15. *Sur le problème de Cauchy pour une classe de systèmes faiblement hyperboliques dans une classe de Gevrey*

Par Shigeo TARAMA
Section de Mathématique et Physique appliquées,
Université de Kyoto

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Feb. 12, 1980)

1. Introduction. On considère le problème de Cauchy pour les systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante. Ce problème a été déjà traité par plusieurs articles (voir p. ex. Y. Demay [1], D. Gourdin [2], V. M. Petkov [8], H. Yamahara [10]). Mais la variance de la structure de la matrice caractéristique cause la difficulté à obtenir la condition assez générale et simple pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans l'espace C^∞ (voir W. Matsumoto [4]). Dans cet article on considère ce problème dans une classe de Gevrey et on cherche la condition suffisante sous une forme simple.

2. Définitions et résultat. Soit T un nombre réel strictement positif. Soit s un nombre réel tel que $s \geq 1$. On dit que $f \in G^{(s)}$ si $f \in C^\infty([0, T] \times R^n)$ et que, pour tout sous-ensemble compact K de R^n et pour tout entier positif m, il existe une constante A telle que pour tous les multi-indices α

$$\sum_{i=0}^{m} |D_x^\alpha D_t^i f(t, x)| \leq A^{|\alpha|+1} |\alpha|!^s \qquad (t, x) \in [0, T] \times K.$$

Soit P un opérateur différential matriciel à 2 lignes, 2 colonnes, et à premier ordre:

$$P = D_t - \sum_{i=1}^{n} A_i(t, x) D_{x_i} + B(t, x)$$

où A_i et B sont les matrices carrées d'ordre 2; et on pose $D_t = -i\partial/\partial_t$ et $D_{x_k} = -i\partial/\partial_{x_k}$.

On suppose que P satisfasse aux hypothèses suivantes:

[H, 0] $\rho(\tau, \xi, t, x) = \det\left(I_2\tau - \sum_{i=1}^{n} A_i(t, x)\xi_i\right)^{*)}$ a la décomposition que voici; pour tous $(t, x, \xi) \in [0, T] \times R^n \times R^n$ $\rho(\tau, \xi, t, x) = (\tau - \lambda(t, x, \xi))^2$ où $\lambda(t, x, \xi)$ est réel.

[H, s] (où $s \geq 1$) Tous les éléments de A_i et de B appartiennent à $G^{(s)}$, et tous les éléments de A_i sont bornés sur $[0, T] \times R^n$.

On dit que le problème de Cauchy pour P est s-bien posé si et

*) I_2 est la matrice unité d'ordre 2.

seulement si pour toute fonction $f \in G^{(s)}$ il existe une et une seule fonction $u \in G^{(s)}$ telle que

$$\text{[C]} \qquad \begin{cases} Pu = f & \textit{dans } [0,T]\times R^n \\ u(0,x)=0 & \textit{dans } R^n. \end{cases}$$

Pour ce problème on obtient le

Théorème 1. *Soit s_0 un nombre réel tel que $s_0 \geq 1$. Supposons que l'opérateur P satisfasse aux hypothèses* [H, 0] *et* [H, s_0]. *Soit s un nombre réel tel que $s \geq s_0$.*

Le problème de Cauchy pour P est s-bien posé si P remplit la condition suivante [L]:

$$\text{[L]} \qquad {}^{co}P_0 P_s {}^{co}P_0 + \frac{1}{2}{}^{co}P_0\{P_0, {}^{co}P_0\}|_{\tau=\lambda(t,x,\xi)} = 0 \qquad (t,x,\xi) \in [0,T]\times R^n \times R^n$$

où $P_0 = I_2\tau - \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\xi_i$, $P_s = B + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n D_{x_i}A_i(t,x)$; ${}^{co}P_0$ *est la matrice des cofacteurs de* P_0; *et*

$$\{P_0, {}^{co}P_0\} = \partial_\tau P_0 D_t {}^{co}P_0 - D_t P_0 \partial_\tau {}^{co}P_0 + \sum_{i=1}^n (\partial_{\xi_i} P_0 D_{x_i} {}^{co}P_0 - D_{x_i} P_0 \partial_{\xi_i} {}^{co}P_0).$$

Remarque 1. Si $1 \leq s_0 < 2$, le problème [C] est s-bien posé, où $s_0 \leq s < 2$, sans la condition [L] (voir J. Leray-Y. Ohya [3], Y. Ohya [7]).

Remarque 2. La condition [L] est la condition nécessaire pour que le problème de Cauchy pour P, qui satisfait à l'hypothèse [H, 0], soit uniformément C^∞ bien posé. Mais elle n'est pas suffisante en général (voir p. ex. W. Matsumoto [4]). W. Matsumoto [4] a montré un example pour lequel le problème [C] n'est pas C^∞ bien posé mais s-bien posé, où $s \geq 2$. Cet example était le point de départ de notre étude. W. Matsumoto étudie aussi la nécessité de la condition [L] dans une classe de Gevrey (voir W. Matsumoto [5]).

3. Démonstration du Théorème 1. On suppose que P satisfasse aux hypothèses [H, 0] et [H, s_0] et à la condition [L]. On voit aisément que $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\xi_i$, où λ est défini dans l'hypothèse [H, 0]. Alors, par changement de coordonnés, on peut supposer que $\lambda \equiv 0$. Dans la suite on le suppose.

Remarque 3. Soit $A(t,x,\xi) = \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\xi_i$. Au cas où $\lambda \equiv 0$, on a $A\{A, A\} = 0$, et la condition [L] est équivalente à

$$A(t,x,\xi)\left(B(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n D_{x_k}A_k(t,x)\right)A(t,x,\xi) + A(t,x,\xi)D_tA(t,x,\xi) = 0.$$

On définit à la façon inductive les opérateurs suivants; posons

$$P_1(=P) = D_t - \sum_{i=1}^n A_i(t,x)D_{x_i} + B(t,x)$$

$$Q_1 = D_t + \sum_{i=1}^n A_i(t,x)D_{x_i} + \sum_{i=1}^n D_{x_i}A_i(t,x) + B(t,x)$$

$$R\Big(=\frac{1}{2}(P_1+Q_1)\Big)=D_t+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}D_{x_i}A_i(t,x)+B(t,x).$$

Ensuite on pose $P_k=P_{k-1}Q_{k-1}$ et $Q_k=2\overbrace{RR\cdots R}^{2k-1}-P_k$ où $k=2,3,\cdots$. Alors on a la

Proposition 2. *L'opérateur P_k a la forme suivante:*

$$P_k=\sum_{i=0}^{2k-1}A_i(t,x)D_t^{2k-1-i}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=0}^{2k-1-k}B_{s,j}(t,x)D_{x_s}D_t^{2k-1-k-j}$$

où $A_0(t,x)=I_2$.

Remarque 4. L'opérateur Q_1 remplit les hypothèses [H, 0] et [H, s_0] et la condition [L] vu la Remarque 3.

D'après J.Leray-Y. Ohya [3] ou V. A. Sočneva-V. R. Fridlender [9], on sait la

Proposition 3. *Soit*

$$U=I_2D_t^{k+m}+\sum_{i=1}^{k+m}A_i(t,x)D_t^{k+m-i}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}B(t,x)_{k,j}D_t^{m-j}D_{x_k}$$

où A_i et $B_{k,j}$ sont des matrices carées d'ordre 2 dont les éléments appartiennent à $G^{(s_0)}$.

Alors, au cas où $k>s_0$, le problème de Cauchy pour l'opérateur U est s-bien posé, où $k>s\geq s_0$.

Démonstration du Théorème 1. Compte tenu des Propositions 2 et 3, on peut montrer le Théorème 1. Soit k un entier tel que $k>s\geq s_0$. Et on pose $u=Q_1Q_2\cdots Q_{k-1}v$, alors le problème [C] se transforme en suivant:

$$[\mathrm{C}_k]\qquad\begin{cases}P_kv=f\\ D_t^iv(0,x)=0\qquad i=0,1,\cdots,2^{k-1}-1.\end{cases}$$

D'après les Propositions 2 et 3, le problème [C_k] est s-bien posé. Ce montre l'existence de la solution dans $G^{(s)}$. En notant que l'opérateur formellement adjoint ${}^tP$ de P satisfait aussi aux hypothèses [H, 0] et [H, s_0] et à la condition [L], on voit l'existence de la solution du problème de Cauchy, avec la donnée nulle sur le plan: $t=T$, pour ${}^tP$, d'où découle l'unicité de la solution du problème [C]. Ce qui achève la démonstration.

4. Preuve de la Proposition 2. On désigne par L^k l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre k sur R^n avec un paramètre t (voir L. Nirenberg [6] en ce qui concerne leurs définitions et propriétés).

Soit $\Omega=[0,T]\times R^n\times S^{n-1}$ où S^{n-1} est la sphère unité à dimension $n-1$. Posons $\Omega_1=\{(t,x,\xi)\in\Omega\,|\,A(t,x,\xi)\neq0\}$, $\Omega_2=\{(t,x,\xi)\in\Omega\,|\,A(t,x,\xi)=0\}$ et $\mathring{\Omega}_2$; l'intérieur de Ω_2; où $A(t,x,\xi)$ est défini à la Remarque 3.

Remarque 5. $\Omega=\overline{\Omega}_1\cup\mathring{\Omega}_2$.

D'après l'hypothèse [H, 0], pour chaque point $(t_0,x_0,\xi_0)\in\Omega_1$, il existe les opérateurs pseudo-différentiels matriciels à l'ordre zéro M et N, tels que

1) $MN-I,\ NM-I \in \mathrm{L}^{-\infty}$.

2) Le symbole principal de $M(t,x,D_x)A(t,x,D_x)N(t,x,D_x)$ est $\begin{bmatrix} 0 & \alpha(t,x,\xi) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ au voisinage conique de (t_0, x_0, ξ_0). Alors la condition [L] et la Remarque 4 impliquent que

$$MP_1N = A_1D_t + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + A_2,\quad MQ_1N = B_1D_t + \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + B_2$$

$$\text{et } MRN = C_1D_t + C_2,$$

où, au voisinage conique de (t_0, x_0, ξ_0), A_i, B_i et $C_i \in \mathrm{L}^0$ $(i=1,2)$; et $A_1 - I$, $B_1 - I$ et $C_1 - I \in \mathrm{L}^{-\infty}$; et le $(2,1)$ élément de A_2, B_2 et de $C_2 \in \mathrm{L}^{-1}$ (voir W. Matsumoto [4], H. Yamahara [10]).

En général on obtient le

Lemme 4. *Pour* $k=1,2,\cdots$,

$$MP_kN = \sum_{i=2^{k-1}-k+1}^{2^{k-1}} A_i(t,x,D_x)D_t^i + \sum_{i=0}^{2^{k-1}-k} B_i(t,x,D_x)D_t^i$$

$$MQ_kN = \sum_{i=2^{k-1}-k+1}^{2^{k-1}} C_i(t,x,D_x)D_t^i + \sum_{i=0}^{2^{k-1}-k} E_i(t,x,D_x)D_t^i$$

où, au voisinage conique de (t_0, x_0, ξ_0), A_i, $C_i \in \mathrm{L}^0$ *et* B_i, $E_i \in \mathrm{L}^1$; *et* $B_i + E_i \in \mathrm{L}^0$; *et le* $(2,1)$ *élément de* A_i, B_i, C_i *et de* $E_i \in \mathrm{L}^{-1}$; *et les* $(1,1)$ *et* $(2,2)$ *éléments de* B_i *et de* $E_i \in \mathrm{L}^0$.

Compte tenu du Lemme 4 et de la Remarque 5, on peut montrer la Proposition 2. C.Q.F.D.

Références

[1] Y. Demay: Le problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques doubles. C. R. Acad. Sci. Paris, **278**, 771–773 (1974).

[2] D. Gourdin: Les opérateurs faiblement hyperboliques matriciels à caractéristiques de multiplicités constantes, bien décomposables et le problème de Cauchy non caractéristique associé. J. Math. Kyoto Univ., **17**, 539–566 (1977).

[3] J. Leray et Y. Ohya: Systèmes linéaires hyperboliques non stricts. Colloque sur l'analyse fonctionnelle 2, Liège C.N.R.B., 105–144 (1964).

[4] W. Matsumoto: On the conditions for the hyperbolicity of systems with double characteristic roots (à paraître).

[5] ——: (En préparation.)

[6] L. Nirenberg: Lectures on linear partial differential equations. Regional Conference Ser. Math., no. 17 (1972).

[7] Y. Ohya: Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristiques multiples. J. Math. Soc. Japan, **16**, 268–286 (1964).

[8] V. M. Petkov: Le problème de Cauchy et la propagation des singularités pour une classe des systèmes hyperboliques non symétrisables. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz exposé, no. 5 (1974–1975).

[9] V. A Součeva and V. R. Fridlender: The Cauchy problem for multidimensional linear systems over Gevrey spaces. Math. USSR Sbornik, **8**, 249–

273 (1969).
[10] H. Yamahara: On the Cauchy problem for weakly hyperbolic systems. Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., **12**, 493–512 (1976).