49. Quelques remarques sur un article de M.N. Coburn intitulé " A characterization of Schouten's and Hayden's deformation methods ".*

Par Kentaro YANO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., June 12, 1945.)

§ 0. *Introduction.* M.N. Coburn[1] a, en 1940, publié une Note qui donne une interprétation géométrique des deux méthodes pour étudier les problèmes de la déformation infinitésimale, l'une celle de M.J.A. Schouten[2] et l'autre celle de M.H.A. Hayden.[3] Après avoir énoncé son résultat principal dans le premier Paragraphe qui fait l'introduction, il donne, dans le deuxième Paragraphe, les lois générales de déformation des repères, des vecteurs arbitraires et des éléments linéaires

En spécialisant ensuite les lois de déformations, il étudie, dans le troisième et le quatrième Paragraphes, la variation absolue de M.J.A. Schouten et la déformation directe de M.H.A. Hayden. Ce qu'il appelle la variation absolue de M.J.A. Schouten est la differentielle de Lie d'après la terminologie de M.D. van Dantzig.[4]

Dans le cinquième Paragraphe, il étudie la variation absolue de M.J.A. Schouten ou la differentielle de Lie $D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ de la connexion affine $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

La méthode de M.N. Coburn pour obtenir la $D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ est essensiellement la même que celle de MM.P. Dienes[5] et E.T. Davies.[6]

Comme l'a déjà montré M. W. Slebodzinski la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace à connexion affine admette une transformation isomorphe affine est que la differentielle de Lie de la connexion affine soit nulle.

---

* La dépense de cette recherche fut réglée par le frais du Ministère de l'Instruction Publique pour les recherches scientifiques.

1) N. Coburn: A characterization of Schouten's and Hayden's deformation methods. Journal of the London Math. Soc., **15** (1940), 123–136.

2) J. A. Schouten et D. J. Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, I, II. P. Noordhoff, Groningen, 1935, 1938.

3) H. A. Hayden: Infinitesimal deformations of a subspace in a general metrical space. Proc. London Math. Soc., **37** (1934), 416–440.

4) D. van Dantzig: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, II. Proc. Kon. Akad. Amsterdam, **35** (1932), 535–542.

5) P. Dienes: On the deformation of tensor manifolds. Proc. London Math. Soc., **37** (1934), 512–519.

6) E. T. Davies: On the infinitesimal deformations of a space. Annali di Mat., **12** (1934), 145–151.

Dans le dernier Paragraphe de sa Note, M.N. Coburn pose une condition sur $D\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ qui est moins forte que celle de M.W. Slebodzinski[1] et en étudie quelques conséquences.

Le but de cette Note est de donner quelques remarques sur cet article de M.N. Coburn.

§ 1. Considérons d'abord un espace L_n à n dimensions à connexion affine et prenons, à chaque point $\boldsymbol{M}$ de cet espace, un repere naturel e_λ, alors, la connexion affine de cet espace peut s'exprimer par les formules

$$(1.1)\qquad d\boldsymbol{M}=dx^{\lambda}e_{\lambda}\,,\quad de_{\mu}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)dx^{\nu}e_{\lambda}\,.$$

Cela posé, considérons ensuite une déformation infinitésimale

$$(1.2)\qquad \bar{x}^{\lambda}=x^{\lambda}+\xi^{\lambda}dt$$

qui déplace le point x^{λ} jusqu'au point $x^{\lambda}+\xi^{\lambda}dt$ infiniment voisin, ξ^{λ} étant un champ de vecteur défini dans tout espace ou dans une certaine région de l'espace et dt une quantité infinitésimale dont on ne tiendra compte que du premier ordre.

Le point $\boldsymbol{M}$ étant déplacé jusqu'au point $\overline{\boldsymbol{M}}$, le repère naturel e_λ attaché au point $\boldsymbol{M}$ sera changé en un repère naturel $\bar{e}_\lambda$ attaché au point $\overline{\boldsymbol{M}}$.

Le repère e_λ étant naturel, on a

$$(1.3)\qquad d\overline{\boldsymbol{M}}=d\bar{x}^{\lambda}\bar{e}_{\lambda}\,,\quad d\bar{e}_{\mu}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\bar{x})d\bar{x}^{\nu}\bar{e}_{\lambda}$$

Pour trouver la variation de e_λ, posons

$$(1.4)\qquad \bar{e}_{\lambda}=e_{\lambda}+\overset{v}{\delta}e_{\lambda}\,,$$

et substituons (1.2) et (1.4) dans (1.3), alors, on trouvera

$$d\overline{\boldsymbol{M}}=d\boldsymbol{M}+(dx^{\lambda}\overset{v}{\delta}e_{\lambda}+d\xi^{\lambda}dte_{\lambda})\,,$$

d'où

$$(1.5)\qquad \overset{v}{\delta}d\boldsymbol{M}=(dx^{\lambda}\overset{v}{\delta}e_{\lambda}+d\xi^{\lambda}dte_{\lambda}),$$

en posant

$$(1.6)\qquad d\overline{\boldsymbol{M}}=d\boldsymbol{M}+\overset{v}{\delta}d\boldsymbol{M}\,.$$

Cela étant, la variation absolue de M.J.A. Schouten est caractérisée par le fait que

$$(1.7)\qquad \overset{v}{\delta}d\boldsymbol{M}=0\,.$$

En effet, en supposant que le champ de vecteur ξ^{λ} soit défini dans tout espace, on a, dans ce cas, de l'équation (1.5),

$$(1.8)\qquad \overset{v}{\delta}e_{\lambda}=-\xi^{\alpha}{}_{,\lambda}dte_{\alpha}\,,$$

la virgule désignant la dérivée partielle par rapport à la variable x^{λ}.

Par conséquent, si l'on prend un vecteur contrevariant $v=v^{\lambda}e_{\lambda}$, sa variation est donnée par

1) W. Slebodzinski: Sur les transformations isomorphiques d'une variété à connexion affine. Prace Mat. Fiz. Warszawa, **40** (1932), 55–62.

$$\overset{v}{\delta} v = (\overset{v}{\delta} v^\lambda - \xi^\lambda{}_{,\alpha} v^\alpha dt) e_\lambda ,$$

d'où

(1.9)
$$\overset{v}{\delta} v = (v^\lambda{}_{,\alpha} \xi^\alpha - \xi^\lambda{}_{,\alpha} v^\alpha) dt \, e_\lambda$$

en remarquant que

$$\overset{v}{\delta} v^\lambda = v^\lambda{}_{,\alpha} \xi^\alpha dt .$$

La variation

(1.10)
$$D v^\lambda = (v^\lambda{}_{,\alpha} \xi^\alpha - \xi^\lambda{}_{,\alpha} v^\alpha) dt$$

est la variation absolue de M.J.A. Schouten ou la différentielle de Lie du vecteur contrevariant v^λ. D'après cette notation, l'équation $\overset{v}{\delta} d\boldsymbol{M} = 0$ qui caractérise la différentielle de Lie sera écrite

(1.11)
$$D dx^\lambda = 0 .$$

Or, pour trouver la variation absolue ou la différentielle de Lie d'un vecteur covariant u_μ, nous supposons que la variation absolue ou la différentielle de Lie obéit à la même loi que celle de différentielle ordinaire et la première coincide avec la dernière pour un scalaire quelconque (N. Coburn, Theoreme 1). En effet, $u_\mu v^\mu$ étant un scalaire, on a

$$D(u_\mu v^\mu) = d(u_\mu v^\mu) ,$$

par suite

$$(D u_\mu) v^\mu + u_\mu (D v^\mu) = [(u_{\mu,\nu} \xi^\nu) v^\mu + u_\mu (v^\mu{}_{,\nu} \xi^\nu)] dt ,$$

d'où, en substituant (1.10) dans cette équation, on trouve

(1.12)
$$D u_\mu = [u_{\mu},{}_\nu \xi^\nu - \xi^\alpha{}_{,\mu} u_\alpha] dt .$$

Les équations (1.11) et (1.12) sont celles qui donnent les variations absolues ou les différentielles de Lie d'un vecteur contrevariant et d'un vecteur covariant.

Il sera facile de généraliser ces formules pour un tenseur général.

Si l'on considère un sous-espace $x^\lambda = x^\lambda(x^i)$ à m dimensions ($a, b, c, \dots , i, j, k, \dots = \dot{1}, \dot{2}, \dots , \dot{m}$), le repère naturel e_a pour ce sous-espace est donné par

(1.13)
$$e_a = B_a^{\cdot\,\lambda} e_\lambda , \qquad \left(B_a^{\cdot\,\lambda} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^a} \right) .$$

La variation $\overset{v}{\delta} e_a$ de e_a sera donnée par

(1.14)
$$\begin{aligned} \overset{v}{\delta} e_a &= (\overset{v}{\delta} B_a^{\cdot\,\lambda}) e_\lambda - B_a^{\cdot\,\alpha} \xi^\lambda{}_{,\alpha} dt e_\lambda \\ &= [\overset{v}{\delta} B_a^{\cdot\,\lambda} - \xi^\lambda{}_{,a} dt] e_\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

en vertu de la relation

(1.15)
$$\overset{v}{\delta} B_a^\lambda = \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^a} + \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^a} dt \right) - \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^a} = \xi^\lambda{}_{,a} dt .$$

Donc, d'après la définition de D, on a

(1.16)
$$D B_a^{\cdot\,\lambda} = 0 .$$

Cette équation peut être obtenu aussi de (1.11) en la divisant par dx^a. En effet, le point de l'espace ambiant étant déplacé par (1.2), le point $x^\lambda(x^a)$ du sous-espace est déplacé en $x^\lambda(x^a)+\xi^\lambda(x^a(x^a))dt$, mais ces deux points ont tous les deux les mêmes coordonnées x^a sur deux surfaces originales et déformée, donc, on a $Ddx^a=0$. Par conséquent, on a (1.16) de (1.11).

§ 2. La variation $\overset{v}{\delta} d\boldsymbol{M}$ étant donnée par

$$\overset{v}{\delta} d\boldsymbol{M}=(dx^\lambda \overset{v}{\delta} e_\lambda + d\xi^\lambda dt e_\lambda),$$

on a supposé, dans le Paragraphe précédent, que $\overset{v}{\delta} d\boldsymbol{M}=0$ et on a obtenu $\overset{v}{\delta} e_\lambda = -\xi^a{}_{,\lambda} dt e_a$. Dans le présent Paragraphe, nous allons supposer que e_μ soient déformés par le parallélisme de l'espace à connexion affine, soit,

$$\overset{v}{\delta} e_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\xi^\nu dt e_\lambda. \tag{2.1}$$

Ce fait est caractéristique pour la déformation directe de M.H.A. Hayden (N. Coburn, Theorème 2).

Alors, la déformation d'un vecteur contrevariant

$$\boldsymbol{v}=v^\lambda e_\lambda$$

sera donnée par

$$\overset{v}{\delta} \boldsymbol{v}=(dv^\lambda+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}v^\mu\xi^\nu dt)e_\lambda. \tag{2.2}$$

En posant

$$\Delta v^\lambda = dv^\lambda+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}v^\mu\xi^\nu dt, \tag{2.3}$$

on voit que la déformation directe de M.H.A. Hayden coincide avec la différentielle covariante dans la direction ξ^λ.

D'après cette notation, $\overset{v}{\delta} d\boldsymbol{M}$ étant donnée par

$$\overset{v}{\delta} d\boldsymbol{M}=[d\xi^\lambda+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\xi^\mu dx^\nu+S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}dx^\mu\xi^\nu]dte_\lambda,$$

on a

$$\Delta dx^\lambda=\delta\xi^\lambda+S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}dx^\mu\xi^\nu, \tag{2.4}$$

δ désignant la différenttielle covariante et $S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ le tenseur de torsion.

Si l'on considère un sous-espace $\overset{*}{x}{}^\lambda=x^\lambda(x^i)$, la variation du repère naturel e_a pour le sous-espace est donnée par

$$\begin{aligned}\overset{v}{\delta} e_a &= (\overset{v}{\delta} B_a^{\cdot\,\lambda})e_\lambda - B_a^{\cdot\,\mu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\xi^\nu dt e_\lambda \\ &=(\xi^\lambda{}_{,a}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\xi^\mu B_a^{\cdot\,\nu}+S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}B_a^{\cdot\,\mu}\xi^\nu)dte_\lambda.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Donc, d'après la définition de l'opérateur Δ, on a

$$\Delta B_a^{\cdot\,\lambda}=\xi^\lambda{}_{;a}+S^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}B_a^{\cdot\,\mu}\xi^\nu, \tag{2.6}$$

le point-virgule désignant la dérivée covariante.

§ 3. Nous allons, dans ce Paragraphe, considérer la variation absolue ou la différentielle de Lie de la connexion affine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ de l'espace.

En substituant

$$\bar{e}_\mu = e_\mu - \xi^\lambda{}_{,\mu} dt e_\lambda$$

et

$$d\bar{x}^\nu = dx^\nu + \xi^\nu{}_{,\tau} dx^\tau dt$$

dans (1.3), on trouve

$$de_\mu - \xi^\lambda{}_{,\mu,\nu} dx^\nu dt e_\lambda - \xi^\alpha{}_{,\mu} \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} dx^\nu dt e_\lambda$$
$$= \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\bar{x})(dx^\nu + \xi^\nu{}_{,\tau} dx^\tau dt)(e_\lambda - \xi^\alpha{}_{,\lambda} dt e_\alpha).$$

En posant

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\bar{x}) - \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\bar{x}) = D\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

on trouve, de cette équation,

$$D\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = [\xi^\lambda{}_{,\mu,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\omega}\xi^\omega - \xi^\lambda{}_{,\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \xi^\alpha{}_{,\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} + \xi^\alpha{}_{,\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}]dt, \tag{3.2}$$

ou sous une forme tensorielle,

$$D\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = [(\xi^\lambda{}_{;\mu} + S^{\lambda}_{\cdot\mu\omega}\xi^\omega)_{;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega]dt. \tag{3.3}$$

Cela étant, nous allons considérer l'interprétation géométrique de la variation absolue ou la différentielle de Lie de la connexion affine.

Considérons d'abord un vecteur $v^\lambda(x)$ en x^λ et un vecteur $\bar{v}^\lambda(x+dx)$ en $x^\lambda+dx^\lambda$ parallèle à $v^\lambda(x)$ en x^λ par rapport à la connexion affine originale $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$. On déplace ensuite, d'après la déformation infinitésimale (1.2), les vecteurs $v^\lambda(x)$ en x^λ et $\bar{v}^\lambda(x+dx)$ en $x^\lambda+dx^\lambda$ jusqu'aux points $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda dt$ et $\bar{x}^\lambda + d\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda dt + d(x^\lambda + \xi^\lambda dt)$ respectivement. Alors, on obtiendra les vecteurs $\bar{v}^\lambda(\bar{x})$ en $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda dt$ et $\bar{\bar{v}}^\lambda(x+dx)$ en $\bar{x}^\lambda + d\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda dt + d(x^\lambda + \xi^\lambda dt)$.

Cela posé, les formules (1.3) nous assurent que les vecteurs $\bar{v}^\lambda(\bar{x})$ et $\bar{\bar{v}}^\lambda(x+dx)$ sont parallèles par rapport à la connexion affine variée. Ce fait a été premièrement remarqué par MM.P. Dienes[1] et E.T. Davies[2].

Le fait précédent peut s'expliquer aussi de la manière suivante: On transporte d'une part le vecteur $v^\lambda(x)$ en x^λ du point x^λ jusqu'au point $x^\lambda+dx^\lambda$ parallèlement par rapport à la connexion affine originale et ensuite déplace d'après la déformation infinitésimale (1.2) le vecteur $\bar{v}^\lambda(x+dx)$ ainsi obtenu du point $x^\lambda+dx^\lambda$ jusqu'au point $x^\lambda+dx^\lambda+\xi^\lambda(x+dx)dt = x^\lambda+dx^\lambda+\xi^\lambda dt + d\xi^\lambda dt$, et on déplace d'autre part, d'après la déformation infinitésimale (1.2), le vecteur $\bar{v}^\lambda(x)$ en x^λ du point x^λ jusqu'au point $x^\lambda+\xi^\lambda dt$ et ensuite on transporte le vecteur $\bar{v}^\lambda(x+\xi dt)$ ainsi obtenu du point $x^\lambda+\xi^\lambda dt$ jusqu'au point $x^\lambda+\xi^\lambda dt + d(x^\lambda+\xi^\lambda dt) = x^\lambda + \xi^\lambda dt + dx^\lambda + d\xi^\lambda dt$ par rapport à la connexion affine variée. Alors, les vecteurs ainsi obtenus en points $x^\lambda + dx^\lambda + \xi^\lambda dt + d\xi^\lambda dt$ coincident. Ceci explique bien le Théorème 3 de M.N. Coburn.

Ce fait peut s'exprimer aussi par la formule

1) P. Dienes: On the deformation of tensor manifolds. Proc. London Math. Soc., **37** (1934), 512–519.

2) E. T. Davies: On the infinitesimal deformation of a space! Annali di Mat., **12** (1933–1934), 145–151.

$$(3.4)\qquad v^\lambda+\delta v^\lambda+D(v^\lambda+\delta v^\lambda)=v^\lambda+Dv^\lambda+\bar{\delta}(v^\lambda+Dv^\lambda)\,,$$

$\bar{\delta}$ désignant la dérivée covariante par rapport à la connexion affine variée.

D'après (3.1), on a

$$(3.5)\qquad \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(x)=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)+D\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,.$$

Donc, l'équation (3.4) peut s'écrire

$$\begin{aligned}&v^\lambda+\delta v^\lambda+D(v^\lambda+\delta v^\lambda)\\&=v^\lambda+Dv^\lambda+\delta(v^\lambda+Dv^\lambda)+(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})(v^\mu+\delta v^\mu)dx^\nu\,,\end{aligned}$$

d'où

$$(3.6)\qquad D\delta v^\lambda-\delta Dv^\lambda=(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})v^\mu dx^\nu\,,$$

ou, en remarquant que $Ddx^\lambda=0$,

$$(3.7)\qquad D(v^\lambda{}_{;\nu})-(Dv^\lambda)_{;\nu}=(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})v^\mu\,.$$

Les formules correspondantes pour un vecteur covariant et un tenseur sont

$$(3.8)\qquad D(u_{\mu;\nu})-(Du_\mu)_{;\nu}=-(D\Gamma^\lambda_{\mu\nu})u_\lambda$$

et

$$(3.9)\qquad D(T^\lambda_{\bullet\mu\nu;\omega})-(DT^\lambda_{\bullet\mu\nu})_{;\omega}=(D\Gamma^\lambda_{\alpha\omega})T^\alpha_{\bullet\mu\nu}-(D\Gamma^\alpha_{\mu\omega})T^\lambda_{\bullet\alpha\nu}-(D\Gamma^\alpha_{\nu\omega})T^\lambda_{\bullet\mu\alpha}\,.$$

Ce sont les formules de M.W. Slebodzinski. La méthode adoptée ici est due à M.N. Coburn.

§ 4. Dans le sixième Paragraphe de l'article cité, M.N. Coburn donne le Théorème 4:

Dans un espace métrique au tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, si $Dg_{\mu\nu}$ a les directions principales dont les valeurs propres sont toutes différentes, et si la condition

$$(4.1)\qquad g_{\alpha\nu}(D\Gamma^\alpha_{\mu\omega})+g_{\mu\alpha}(D\Gamma^\alpha_{\nu\omega})=0$$

est satisfaite, l'espace admet le parallélisme absolu.

Le point essentiel de la démonstration de M.N. Coburn est l'équation

$$(4.2)\qquad (Dg_{\mu\nu})_{;\omega}=0\,,$$

qu'il déduit de (4.1).

Remarquons que l'équation (4.2) peut être facilement déduite de l'équation (4.1) en appliquant la formule générale (3.9) au tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$.

En effet, en appliquant la formule générale (3.9) au tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, on trouve

$$D(g_{\mu\nu;\omega})-(Dg_{\mu\nu})_{;\omega}=-(D\Gamma^\lambda_{\mu\omega})g_{\lambda\nu}-(D\Gamma^\lambda_{\nu\omega})g_{\mu\lambda}\,.$$

Mais on a $g_{\mu\nu;\omega}=0$. Donc, en tenant compte de la condition (4.1), on a bien (4.2).

Le theorème 7 de M.N. Coburn est une généralization du Theorème précédent.

§ 5. Dans le dernier Théorème de l'article en question, M.N. Coburn dit que:

Si la déformation d'un espace métrique est un mouvement, et si la condition (4.1) est satisfaite, la différentielle de Lie des symboles de Christoffel s'annule.

Mais, il nous semble que la condition (4.1) n'est pas nécessaire pour cet énoncé.

En effect, le tenseur fondamental contrevariant varié étant donné par

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + Dg_{\mu\nu}\,, \tag{5.1}$$

le tenseur fondamental covariant varié est donné par

$$\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - g^{\mu\beta} g^{\nu\tau}(Dg_{\beta\tau})\,. \tag{5.2}$$

Cela étant, les symboles de Christoffel variés $\overline{\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}}$ sont donnés par

$$\overline{\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\lambda\alpha}(\bar{g}_{\alpha\mu,\nu} + \bar{g}_{\alpha\nu,\mu} - \bar{g}_{\mu\nu,\alpha})\,. \tag{5.3}$$

En substituant (5.1) et (5.2) dans (5.3), on trouve

$$D\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}[(Dg_{\alpha\mu})_{;\nu} + (Dg_{\alpha\nu})_{;\mu} - (Dg_{\mu\nu})_{;\alpha}]dt\,, \tag{5.4}$$

en posant

$$\overline{\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}} = \{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} + D\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}\,.$$

Cela étant, le fait qu'un espace métrique admet un mouvement est exprimé par la formule

$$Dg_{\mu\nu} = 0\,. \tag{5.5}$$

Donc, si un espace métrique admet un mouvement, la variation des symboles de Christoffel est evidemment nulle.

Remarquons enfin que l'équation

$$D\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} = 0 \tag{5.6}$$

peut être déduite de (4.1). En effet, de l'équation (4.1) on déduit (4.2). Donc, on en tire (5.6).