40. *Cohomologie à estimation L^2 et extension des fonctions holomorphes avec contrôle de la croissance*

Par Tsuneo YOSHIOKA
Department of Mathematics, Nara Women's University

(Communicated by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., March 12, 1981)

Soit $(F_1, \cdots, F_m)$ un système fini de fonctions holomorphes dans un ouvert pseudoconvexe Ω de C^n. Posons $\chi=\log \sum_i |F_i|^2$ et $t=\min\{n, m-1\}$. Soit s un réel>1. Soient p, q et r des entiers$\geqq 0$. On reprend les notations et les définitions d'Hörmander [1].

1. Le théorème 1 suivant est une extension du théorème 1 de Skoda [5] aux formes différentielles de bidegré (p, q) $\bar\partial$-fermées. Pour une fonction φ sémi-continue supérieurement dans Ω, pouvant prendre la valeur $-\infty$, on note $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$ l'espace des formes u de bidegré (p, q) à coefficients localement de carré intégrable avec

$$\|u\|^2_\varphi=\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi}\, dV<+\infty,$$

dV étant la mesure de Lebesgue sur C^n.

Théorème 1. *Soit φ une fonction plurisousharmonique dans Ω. Pour toute $f\in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi+(st+1)\chi)$ telle que $\bar\partial f=0$, il existe alors un système $(h_1, \cdots, h_m)$ tel que*

$$h_i\in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi+st\chi), \qquad \bar\partial h_i=0 \quad (i=1, \cdots, m),$$

$$\sum_i F_i h_i=f, \qquad et \sum_i \|h_i\|^2_{\varphi+st\chi}\leqq \frac{s}{s-1}\|f\|^2_{\varphi+(st+1)\chi}.$$

Pour le démontrer, en poursuivant les raisonnements de Skoda, on voit qu'il suffit de montrer le

Théorème 2. *Soit X un ensemble analytique de dimension complexe$\leqq n-1$ dans un ouvert D de C^n. Soient $u\in L^2_{(p,q)}(D$, loc) et $v\in L^2_{(p,q+1)}(D$, loc). Si l'on a $\bar\partial u=v$ dans $D\backslash X$ au sens des distributions, alors on l'a dans D tout entier.*

On peut montrer le théorème 2 d'après le théorème de Fubini, la formule de Green-Stokes et la régularisation de Friedrichs.

2. D'après le théorème 1 et le théorème 2.2.1′ d'Hörmander [1], on peut montrer le

Théorème 3. *Soit φ une fonction plurisousharmonique dans Ω admettant e^α pour borne inférieure pour sa plurisousharmonicité, α étant une fonction réelle continue dans Ω. Supposons $q\geqq 1$. Alors, pour tout système $(f_1, \cdots, f_m)$ tel que*

$$f_i\in L^2_{(p,q)}(\Omega, \alpha+\varphi+st\chi),$$
$$\bar\partial f_i=0 \ (i=1, \cdots, m), \quad et \quad \textstyle\sum_i F_i f_i=0,$$

il existe un système $(u_1, \cdots, u_m)$ *tel que*

$$u_i \in L^2_{(p,q-1)}(\Omega, \varphi+st\chi), \quad \bar{\partial}u_i=f_i \ (i=1, \cdots, m), \quad \sum_i F_i u_i=0,$$

$$et \quad \sum_i \|u_i\|^2_{\varphi+st\chi} \leqq \frac{2}{q} \frac{2s-1}{s-1} \sum_i \|f_i\|^2_{\alpha+\varphi+st\chi}.$$

3. Le théorème suivant est un théorème de cohomologie à estimation L^2 et à valeurs dans le faisceau des germes de m formes de bidegré (p, q), $\bar{\partial}$-fermées et donnant une relation linéaire homogène entre les F_i. Soit $\mathfrak{L}^2_{(p,q)}$ le faisceau des germes d'éléments de $L^2_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc})$.

Théorème 4. *Soient* φ, σ *et* τ *des fonctions plurisousharmoniques dans* Ω. *Supposons que* σ *est continue, que* φ *admet* $e^{-\sigma}$ *pour borne inférieure pour sa plurisousharmonicité et qu'on a* $\sigma+\tau \geqq 0$ *et* $r \geqq 1$. *Soit* $\mathfrak{A}=(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *un recouvrement dénombrable de* Ω *satisfaisant aux conditions suivantes*:

(i) *chaque* U_λ *est un ouvert pseudoconvexe dans* Ω;

(ii) *il existe un entier* N *tel que tout point de* Ω *appartienne à au plus* N *ouverts de* $\mathfrak{A}$;

(iii) *il existe une partition de l'unité* $\sum_\lambda w_\lambda=1$ *de classe* C^1, *subordonnée à* $\mathfrak{A}$ *et telle que* $\sum_\lambda |\bar{\partial}w_\lambda|^2 \leqq e^\tau$ *dans* Ω.

Alors, pour tout système $(f_1, \cdots, f_m)$ *tel que*

$$f_i \in C^r(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}^2_{(p,q)}), \quad \delta f_i=0, \quad \bar{\partial}f_i=0,$$
$$\|f_i\|_{\varphi+st\chi} < +\infty \ (i=1, \cdots, m), \quad et \quad \sum_i F_i f_i=0,$$

il existe un système $(u_1, \cdots, u_m)$ *tel que*

$$u_i \in C^{r-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}^2_{(p,q)}), \quad \delta u_i=f_i, \quad \bar{\partial}u_i=0 \ (i=1, \cdots, m),$$
$$\sum_i F_i u_i=0, \quad et \quad \sum_i \|u_i\|^2_{r(\sigma+\tau)+\varphi+st\chi} \leqq M \sum_i \|f_i\|^2_{\varphi+st\chi},$$

où δ *est l'opérateur de cobord et* M *est une constante positive dépendant seulement de* n, N, r *et* s.

Dans la démonstration du théorème 4, le théorème 3 joue un rôle fondamental. En prenant soin de l'opérateur de multiplication $(f_i)\mapsto\sum_i F_i f_i$, on peut démontrer le théorème tout parallèlement à la démonstration d'Hörmander (pp. 114–116 de [1]).

4. En formulant le théorème suivant, on met en ordre les choses à faire pour le problème d'extension à croissance. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes.

Théorème 5. *Conservons les notations et les hypothèses du théorème* 4. *En outre, soit* ψ *une fonction plurisousharmonique dans* Ω, *telle que* $\psi \geqq 3(\sigma+\tau)+\varphi+(st+1)\chi$ *dans* Ω. *Alors, pour toute cochaîne* $g=(g_\lambda) \in C^0(\mathfrak{A}, \mathcal{O})$ *vérifiant* $\|g\|_\psi < +\infty$ *et* $\|\delta g\|_{\varphi+(st+1)\chi} < +\infty$, *il existe une fonction* G, *holomorphe dans* Ω *et telle que l'on ait*

$$G=g_\lambda-\sum_i F_i h_{i,\lambda} \text{ dans chaque } U_\lambda, \text{ et}$$
$$\|G\|^2_\psi \leqq 2\|g\|^2_\psi+M\|\delta g\|^2_{\varphi+(st+1)\chi},$$

où $h_{i,\lambda}$ *est une fonction holomorphe dans* U_λ *et* M *est une constante* *positive dépendant seulement des n, N et s.*

5. D'après le théorème 5, établi en vertu du théorème 4, on peut montrer un théorème d'extension à croissance qui généralise le théorème de Leontev [3] pour $m=n=1$ et celui de Nishimura [4] pour $m=1$, n: quelconque. Pour ceci, on introduit une famille Φ de fonctions plurisousharmoniques dans Ω, dite *famille contrôleuse sur* Ω, telle que l'on puisse trouver une fonction ρ réelle continue dans Ω, une fonction σ plurisousharmonique continue $\geqq 0$ dans Ω et un entier $K \geqq 2$, satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) toute $\varphi \in \Phi$ vérifie $\varphi \geqq 1$, $\varphi \geqq \rho$, $\varphi \geqq \sigma$, et $\int_\Omega e^{-\varphi} dV < +\infty$ et elle admet $e^{-\sigma}$ pour borne inférieure pour sa plurisousharmonicité dans Ω;

(ii) si $z'=(z'_1, \cdots, z'_n) \in \Omega$, $z''=(z''_1, \cdots, z''_n) \in C^n$ et $|z'_i - z''_i| \leqq e^{-\rho(z')}$ $(i=1, \cdots, n)$, alors on a $z'' \in \Omega$ et $\varphi(z'') \leqq K\varphi(z')$ quelle que soit $\varphi \in \Phi$;

(iii) si $\varphi_j \in \Phi$, $M_j > 0$ $(j=1, \cdots, J < +\infty)$ et $M \geqq 0$, alors il existe une $\varphi \in \Phi$ telle que $\varphi \geqq M + \sum_j M_j \varphi_j$.

Cela posé, le résultat principal est le suivant:

Théorème 6. *Soit g une fonction holomorphe sur la sous-variété X des zéros communs aux F_i. Supposons $1 \leqq m \leqq n$ et qu'il existe une $\varphi \in \Phi$ telle que l'on ait*

$$|F_i| \leqq e^{\varphi} \text{ dans } \Omega \ (i=1, \cdots, m),$$
$$|dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_m| \geqq e^{-\varphi} \text{ sur } X \text{ et } |g| \leqq e^{\varphi} \text{ sur } X.$$

Sous ces hypothèses, il existe une fonction G, holomorphe dans Ω et telle que l'on ait

$$G=g \quad \text{sur } X \text{ et } \quad |G| \leqq e^{\psi} \quad \text{dans } \Omega,$$

où $\psi \in \Phi$ est indépendante de g.

Pour le démontrer, on construit un recouvrement ouvert de Ω dont les ouverts rectangulaires deviennent de plus en plus petits suivant que s'augmente une certaine fonction de Φ, déterminée par φ, mais ne deviennent pas trop petits, puisqu'il faut une grandeur qui assure l'existence d'une partition de l'unité, subordonnée au recouvrement et majorée en gradient. En étendant la fonction g à chaque ouvert du recouvrement d'une façon triviale dans la direction transversale à X, on évalue la norme de cette extension locale et la norme de son cobord avec certains poids, ce qui nous permettra d'y appliquer le théorème 5.

6. On a une infinité de familles contrôleuses sur C^n, de la manière suivante:

On part de la fonction plurisousharmonique $\varphi_0(z) = 1 + \log(1+|z|^2)^2$. Pour chaque $k=1, 2, \cdots$, soit $p_k(t)$ une fonction réelle de classe C^2 convexe d'une variable réelle t pour $t \geqq 1$, avec $p_k(1) \geqq 1$ et $p'_k(1) > 0$, par exemple e^{ct} $(c>0)$ ou t^c $(c>1)$. Pour ces fonctions, on choisit convenablement une suite (a_k) de réels positifs assez grands et on pose $\varphi_k(z) = a_k p_k(\varphi_{k-1}(z))$. Alors, pour chaque $k \geqq 0$, on aura une famille contrôleuse Φ_k formée des fonctions $a\varphi_k$, a étant une constante$\geqq 1$.

$\Omega \neq \boldsymbol{C}^n$ étant général, on se donne une famille contrôleuse Φ^* sur $\boldsymbol{C}^n$. Soit $R(z)$ la distance polycylindrique de $z \in \Omega$ à la frontière de Ω et soit ψ l'une des $\max\{1, -\log R\}$ et R^{-c} ($c>0$). On voit aisément que les fonctions $a\psi+\varphi^*$, avec une constante $a>0$ et $\varphi^* \in \Phi^*$, forment une famille contrôleuse sur Ω.

Les démonstrations de ces résultats seront publiées ultérieurement.

Références

[1] L. Hörmander: L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator. Acta Math., **113**, 89–152 (1965).

[2] ——: Generators for some rings of analytic functions. Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 943–949 (1967).

[3] A. F. Leontev: On the interpolation of the class of entire functions of finite ordre. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **56**, 785–787 (1948).

[4] Y. Nishimura: Problème d'extension dans la théorie des fonctions entières d'ordre fini. J. Math. Kyoto Univ., **20**, 635–650 (1980).

[5] H. Skoda: Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids. Ann. Sci. Éc. Nor. Sup., 4e sér., **5**, 545–579 (1972).