

45. Zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete, II.

Von Yûsaku KOMATU.

Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 12, 1945.)

A. Einige spezielle Abbildungsfunktionen. (Fortsetzung.)¹⁾

7. Grunskysche Spezialfunktion $g(z; z_0)$.

Grunsky hat in seiner schönen Arbeit²⁾ verschiedene tiefliegende Resultate bezüglich der konformen Abbildung allgemeiner endlich-vielfach zusammenhängender Gebiete hergeleitet, mit welchen wir uns später näher im Einzelnen beschäftigen wollen. Darin spielen gewisse spezielle Funktionen die wichtige Rolle von Extremalfunktionen. Wir sollen zuerst u. a. die von ihm eingeführte Funktion $g(z; z_0)$ bei unsrem Falle des zweifach zusammenhängenden normalen Grundgebiets R spezialisieren.

Die im R analytische Funktion $g(z; z_0)$ mit einem Parameter $z_0 (q < |z_0| < 1)$ werde definitionsgemäß durch folgende Eigenschaften charakterisiert: sie verhalte sich in R regulär und eindeutig, verschwinde nirgends bis auf eine einzige einfache Nullstelle z_0 , besitze ferner konstante Absolutbeträge auf beiden Randperipherien $|z|=q$ und $|z|=1$, welche mit H_0 bzw. H_1 bezeichnet werden sollen, und werde schließlich an z_0 so normiert, daß ihr erster Laurentscher Koeffizient an z_0 gleich 1 sei, d. h. in unsrem Falle $z_0 \neq \infty$ so, daß $g'(z_0; z_0)=1$ sei.

Für derartige Funktionenklasse bleibt noch eine Willkürlichkeit übrig, nämlich die Umlaufzahlen π_0 und π_1 bezüglich $|z|=q$ bzw. $|z|=1$:

$$\pi_0 = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=q} d \arg g(z; z_0), \quad \pi_1 = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} d \arg g(z; z_0).$$

Da aber jede Funktion $g(z; z_0)$ eine einzige einfache Nullstelle besitzen muß und folglich das Bildgebiet von R immer den Punkt $\omega=0$ gerade einmal überdecken muß, so bleibt dazwischen die Relation

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

notwendig bestehen. Sie enthält also weiter im wesentlichen einen einzigen Parameter. Bezeichnen wir insbesondere beide speziellen Funktionen unter ihnen,

1) I. Proc. **21** (1945), 285.

2) H. Grunsky, Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Schriften d. math. Sem. u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin **1** (1932-3), 95-140.

für welche $1 - \pi_0 = \pi_1 = 0$ oder $\pi_0 = 1 - \pi_1 = 0$ gilt, mit $g^{(0)}(z; z_0)$ bzw. $g^{(1)}(z; z_0)$, dann läßt sich die allgemeinste Funktion mit den Parametern $\pi_0, \pi_1 = 1 - \pi_0$ in der Gestalt

$$g(z; z_0) = g^{(0)}(z; z_0)^{\pi_0} g^{(1)}(z; z_0)^{\pi_1}$$

liefern. Daß diese Funktion $g(z; z_0)$ sich tatsächlich, durch ihre Eindeutigkeit, Normierungsbedingungen an $z_0: g(z_0; z_0) = 0$ und $g'(z_0; z_0) = 1$, Konstanz ihres Absolutbetrags auf Randperipherien sowie durch den Wert des zugehörigen Parameters etwa π_0 , ganz eindeutigerweise charakterisieren läßt, kann man hierbei auf ganz ähnliche Schlußweise zeigen wie am Anfang von § 3. Um zur expliziten Darstellung der betreffenden Funktion zu gelangen, wollen wir jetzt von der in § 1 eingeführten Funktion

$$f^*(z; z_\infty; e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1}) \equiv \exp f(z; z_\infty; \alpha_0, \alpha_1) \\ = e^{\alpha_1} z^{(2i\eta_3 \lg |z_\infty| - (\alpha_1 - \alpha_0)) / \lg q} \frac{\sigma(i \lg z_\infty) \sigma_3\left(i \lg \frac{z_\infty z}{q}\right)}{\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_\infty}\right) \sigma_3\left(i \lg \frac{z_\infty}{q}\right)}$$

ausgehen. Da die bis auf den Punkt z_∞ reguläre Funktion $f(z; z_\infty; \alpha_0, \alpha_1)$, deren reeller Teil mit einer verallgemeinerten Greenschen Funktion zusammenfällt, nur einen rein imaginären Periodizitätsmodul besitzen kann, so bekommt die Funktion $f^*(z; z_\infty; e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1})$ bei der Substitution: $\lg z \mid \lg z + 2\pi i$ einen Faktor mit dem Absolutbetrag 1; dieser Faktor ist zwar, wie schon in § 1 gesehen wurde, gleich

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{\lg q} (\lg |z_\infty| - (\alpha_1 - \alpha_0))\right).$$

Andererseits hat die Funktion $f(z; z_\infty; \alpha_0, \alpha_1)$ eine logarithmische Verzweigungsstelle an z_∞ , und jeder Zweig der Summe $f(z; z_\infty; \alpha_0, \alpha_1) + \lg(z - z_\infty)$ verhält sich sogar regulär in einer Umgebung von z_∞ . Dementsprechend besitzt jeder Zweig der Funktion

$$f_*(z, z_0; m_0, m_1) = f^*\left(z; z_0; \frac{1}{m_0}, \frac{1}{m_1}\right)^{-1}$$

eine einfache Nullstelle z_0 , und ihr Absolutbetrag besitzt die konstanten Randwerte:

$$|f_*(z; z_0; m_0, m_1)| = \begin{cases} m_0 & (|z| = q), \\ m_1 & (|z| = 1). \end{cases}$$

Deshalb erhalten wir durch Normieren dieser Funktion gewiß eine Funktion $g(z; z_0)$, d. h.

$$g(z; z_0) = \frac{f_*(z; z_0; m_0, m_1)}{f_*(z_0; z_0; m_0, m_1)}.$$

Die Umlaufzahlen der soeben gefundenen Funktion $g(z; z_0)$ läßt sich leicht ausrechnen. Wir erhalten nämlich, unter Berücksichtigung der Eindeutigkeit von $\Re f$, nacheinander

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=q} d \arg f_*(z; z_0; m_0, m_1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=q} df \left(z; z_0; \frac{1}{m_0}, \frac{1}{m_1} \right) = \lg \frac{m_1 |z_0|}{m_0} / \lg q, \\ \pi_1 &= 1 - \pi_0 = \lg \frac{m_0 q}{m_1 |z_0|} / \lg q.\end{aligned}$$

Da der explizite Ausdruck für f^* schon gefunden worden ist, kann auch die Funktion g ohne weiteres explizit dargestellt werden. Zuerst ergibt sich nämlich die Darstellung

$$f_*(z; z_0; m_0, m_1) = m_1 z^{-\left(2i\eta_3 \lg(q^{-\frac{1}{2}} |z_0|) + \lg \frac{m_1}{m_0}\right) / \lg q} \frac{\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_0}\right) \sigma_3\left(i \lg \frac{z_0}{q}\right)}{\sigma\left(i \lg z_0\right) \sigma_3\left(i \lg \frac{z_0 z}{q}\right)}.$$

Beachten wir weiter die oben gefundene Relation

$$\lg \frac{m_1}{m_0} = \pi_0 \lg q - \lg |z_0| = -\frac{\pi_1 - \pi_0}{2} \lg q - \lg \left(q^{-\frac{1}{2}} |z_0|\right),$$

so wird der Exponent von z in dieser Darstellung, mittels der Legendreschen Relation, in die Gestalt

$$-\left(2i\eta_3 \lg \left(q^{-\frac{1}{2}} |z_0|\right) + \lg \frac{m_1}{m_0}\right) / \lg q = -\frac{2\eta_1}{\pi} \lg |z_0| - \pi_0$$

umgeschrieben, und somit gelangen wir schließlich zur gesuchten expliziten Darstellung:

$$\begin{aligned}g(z; z_0) &= -iz_0 \left(\frac{z}{z_0}\right) - \frac{2\eta_1}{\pi} \lg \left(q^{-\frac{1}{2}} |z_0|\right) \\ &\quad + \frac{\pi_1 - \pi_0}{2} \frac{\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_0}\right) \sigma_3\left(i \lg \frac{|z_0|^2}{q}\right)}{\sigma_3\left(i \lg \frac{z_0 z}{q}\right)} \\ &= -iz_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{2\eta_1 \lg |z_0| - \pi_0}{\pi}} \frac{\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_0}\right) \sigma\left(i \lg |z_0|^2\right)}{\sigma\left(i \lg \frac{z_0 z}{q}\right)}.\end{aligned}$$

Die Randwerte des Absolutbetrages von $g(z; z_0)$ bleiben definitionsgemäß auf jeder Peripherie konstant und also gleich

$$H_0 = |g(q; z_0)| \quad \text{bzw.} \quad H_1 = |g(1; z_0)|.$$

Da bei unserem Falle die Formeln

$$\sigma(i \lg \bar{z}_0 q) = -e^{-2\eta_1 \lg \bar{z}_0} \sigma\left(i \lg \frac{\bar{z}_0}{q}\right) \quad \text{und} \quad \left| \sigma\left(i \lg \frac{\bar{z}_0}{q}\right) \right| = \left| \sigma\left(i \lg \frac{q}{z_0}\right) \right|$$

gelten, so erhalten wir

$$H_0 = q^{-\pi_0} |z_0|^{2 + \frac{2\eta_1}{\pi} \lg |z_0| + \pi_0} |\sigma(i \lg |z_0|^2)|$$

und

$$H_1 = |z_0|^{2 + \frac{2\eta_1}{\pi} \lg |z_0| + \pi_0} |\sigma(i \lg |z_0|^2)|,$$

woraus unmittelbar die merkwürdige Relation

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{q^{\pi_0}}{|z_0|}$$

folgt. Nebenbei bemerkt, ist die Größe $\sigma(i \lg |z_0|^2)$ rein imaginär, und sogar besitzt sie einen negativen Imaginärteil; es gilt also

$$|\sigma(i \lg |z_0|^2)| = i \sigma(i \lg |z_0|^2).$$

Wir erwähnen hierbei noch eine Bemerkung, daß die soeben gefundene Relation für H_1/H_0 im wesentlichen nichts anderes als die schon angegebene Relation

$$\pi_0 = \lg \frac{m_1 |z_0|}{m_0} / \lg q \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{m_0} = \frac{q^{\pi_0}}{|z_0|};$$

denn nach der Herleitung muß die Gleichung $H_1/H_0 = m_1/m_0$ gelten.

8. Abbildungsfunktion auf ein Kreisinnere mit einem Kreisbogen-schlitz.

Wir sollen nun zeigen, daß die in § 7 explizit dargestellte Funktion

$$\omega = g^{(0)}(z; z_0) = -iz_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-\frac{2\eta_1}{\pi} \lg |z_0| - 1} \frac{\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_0}\right) \sigma(i \lg |z_0|^2)}{\sigma(i \lg \bar{z}_0 z)}$$

den Kreisring R auf das Kreisinnere $|\omega| < H_0^{(0)}$ mit einem Schlitz auf $|\omega| = H_1^{(0)}$ derart abbildet, daß die Normierungsbedingungen

$$g^{(0)}(z_0; z_0) = 0, \quad g^{(0)'}(z_0; z_0) = 1$$

erfüllt werden und die Urrandkomponente $|z| = q$ in die ganze Peripherie $|\omega| = H_0^{(0)}$ übergeht; hierbei bezeichnen wir mit $H_0^{(0)}$ und $H_1^{(0)}$ natürlich die Größen, welche aus H_0 bzw. H_1 durch Einsetzen von $\pi_0 = 1$ entstehen, d. h.

$$H_0^{(0)} = q^{-1} |z_0|^{2 + \frac{2\eta_1}{\pi} \lg |z_0|} |\sigma(i \lg |z_0|^2)|,$$

$$H_1^{(0)} = |z_0|^{2 + \frac{2\eta_1}{\pi} \lg |z_0|} |\sigma(i \lg |z_0|^2)|.$$

Die Funktion $\omega = \omega_b^{(0)}(z; z_0)$, welche R auf ein Gebiet, das durch Aufschlitzen von $|\omega| < 1$ längs eines auf $|\omega| = \frac{\alpha}{|z_0|}$ liegenden Bogens entsteht, derart abbildet,

daß $z = z_0$ und $z = q$ in $\omega = 0$ bzw. $\omega = 1$ übergehen, muß daher durch

$$\omega_b^{(0)}(z; z_0) = \frac{g^{(0)}(z; z_0)}{g^{(0)}(q; z_0)}$$

geliefert werden. Insbesondere gilt also

$$|\omega_b^{(0)'}(z; z_0)| = \frac{1}{H_0^{(0)}}.$$

Zum Beweise bemerken wir zuerst, daß jeder Zweig der Funktion

$$A(z) = \lg \frac{\omega_b^{(0)}(z; z_0)}{g^{(0)}(z; z_0)}$$

sich überall in R regulär und sogar eindeutig verhält. Es bleibt also überall beschränkt, und sein reeller Teil nimmt auf $|z|=q$ sowie $|z|=1$ konstante Randwerte. Da zwei zur imaginären Achse parallele Strecken endlicher Länge nie ein beschränktes Gebiet abgrenzen kann, so muß $A(z) \equiv \text{konst.}$ sein, woraus die Behauptung ohne weiteres folgt.

Es läßt sich in ganz ähnlicher Weise beweisen, daß die Funktion

$$\omega = \omega_b^{(1)}(z; z_0) = \frac{g^{(1)}(z; z_0)}{g^{(1)}(1; z_0)}$$

wiederum die Abbildung von R auf einen längs eines Kreisbogens um $\omega=0$ aufgeschlitzten ω -Einheitskreis vermittelt. Hierbei entsprechen doch beide vollen Peripherien $|z|=1$ und $|\omega|=1$ voneinander, und überdies geht $z=1$ in $\omega=1$ über. Und der Schlitzbogen liegt auf $|\omega|=|z_0|$. Insbesondere gilt hierbei

$$|\omega_b^{(1)'}(z_0; z_0)| = \frac{1}{H_1^{(1)}}.$$

Wir bemerken hier noch, daß zwischen beiden soeben betrachteten Abbildungsfunktionen offenbar die Funktionengleichung

$$\omega_b^{(1)}\left(\frac{q}{z}; \frac{q}{z_0}\right) \equiv \omega_b^{(0)}(z; z_0)$$

bestehen muß, was mittels der schon gefundenen analytischen Ausdrücke für diese beiden Funktionen auch unmittelbar leicht bestätigt werden kann.

Man könnte solche Abbildungsfunktionen auch auf ähnlichem Wege wie in § 4 oder § 6 direkt konstruieren. Wir erwähnen aber hierbei eine noch andere Methode, die Bestimmung dieser Funktionen auf die der Kreisbogenschlitzabbildungsfunktion zurückführen zu lassen. Betrachten wir nämlich etwa die Funktion $\omega_b^{(0)}(z; z_0)$. Sie kann offenbar über die Randperipherie $|z|=q$ hinaus in den benachbarten Kreisring $q^2 < |z| < q$ analytisch fortgesetzt werden, und bildet den damit entstandenen größeren Kreisring $q^2 < |z| < 1$ auf ein Kreisbogen-

schlitzgebiet derart ab, daß z_0 und $\frac{q^2}{\bar{z}_0}$ in 0 bzw. ∞ übergehen. Deshalb läßt

sie sich darstellen in der Gestalt

$$\omega_b^{(0)}(z; z_0) = \frac{\omega_k\left(z; \frac{q^2}{\bar{z}_0}, z_0 \mid q^2\right)}{\omega_k\left(q; \frac{q^2}{\bar{z}_0}, z_0 \mid q^2\right)};$$

hierbei steht der Nenner rechts nur für die Normierung an $z=q$, und der Parameter ist, wie ausdrücklich hinzugeschrieben ist, q^2 , anstatt q in § 4, zu setzen.

Die Funktion $\omega_b^{(1)}(z; z_0)$ läßt sich auch in derselben Methode erledigen, und man erhält etwa das Resultat

$$\omega_b^{(1)}(z; z_0) = \frac{\omega_k\left(qz; \frac{q}{\bar{z}_0}, qz_0 \mid q^2\right)}{\omega_k\left(q; \frac{q}{\bar{z}_0}, qz_0 \mid q^2\right)}.$$

Das Übereinstimmen beider oben hergeleiteten Gestalten für $\omega_b^{(0)}(z; z_0)$ bzw. $\omega_b^{(1)}(z; z_0)$ kann mittels der Formel über Duplikation einer primitiven Periode direkt bestätigt.

9. Abbildungsfunktion von R auf Kreisinnere mit einem Radial-schlitz.

Nebst der im vorigen Paragraphen angegebenen Funktion ω , weist diejenige Funktion

$$\omega = \omega_s(z; z_0)$$

oft gewisse Extremaleigenschaften auf, welche R auf ein längs eines Schlitzes auf einem Radius $\arg \omega = \chi$ aufgeschlitztes Einheitskreisinnere abbildet. Wir erlegen ihr wiederum die Normierungsbedingung auf

$$\omega_s(z_0; z_0) = 0,$$

und bezeichnen diejenigen Abbildungsfunktionen, welche insbesondere $z=q$ bzw. $z=1$ in $\omega=1$ überführen, mit $\omega_s^{(0)}(z; z_0)$ bzw. $\omega_s^{(1)}(z; z_0)$; durch diese Bedingung über die Ränderzuordnung werden beide Funktionen ganz eindeutigerweise charakterisiert.

Um parallel mit beiden letzten Paragraphen fortzufahren, versuchen wir zuerst die Funktion

$$\omega = \mathfrak{h}^{(0)}(z; z_0); \quad \mathfrak{h}^{(0)}(z_0; z_0) = 0, \quad \mathfrak{h}^{(0)'}(z_0; z_0) = 1,$$

zu bestimmen, welche sich bis auf das Randverhalten

$$|\mathfrak{g}^{(0)}(z; z_0)| = m^{(0)} (|z| = q) \quad \text{und} \quad \arg \mathfrak{h}^{(0)}(z; z_0) = \chi^{(0)} (|z| = 1)$$

ganz ähnlich verhält wie $g^{(0)}(z; z_0)$.

Nach dem Spiegelungsprinzip läßt sich die Funktion $\mathfrak{h}^{(0)}(z; z_0)$ in die punktierte Ebene $0 < |z| < \infty$ analytisch fortsetzen, und genügt den Funktionalgleichungen

$$\mathfrak{h}^{(0)}\left(\frac{q^2}{z}\right) = \frac{m^{(0)2}}{\mathfrak{h}^{(0)}(z)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{h}^{(0)}\left(\frac{1}{z}\right) = e^{2ix^{(0)}} \mathfrak{h}^{(0)}(z),$$

woraus weiter die Gleichungen

$$\mathfrak{h}^{(0)}\left(\frac{z}{q^2}\right) = \frac{m^{(0)2} e^{2ix^{(0)}}}{\mathfrak{h}^{(0)}(z)} \quad \text{und also} \quad \mathfrak{h}^{(0)}\left(\frac{z}{q^4}\right) = \mathfrak{h}^{(0)}(z)$$

folgen. Die Nullpunkte dieser Funktion sind sämtlich einfach und liegen an

$$q^{4n} z_0, \quad \frac{q^{4n}}{z_0} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

ihre Pole sind auch sämtlich einfach und sind an

$$q^{4n+2} z_0, \quad \frac{q^{4n+2}}{z_0} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

gelegt. Daher liegen gerade je zwei solche Punkte im Kreisringe

$$q^2 < |z| < \frac{1}{q^2},$$

nämlich

$$z_0, \quad \frac{1}{\bar{z}_0} \quad \text{und} \quad \frac{q^2}{z_0}, \quad \frac{z_0}{q^2}.$$

Schreiben wir nun der Einfachheit halber $\omega(z) = \mathfrak{h}^{(0)}(z; z_0)$, so sieht man sofort ein, daß die folgenden Beziehungen bestehen müssen:

$$\omega'(z_0) = 1, \quad \omega'\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right) = -e^{2ix^{(0)}} \bar{z}_0^{-5};$$

$$\text{Res} \left[\frac{q^2}{\bar{z}_0} \right] = -\frac{m^{(0)2} q^2}{\bar{z}_0^2}, \quad \text{Res} \left[\frac{z_0}{q^2}; \omega \right] = \frac{m^{(0)2} e^{2ix^{(0)}}}{q^2}.$$

Andererseits setzen wir, mittels der Substitution $w = i \lg z$ oder $z = e^{-iw}$, wiederum

$$\mathcal{Q}(w) = \omega(e^{-iw}),$$

dann verhält sich die Funktion $\mathcal{Q}(w)$ offenbar eindeutig und meromorph und befriedigt die Funktionalgleichungen

$$\mathcal{Q}(w + 2\pi) = \mathcal{Q}\left(w + 4i \lg \frac{1}{q}\right) = \mathcal{Q}(w).$$

Sie ist also eine elliptische Funktion, deren fundamentales Periodenparallelogramm

$$0 < \Re w < 2\pi (= 2\omega_1), \quad -2 \lg \frac{1}{q} < \Im w < 2 \lg \frac{1}{q} \left(= \frac{\omega_2}{i} \right)$$

sein mag. Die darin enthaltenen Null- und Unendlichkeitsstellen sind ebenfalls sämtlich einfach und liegen an

$$w_0 = i \lg z_0, \quad \bar{w}_0 = i \lg \frac{1}{\bar{z}_0} \quad \text{bzw.} \quad \bar{w}_0 - \omega_3 = i \lg \frac{q^2}{\bar{z}_0}, \quad w_0 + \omega_3 = i \lg \frac{z_0}{q^2}.$$

Nebenbei bemerkt, gelten hierbei folgende weitere Beziehungen:

$$\Omega'(w_0) = -iz_0, \quad \Omega'(\bar{w}_0) = ie^{2ix^{(0)}} \bar{z}_0;$$

$$\text{Res} [w_0 - \omega_3; \Omega] = -\frac{im^{(0)2}}{\bar{z}_0}, \quad \text{Res} [w_0 + \omega_3; \Omega] = \frac{im^{(0)2} e^{2ix^{(0)}}}{z_0}.$$

Insbesondere können wir daraus nach einem Satze von Liouville die Relation

$$0 = -\frac{im^{(0)2}}{\bar{z}_0} + \frac{im^{(0)2} e^{2ix^{(0)}}}{z_0} \quad \text{oder} \quad \chi^{(0)} = \arg z_0$$

entnehmen. Betrachten wir noch die Funktion

$$\lg \left[\frac{q^2 - \bar{z}_0 z}{q(z - z_0)} \omega(z) \right],$$

so verhält sich jeder Zweig regulär und eindeutig. Also genügt sie der Monodromiebedingung

$$\int_0^{2\pi} \lg \left[\frac{q^2 - \bar{z}_0 e^{i\theta}}{q(e^{i\theta} - z_0)} \omega(e^{i\theta}) \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \lg \left[\frac{q^2 - \bar{z}_0 e^{i\theta}}{q e^{i\theta} - z_0} \omega(q e^{i\theta}) \right] d\theta,$$

woraus man bei unsrem Falle die Relation

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lg |\omega(e^{i\theta})| - i \arg \omega(q e^{i\theta})) d\theta = \lg \frac{m^{(0)} q}{|z_0|} - i\chi^{(0)}$$

entnimmt.

Nun betrachten wir die sich im oben genannten Rechtecke eindeutig und regulär verhaltende Funktion

$$F(w) = \Omega(w) \frac{\sigma(w - \bar{w}_0 + \omega_3 | q^2) \sigma(w - w_0 - \omega_3 | q^2)}{\sigma(w - w_0 | q^2) \sigma(w - \bar{w}_0 | q^2)};$$

hierbei beziehen sich alle σ -Funktionen auf diejenigen mit dem Parameter q^2 anstatt q . Aus den die Doppelperiodizität von $\Omega(w)$ darstellenden Funktionalgleichungen erhalten wir die entsprechenden Gleichungen für $F(w)$, welche lauten:

$$F(w + 2\pi) = F(w) \exp \left[-2\eta_1 \{ (w - w_0 + \pi) + (w - \bar{w}_0 + \pi) - (w - \bar{w}_0 + \pi) - (w - w_0 + \pi) \} \right] = F(w),$$

$$F(w + 4i \lg q) = F(w) \exp \left[-2\eta_3 \left\{ \left(w - w_0 + 2i \lg \frac{1}{q} \right) + \left(w - \bar{w}_0 + 2i \lg \frac{1}{q} \right) - \left(w - w_0 + 2i \lg \frac{1}{q} \right) - \left(w - \bar{w}_0 + 2i \lg \frac{1}{q} \right) \right\} \right] = F(w).$$

Daher ist $F(w)$ wiederum doppeltperiodisch, und also ist eine elliptische Funktion. Da aber $F(w)$ sich überall in ihrem fundamentalen Periodenparallelo-

gramm überall regulär verhält, so muß sie identisch konstant sein. Gehen wir wieder in die ursprüngliche z -Ebene zurück, dann erhalten wir zuerst den Ausdruck

$$\omega(z) = \mathcal{Q}(i \lg z) C = \frac{\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_0} \mid q^2\right) \sigma\left(i \lg \bar{z}_0 z \mid q^2\right)}{\sigma_3\left(i \lg \bar{z}_0 z \mid q^2\right) \sigma_3\left(\frac{z}{z_0} \mid q^2\right)};$$

die Konstante C wird hierbei durch die Normierungsbedingung an z_0 festgestellt, und somit läßt sich die volle Gestalt von $\mathfrak{h}^{(0)}(z; z_0)$ bestimmen. Wir sehen nämlich nacheinander

$$1 = \mathfrak{h}^{(0)'}(z_0; z_0) = C \frac{i}{z_0} \frac{\sigma(i \lg |z_0|^2 \mid q^2)}{\sigma_3(i \lg |z_0|^2 \mid q^2) \sigma_3(0 \mid q^2)} \quad (\sigma_3(0 \mid q^2) = 1);$$

$$\mathfrak{h}^{(0)}(z; z_0) = \frac{z_0}{i} \frac{\sigma_3(i \lg |z_0|^2 \mid q^2) \sigma(i \lg \bar{z}_0 z \mid q^2) \sigma\left(\frac{z}{z_0} \mid q^2\right)}{\sigma(i \lg |z_0|^2 \mid q^2) \sigma_3(i \lg \bar{z}_0 z \mid q^2) \sigma_3\left(i \lg \frac{z}{z_0} \mid q^2\right)}.$$

Die Abbildungsfunktion $\mathfrak{h}^{(1)}(z; z_0)$, welche die Bedingungen

$$\mathfrak{h}^{(1)}(z_0; z_0) = 0, \quad \mathfrak{h}^{(1)'}(z_0; z_0) = 1;$$

$$\arg \mathfrak{h}^{(1)}(z; z_0) = \chi^{(1)}(|z| = q), \quad |\mathfrak{h}^{(1)}(z; z_0)| = m^{(1)}(|z| = 1)$$

erfüllt und sonst sich ganz ähnlich wie $\mathfrak{g}^{(1)}(z; z_0)$ verhält, läßt sich gewonnen entweder ganz ähnlich wie oben oder mittels der sofort nachweisbaren Relation

$$\mathfrak{h}^{(1)}(z; z_0) = -\frac{z_0^2}{q} \mathfrak{h}^{(0)}\left(\frac{q}{z}; \frac{q}{z_0}\right).$$

Wir gelangen somit zur Darstellung

$$\mathfrak{h}^{(1)}(z; z_0) = \frac{z_0}{i} \frac{\sigma(i \lg |z_0|^2 \mid q^2) \sigma_3(i \lg \bar{z}_0 z \mid q^2) \sigma\left(i \lg \frac{z}{z_0} \mid q^2\right)}{\sigma_3(i \lg |z_0|^2 \mid q^2) \sigma(i \lg \bar{z}_0 z \mid q^2) \sigma_3\left(i \lg \frac{z}{z_0} \mid q^2\right)}.$$

Hierbei gilt die Relation

$$\chi^{(1)} = \arg(-z_0),$$

was man wie oben nachweisen kann; aber daß diese Relation sowie auch die oben angegebene entsprechende Relation bestehen müssen, folgt mehr unmittelbar auch aus den fast ersichtlichen Gleichungen

$$\mathfrak{h}^{(0)}(z; z_0) = \frac{z_0}{|z_0|} \mathfrak{h}^{(0)}\left(\frac{\bar{z}_0 z}{|z_0|}; |z_0|\right)$$

und

$$\mathfrak{h}^{(1)}(z; z_0) = -\frac{z_0}{|z_0|} \mathfrak{h}^{(1)}\left(-\frac{\bar{z}_0 z}{|z_0|}; -|z_0|\right).$$

Beide Größen $m^{(0)}$ und $m^{(1)}$ lassen sich andererseits durch

$$m^{(0)} = |\mathfrak{h}^{(0)}(q; z_0)| \quad \text{und} \quad m^{(1)} = |\mathfrak{h}^{(1)}(1; z_0)|$$

liefern, und Endpunkte der Bildschlitze bei $\omega = \mathfrak{h}^{(0)}(z; z_0)$ und $\omega = \mathfrak{h}^{(1)}(z; z_0)$ liegen natürlich an den Nullstellen der Ableitungen der betreffenden Funktionen.

Nachdem beide Funktionen $\mathfrak{h}^{(0)}$ und $\mathfrak{h}^{(1)}$ in expliziter Gestalt gewonnen worden sind, dann erhalten wir sofort die gesuchten Darstellungen für $\omega_s^{(0)}$ und $\omega_s^{(1)}$. Wir haben dafür nämlich nur zu setzen:

$$\omega_s^{(0)}(z; z_0) = \frac{\mathfrak{h}^{(0)}(z; z_0)}{\mathfrak{h}^{(0)}(q; z_0)} \quad \text{und} \quad \omega_s^{(1)}(z; z_0) = \frac{\mathfrak{h}^{(1)}(z; z_0)}{\mathfrak{h}^{(1)}(1; z_0)}.$$

Zum Schluß bemerken wir, daß diese beiden Funktionen auch durch das ähnliche Verfahren, wie das am Ende des vorigen Paragraphen angegebene, aus der die Radialschlitzabbildung vermittelnden Funktion sofort hergeleitet werden. Wir erhalten somit etwa

$$\omega_s^{(0)}(z; z_0) = \frac{\omega_r\left(z; \frac{q^2}{z_0}, z_0 \mid q^2\right)}{\omega_r\left(q; \frac{q^2}{z_0}, z_0 \mid q^2\right)}$$

und

$$\omega_s^{(1)}(z; z_0) = \frac{\omega_r\left(qz; \frac{q}{z_0}, qz_0 \mid q^2\right)}{\omega_r\left(q; \frac{q}{z_0}, qz_0 \mid q^2\right)}.$$

Es ist leicht nachweisbar, daß das hier angegebene Resultat wesentlich mit dem oben gefundenen übereinstimmt; man berücksichtige dabei etwa die allgemein gültige Formel

$$\omega(u \pm \omega_s) = \pm e^{\pm \mathfrak{h}_s u} \sigma(\omega_s) \sigma_s(u).$$

10. Grunskysche Extremalfunktion $i_\alpha(z; z_0, z_\infty)$.

Die spezielle Abbildungsfunktion $i_\alpha(z; z_0, z_\infty)$, welche auch von Grunsky in seiner oben zitierten Arbeit²⁾ eingeführt worden ist und in konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete verschiedene Extremaleigenschaften aufweist, läßt sich bei unsrem Falle explizit darstellen. Sie vermittelt dabei die Abbildung von R auf ein Schlitzgebiet, welches dadurch entsteht, daß man die volle Bildebene längs irgend zwei Bogen auf den logarithmischen Spiralen aufschlitzt, jede von denen den Koordinatenursprung als asymptotischen Punkt besitzt und allen davon ausgehenden Halbstrahlen mit einem konstanten Winkel $\arctan \alpha$ schneidet; dabei sollen ferner zwei vorgegebene innere Punkte z_0 und z_∞ in 0 bzw. ∞ übergehen und sogar werde eine Normierungsbedingung an z_∞ auferlegt,

daß das Residuum gerade gleich Eins sei: $\text{Res} [z_\infty; i_\alpha] = 1$.

In beiden extremen Fällen $\alpha = \infty$ und $\alpha = 0$ arten die logarithmischen Spiralen mit Neigung α in die Kreise um 0 bzw. die Halbstrahlen durch 0 aus, und also fallen die betreffenden Abbildungsfunktionen zusammen mit den schon behandelten Funktionen für Kreisbogen- bzw. Radialschlitzabbildung, d. h.

$$i_\infty(z; z_0, z_\infty) = \omega_k(z; z_\infty, z_0) \quad \text{und} \quad i_0(z; z_0, z_\infty) = \omega_r(z; z_\infty, z_0).$$

Um auch die Funktion mit allgemeiner Neigung α explizit darzustellen, setzen wir nun nach Grunsky

$$t = \tau + i\tau' = \frac{(1 + i\alpha)^2}{1 + \alpha^2} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} + i \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}$$

oder

$$\alpha = \tan \frac{\arg t}{2},$$

und ferner führen wir beide Funktionen \wp und ϱ ein mittels der Definitionsgleichungen

$$\wp(z; z_0, z_\infty) = \sqrt{i_0(z; z_0, z_\infty) i_\infty(z; z_0, z_\infty)}, \quad \text{Res} [z_\infty; \wp] = 1;$$

$$\varrho(z; z_0, z_\infty) = \sqrt{i_0(z; z_0, z_\infty) / i_\infty(z; z_0, z_\infty)}, \quad \varrho(z_\infty; z_0, z_\infty) = 1.$$

Die Funktion $i_\alpha(z; z_0, z_\infty)$ läßt sich dann durch die Relation

$$\lg i_\alpha(z; z_0, z_\infty) = \lg \wp(z; z_0, z_\infty) + t \lg \varrho(z; z_0, z_\infty), \quad \text{Res} [z_\infty; i_\alpha] = 1,$$

liefern. Die expliziten Ausdrücke für die hier angegebenen Funktionen folgen also ohne weiteres aus unsren schon gefundenen Gestalten für ω_k und ω_r . Wir erhalten in der Tat nacheinander

$$\begin{aligned} \wp(z; z_0, z_\infty) &= \frac{i}{z_\infty} \left(\frac{z}{z_\infty} \right)^{\frac{\eta_1 \lg \frac{z_\infty}{z_0}}{\pi}} \frac{\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_0}\right)}{\sigma\left(i \lg \frac{z_\infty}{z_0}\right) \sigma\left(i \lg \frac{z}{z_\infty}\right)}, \\ \varrho(z; z_0, z_\infty) &= \left(\frac{z}{z_\infty} \right)^{-\frac{\eta_1 \lg \frac{z_\infty}{z_0}}{\pi}} \frac{\sigma(i \lg |z_\infty|^2) \sigma(i \lg \bar{z}_0 z)}{\sigma(i \lg \bar{z}_0 z_\infty) \sigma(i \lg \bar{z}_\infty z)}; \\ i_\alpha(z; z_0, z_\infty) &= \frac{i}{z_\infty} \left(\frac{z}{z_\infty} \right)^{\frac{\eta_1}{\pi} \left(\lg \frac{z_\infty}{z_0} - t \lg \frac{z_\infty}{z_0} \right)} \frac{\sigma\left(i \lg \frac{z}{z_0}\right)}{\sigma\left(i \lg \frac{z_\infty}{z_0}\right) \sigma\left(i \lg \frac{z}{z_\infty}\right)} \\ &\quad \times \left(\frac{\sigma(i \lg |z_\infty|^2) \sigma(i \lg \bar{z}_0 z)}{\sigma(i \lg \bar{z}_0 z_\infty) \sigma(i \lg z_\infty z)} \right)^t. \end{aligned}$$

Wie schon § 3 und § 5 gezeigt wurde, gelten jetzt die Relationen

$$\left| \frac{i_\infty(e^{i\theta}; z_0, z_\infty)}{i_\infty(qe^{i\varphi}; z_0, z_\infty)} \right| = \left| \frac{z_\infty}{z_0} \right| \quad \text{und} \quad \arg \frac{i_0(e^{i\theta}; z_0, z_\infty)}{i_0(qe^{i\varphi}; z_0, z_\infty)} = \arg \frac{z_\infty}{z_0}$$

für alle reellen Werte von θ und φ . Da nach den Definitionen

$$\begin{aligned}\lg q(z; z_0, z_{\infty}) &= \lg i_0(z; z_0, z_{\infty}) - \lg q(z; z_0, z_{\infty}) \\ &= -\lg i_{\infty}(z; z_0, z_{\infty}) + \lg q(z; z_0, z_{\infty})\end{aligned}$$

gelten muß, so ergibt sich ferner

$$\lg q(z; z_0, z_{\infty}) = -\lg |i_{\infty}| + \lg |p| + i(\arg i_0 - \arg p) = \overline{\lg p} - \lg |i_{\infty}| + i \arg i_0,$$

woraus die weitere Beziehungen

$$\lg \frac{q(e^{i\theta}; z_0, z_{\infty})}{q(qe^{i\varphi}; z_0, z_{\infty})} = \lg \frac{p(e^{i\theta}; z_0, z_{\infty})}{p(qe^{i\varphi}; z_0, z_{\infty})} - \lg \frac{z_{\infty}}{z_0}$$

und also insbesondere

$$\begin{aligned}\left| \frac{q(e^{i\theta}; z_0, z_{\infty})}{q(qe^{i\varphi}; z_0, z_{\infty})} \right| &= \left| \frac{z_0}{z_{\infty}} \frac{p(e^{i\theta}; z_0, z_{\infty})}{p(qe^{i\varphi}; z_0, z_{\infty})} \right|, \\ \arg \frac{q(e^{i\theta}; z_0, z_{\infty})}{q(qe^{i\varphi}; z_0, z_{\infty})} &= -\arg \left(\frac{z_0}{z_{\infty}} \frac{p(e^{i\theta}; z_0, z_{\infty})}{p(qe^{i\varphi}; z_0, z_{\infty})} \right)\end{aligned}$$

entnommen werden können.

Bezeichnen wir nun die logarithmischen Spiralen, welche die Bildschlitze von $|z| = q$ und $|z| = 1$ bei der Abbildung $\omega = i_a(z; z_0, z_{\infty})$ tragen, mit

$$\arg \omega - \alpha \lg |\omega| = c_0 \quad \text{bzw.} \quad \arg \omega - \alpha \lg |\omega| = c_1,$$

dann läßt sich die Differenz beider Parameterwerte c_0 und c_1 ohne weiteres ausrechnen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}c_1 - c_0 &= \arg \frac{i_a(1; z_0, z_{\infty})}{i_a(q; z_0, z_{\infty})} - \alpha \lg \left| \frac{i_a(1; z_0, z_{\infty})}{i_a(q; z_0, z_{\infty})} \right| \\ &= \arg \frac{p(1; z_0, z_{\infty})}{p(q; z_0, z_{\infty})} + \tau' \lg \left| \frac{q(1; z_0, z_{\infty})}{q(q; z_0, z_{\infty})} \right| + \tau \arg \frac{q(1; z_0, z_{\infty})}{q(q; z_0, z_{\infty})} \\ &\quad - \alpha \left(\lg \left| \frac{p(1; z_0, z_{\infty})}{p(q; z_0, z_{\infty})} \right| + \tau \lg \left| \frac{q(1; z_0, z_{\infty})}{q(q; z_0, z_{\infty})} \right| \right. \\ &\quad \left. - \tau' \arg \frac{q(1; z_0, z_{\infty})}{q(q; z_0, z_{\infty})} \right) \\ &= (\alpha\tau - \tau') \lg \left| \frac{z_{\infty}}{z_0} \right| + (\alpha\tau' + \tau) \arg \frac{z_{\infty}}{z_0}\end{aligned}$$

oder die Relation

$$c_1 - c_0 = -\alpha \lg \left| \frac{z_{\infty}}{z_0} \right| + \arg \frac{z_{\infty}}{z_0}.$$

Beide extremen Fälle $\alpha = 0$ and $\alpha = \infty$ entsprechen den Abbildungsfunktionen ω , bzw. ω_k , und reduziert sie sich dann tatsächlich auf die Relationen

$$(c_1 - c_0)_{\alpha=0} = \arg \frac{z_{\infty}}{z_0} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{c_1 - c_0}{-\alpha} \right)_{\alpha=\infty} = \lg \left| \frac{z_{\infty}}{z_0} \right|,$$

wozu man die schon in § 5 bzw. in § 3 angegebenen äquivalenten Relationen vergleiche.