un ordre$\geqq 2$. Nous avons les deux propositions suivantes ;

Proposition 1.1. *Pour que* (1.1) *admette une solution de la forme* $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}H(x)$, *il est nécessaire que* $\alpha_j=0$ *si* $\varepsilon_j\neq 0$ *ou bien* $A_j(x)$ *ne s'annule pas modulo* x_j, *pour* $j=1, \cdots, n$.

Proposition 1.2. *Pour que* (1.1) *admette une solution de la forme* $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}H(x)$ *il est nécessaire qu'il existe un multi-indice* $(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ $\in\overline{\mathbf{N}}^n$ *tel que*:

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\nu_j)\lambda_j=1. \tag{1.4}$$

Remarque. Si l'on normalise $H(x)$: si $H(x)$ est de la forme $H(x)=1+\sum_{|\alpha|>0}H_\alpha x^\alpha$, il est nécessaire que l'on ait $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda_j=1$.

On peut obtenir le théorème suivant;

Théorème 1.2. *Supposons que* $0\notin\Lambda$. *S'il y a un multi-indice* $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{C}^n$ *satisfaisant aux conditions des Propositions* 1.1 *et* 1.2, *il existe au moins une solution* $\not\equiv 0$ *de* (1.1) *qui se présente sous la forme de* $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}H(x)$.

L'énoncé des Théorèmes 1.1 et 1.2 est déjà classique. Mais dans le cas où $0\in\Lambda$, je pense que l'étude n'est pas bien faite. Dans cette note, je vais exposer un cas de ce genre très particurier que soit-il. Ce qui est à présent mon but principal.

2. Enoncé du résultat. On se limite à l'équation particulière suivante:

$$(\lambda x+a(x,y))\partial u/\partial x+b(x,y)\partial u/\partial y=u, \tag{2.1}$$

où $\lambda\neq 0$, $a(x,y)$ et $b(x,y)$ s'annullent a l'origine avec un ordre $\geqq 2$.

Remarque. Si $\lambda=0$, nos problèmes n'admettent aucune solution.

Si $b(x,y)\equiv 0$, la situation est très simple. En effet, on peut résoudre nos problèmes comme suit.

Lemme 2.1. *Par un changement analytique de coordonnées conservant l'origine, on peut supposer que* $a(x,y)=xA(x,y)$, *où* $A(x,y)$ *est une fonction holomorphe à l'origine.*

Ecrivons: $A(x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(y)x^j$, on a alors:

Théorème 2.1. *L'équation* (2.1) *admet au moins une solution analytique* $\not\equiv 0$ *si et seulement si* $\lambda^{-1}\in\mathbf{N}$ *et* $A_0(y)\equiv 0$.

De plus on a:

Théorème 2.2. *L'équation* (2.1) *admet au moins une solution* $\not\equiv 0$ *de la forme* $x^\alpha y^\beta H(x,y)$ *si et seulement si, il existe* $\nu\in\overline{\mathbf{N}}$ *tel que* $(\alpha+\nu)\lambda=1$ *et* $A_0(y)\equiv 0$.

Pour l'équation générale, on peut supposer toujours que $a(x,0)\equiv 0$ et $b(x,0)\equiv 0$, par un changement analytique de coordonnées conservant l'origine. Mais, il m'est assez difficile d'étudier l'équation générale, donc alors je vais considérer le cas très particulier suivant:

$$(\lambda x+A_1xy)\partial u/\partial x+(B_1xy+B_2y^2)\partial u/\partial y=u, \tag{2.2}$$

avec $|B_1|+|B_2|\neq 0$. Avant d'aborder le problème, notons que si l'on considère l'équation suivante au lieu de (2.2):

$$(\lambda x+A_1xy+A_2y^2)\partial u/\partial x+(B_1xy+B_2y^2)\partial u/\partial y=u\ (A_2\neq 0),$$

la situation devient plus compliquée et je conjecture que l'on n'aurait que la solution identiquement nulle, même pour le problème 1.

L'équation (2.2) est très particulière. Cependant, je pense que cela suffirait pour mettre en évidence les difficulté que presentent nos problèmes.

On énonce maintenant les résultats principaux. D'abord on a ;

Théorème 2.3. *Supposons que* $A_1B_1B_2\neq 0$. *L'équation* (2.2) *admet au moins une solution analytique* $\not\equiv 0$ *à l'origine si et seulement si* :

$$\lambda^{-1}\in \mathbf{N} \tag{2.3}$$

$$-A_1/B_2\in \mathbf{N}. \tag{2.4}$$

Quant au problème 2, on a :

Théorème 2.4. *Supposons que* $A_1B_1B_2\neq 0$. *L'équation* (2.2) *admet au moins une solution* $\not\equiv 0$ *de la forme* $x^\alpha y^\beta H(x, y)$, *si et seulement si* :

$$-A_1/B_2\in \mathbf{N} \tag{2.5}$$

(2.6) *il existe* $\nu\in\overline{\mathbf{N}}$ *tel que* $(\alpha+\nu)\lambda=1$ *et* $-\{(\alpha+\nu)A_1/B_2+\beta\}\in\mathbf{N}$.

Remarque. Si $A_1B_1B_2=0$, la situation est plus simple.

3. Schéma de démonstration des théorèmes. Dans ce paragraphe, on se limitera à donner une esquisse des démonstrations des théorèmes. On commence par le lemme suivant qui est très important.

Lemme 3.1. *Considérons l'équation suivante* :

$$z^m du/dz+(\gamma+\alpha z^{m-1})u=f(z), \tag{3.1}$$

où m $(\geqq 2)\in\mathbf{N}$, $\gamma(\neq 0)$ *et* α *sont des nombres complexes et* $f(z)$ *est une fonction holomorphe dans un voisinage de l'origine. Alors l'équation* (3.1) *admet une solution holomorphe à l'origine (évidemment unique) si et seulement si* :

(1) *quand* $\alpha=0$,

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\prod_{q=0}^{p-1}\sigma(\alpha, k; q)\right\}^{-1}(-\gamma)^p f_{k+p(m-1)}=0$$
$$(k=1, 2, \cdots, m-1)$$

(2) *quand* $\alpha\neq 0$ *et* $k+\alpha+j(m-1)\neq 0$ *pour tout* $k\in\{0, 1, \cdots, m-2\}$ *et pour tout* $j\in\overline{\mathbf{N}}$,

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\prod_{q=0}^{p-1}\sigma(\alpha, k; q)\right\}^{-1}(-\gamma)^p f_{k+p(m-1)}=0$$
$$(k=0, 1, \cdots, m-2)$$

(3) *quand* $\alpha\neq 0$ *et* $k+\alpha+j(m-1)=0$ *pour certain* $k\in\{0, 1, \cdots, m-2\}$ *et pour certain* $j\in\overline{\mathbf{N}}$,

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\prod_{q=0}^{p-1}\sigma(\alpha, k; q)\right\}^{-1}(-\gamma)^p f_{k+p(m-1)}=0, \tag{A}$$

pour $k\in\{0, 1, \cdots, m-2\}$ *tel que* $k+\alpha+j(m-1)\neq 0$ *pour tout* $j\in\overline{\mathbf{N}}$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\prod_{q=j_0+1}^{p-1}\sigma(\alpha, k; q)\right\}^{-1}(-\gamma)^p f_{k_0+(j_0+1+p)(m-1)}=0 \tag{B}$$

pour $k_0\in\{0, 1, \cdots, m-2\}$ *tel que* $k_0+\alpha+j_0(m-1)=0$ *avec certain* $j_0\in\overline{\mathbf{N}}$, *ou* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^n$, $\sigma(\alpha, k; q)=k+\alpha+q(m-1)$ *et* $\prod_{q=0}^{-1}\sigma(\alpha, k; q)=1$.

Pour obtenir une solution analytique $\not\equiv 0$ de (2.2), il est nécessaire que l'on ait $\lambda^{-1} \in \mathbf{N}$ (cf. (1.2)). Supposons donc que $\lambda = k^{-1}$ ($k \in \mathbf{N}$), et considérons la solution formelle suivante: $u(x, y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} u_n(y) x^n$, alors la suite $\{u_n(y)\}$ doit satisfaire aux relations:

$$(3.2)_n \qquad n(k^{-1} + A_1 y) u_n + B_2 y^2 du_n/dy + B_1 y u_{n-1} = u_n,$$

avec $u_{-1} \equiv 0$. Il est facile de voir que $u_0(y) = \cdots = u_{k-1}(y) \equiv 0$ et que $u_k(y)$ doit satisfaire à l'équation suivante:

$$(3.3) \qquad kA_1 u_k + B_2 y du_k/dy = 0,$$

il faut donc que $-kA_1/B_2 \in \mathbf{N}$ pour que $u_k(y)$ ne soit pas identiquement nulle.

Remarque. On peut voir facilement que $u(y) \equiv 0$, si $u_k(y) \equiv 0$.

En plus on voit qu'il faut $-A_1/B_2 \in \mathbf{N}$ pour que les coefficients $u_{k+s}(y)$ ($s \geqq 1$) soient obtenus successivement, vu le Lemme 3.1. On peut démontrer ensuite la convergence de la solution formelle, ce qui démontre le Théorème 2.3.

On peut démontrer le Théorème 2.4 de la même manière que celle ci-dessus.

Références

[1] G. H. Hardy: Divergence series. Oxford Express (1956).
[2] A. Nakaoka: On uniqueness of analytic solution for first order partial differential equations with degenerate principal symbols. J. Math. Kyoto Univ., **15**, 401–421 (1975).
[3] ——: On uniqueness of analytic solution for first order partial differential equations with degenerate principal symbols II. ibid., **17**, 69–90 (1977).
[4] ——: Exposé au Séminaire Vaillant, Univ. de Paris VI (1979).