36. La géométrie des espaces métriques fondés sur la notion d'aire, II.

Par

Hideyuki IWAMOTO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Nagoya.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 26, 1945.)

1. Nous considérons le cas général dont l'intégrale fondamentale est

$$
(1.1) \qquad O=\int L\left(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}, \dots, \frac{\partial^M x^i}{\partial u^{\lambda_1}\dots\partial u^{\lambda_M}}\right) du\dots du .
$$

Pour que l'intégrale soit un invariant intégral, il faut et il suffit que

$$
(1.2) \qquad \sum_{\alpha>\beta} \binom{\alpha}{\beta} p^i_{\lambda(\alpha-\beta)\omega} \frac{\partial L}{O^i_{\lambda(\alpha-\beta)\mu(\beta-1)\nu}} = 0 \ (\beta \geqq 2), \ = \delta^\nu_\omega L \ (\beta=1)
$$

Si nous posons

$$
E_i^{\lambda(M)}{}_j^{\mu(M)} = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial p^i_{\lambda(M)}\, \partial p^j_{\mu(M)}}
$$

et[1)]

$$
E_{i_1\cdots i_H}^{\lambda_1\cdots\lambda_S}{}_{j_1\cdots j_H}^{\mu_1\cdots\mu_S} = E_{[i_1}^{(\lambda_1\cdots\lambda_M(\mu_1\cdots\mu_M}{}_{[j_1} \dots E_{j_H]i_H]}^{\cdots\mu_S)\cdots\lambda_S)} , \quad (K+H=N,\ S=M\cdot H)
$$

on obtient, d'après les relations

$$
p^i_\alpha E_i^{\lambda(M)}{}_j^{\mu(M)} = 0 :
$$

$$
E_{i_1\cdots i_H}^{\lambda_1\cdots\lambda_S}{}_{j_1\cdots j_H}^{\mu_1\cdots\mu_S} = u_{i_1\cdots i_H} u_{j_1\cdots j_H} G^{\lambda_1\cdots\lambda_S\,\mu_1\cdots\mu_S}
$$

où

$$
Lu_{i_1\cdots i_H} = \epsilon_{i_1\cdots i_H\, j_1\cdots j_K} p^{j_1\cdots j_K}
$$

Les quantités $G^{\lambda_1\cdots\lambda_S\,\mu_1\cdots\mu_S}$ seront les composantes d'un U-tenseur. Supposons, ce qui est le cas général, que le discriminant du tenseur $G^{\lambda_1\cdots\lambda_S\,\mu_1\cdots\mu_S}$ soit différent de zéro ; il viendra:

$$
G^{\lambda_1\cdots\lambda_S\,\mu_1\cdots\mu_S} = g\ g^{\lambda_1\cdots\lambda_S\,\mu_1\cdots\mu_S} ; \quad |\, g^{\lambda_1\cdots\lambda_S\,\mu_1\cdots\mu_S} \,| = (L)^{-2\binom{K+S-1}{K}}
$$

où g est un scalaire du poid 2 par rapport à la transformation des coordonnées, et $g^{\lambda_1\cdots\lambda_S\,\mu_1\cdots\mu_S}$ sont les composantes d'un U-tenseur.

Considérons la surface $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{P}_M$) définie par

$$
g_{\lambda_1\cdots\lambda_S\,\mu_1\cdots\mu_S} l^{\lambda_1}\dots l^{\lambda_S} l^{\mu_1}\dots l^{\mu_S} = 1 .
$$

Les intégrales abéliennes

$$
a^{\lambda\mu} = \int l^\lambda l^\mu \mid l\, dl\dots dl \mid
$$

---

1) (. .): symétrisation, [. . .]: antisymétrisation.

sont finies si la forme quadratique $(x, x) = g_{\lambda_1 \cdots \lambda_s \mu_1 \cdots \mu_s} x^{\lambda_1 \cdots \lambda_s} x^{\mu_1 \cdots \mu_s}$ est définie positive. On peut donc choisir la fonction ρ de manière que

$$g^{\lambda\mu} = \rho a^{\lambda\mu}, \quad \det||g^{\lambda\mu}|| = (L)^{-2}.$$

Nous posons

$$A^{\lambda}_{\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu}, \; A^{\lambda}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial u^{\nu}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial u_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u_{\alpha}}\right),$$

$$A^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta)} = \frac{\partial}{\partial u^{(\mu_\beta}} A^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta-1)} + A^{(\lambda(\alpha-1)}_{(\mu(\beta-1)} \delta^{\lambda)}_{\mu)} + (\beta-1) A^{\nu}_{(\mu_1 \mu_2} A^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta-2))\nu}$$

Les vecteurs de Synge seront dèfinies par

$$E^{\lambda(\alpha)}_{i} = \Sigma(-1)^{\beta-\alpha} \binom{\beta}{\alpha} L^{\lambda(\beta-\alpha)\mu(\alpha)}_{i} /_{\lambda(\beta-\alpha)}$$

Les composantes $E^{\lambda(\alpha)}_{i}$ se transforment linéairement entre elles par rapport a la transformation des paramèters:

$$E^{\lambda(\alpha)}_{i} = u^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta)} E^{\mu(\beta)}_{i}, \quad (\beta \geqq \alpha)$$

En utilisant les quantités A nous obtiendrons les vecteurs intrinsèques:

$$\mathfrak{E}^{\lambda(\alpha)}_{i} = \frac{1}{L} B^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta)} E^{\mu(\beta)}_{i} \; (\beta \geqq \alpha), \; (\Sigma B^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta)} A^{\mu(\beta)}_{\nu(\tau)} = \delta^{\lambda(\alpha)}_{\nu(\tau)})$$

D'apres les relations (1.2) nous obtiendrons les relations

$$p^{i}_{\mu} \mathfrak{E}^{\lambda(\alpha)}_{i} = 0 \quad p^{i}_{\mu} \mathfrak{E}^{\lambda}_{i} = \delta^{\lambda}_{\mu}, \quad (\alpha \geqq 2).$$

Supposons maitenant qu'il existe un système des quantités $E^{i}_{\lambda(M)}{}^{i}_{\mu(M)}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1. $E^{i}_{\lambda(M)}{}^{j}_{\mu(M)} = E^{j}_{\mu(M)}{}^{i}_{\lambda(M)}$
2. $E^{i}_{\lambda(M)}{}^{j}_{\mu(M)} \mathfrak{E}^{\nu}_{j} = 0$
3. $E^{i}_{\lambda(M)}{}^{l}_{\nu(M)} E^{\nu(M)}_{l}{}^{\mu(M)}_{j} = \delta^{\mu_1}_{\lambda_{M)}} \cdots \delta^{\mu_M}_{\lambda_{M)}} (\delta^{i}_{j} - p^{i}_{\alpha} \mathfrak{E}^{\alpha}_{j})$

Posons

$$E^{\lambda(M)}_{i}{}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} L^{\lambda(M)}_{i} - \wedge^{j}_{i\,\mu} L^{\lambda(M)}_{j} - A^{(\lambda_1}_{\nu\mu} L^{\lambda_2 \cdots \lambda_M)\nu}_{i} + \ldots + A^{\alpha}_{\alpha\mu} L^{\lambda(M)}_{i}$$

$$L \wedge^{i}_{\lambda\, j} = \frac{(M-1)\,!}{(K+1)\ldots(K+M-1)} E^{i}_{\lambda\nu(M-1)}{}^{l}_{\pi(M)} \Big(L^{\pi(M)}_{i}{}^{\nu(M-1)}_{j}$$

$$+ \binom{M}{2} A^{(\nu_1}_{\alpha\beta} L_{j}^{\nu_2 \cdots \nu_{M-1})\alpha\beta}{}^{\pi(M)}_{l} \Big) + p^{i}_{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial u^{\lambda}} \mathfrak{E}^{\mu}_{j} - A^{\mu}_{\lambda\omega} \mathfrak{E}^{\omega}_{j} \right)$$

$$(\wedge^{i}_{\lambda j} = \wedge^{i}_{j\lambda})$$

Les $E^{\lambda(M)}_{i}{}_{\mu}$ sont les composantes d'un tenseur. Posons

$$E^{\lambda(M+1)}_{i} = g^{(\mu_1} E_{i}^{\lambda_2 \cdots \lambda_M)}{}_{\mu}, \; E^{\lambda(M+1)}_{i} = (\delta^{j}_{i} - p^{j}_{\alpha} \mathfrak{E}^{\alpha}_{i}) E^{\lambda(M+1)}_{j}$$

$E^{\lambda(M+1)}_{i}$ sont les composantes d'un tenseur, et satisfont aux conditions

$$p^{i}_{i} E^{\lambda(M+1)}_{i} \equiv 0$$

Il est facile de voir, qu'il existe un système des quantités $H^{\lambda(M+1)}_{i}$, $H^{\lambda(M+1)}_{i}{}^{\mu(M+1)}_{j}$

d'ordre M satisfaisant aux conditions

$$E_i^{\lambda(M+1)} = H_i^{\lambda(M+1)}{}_j^{\mu(M+1)} p^j_{\mu(M+1)} + H_i^{\lambda(M+1)}.$$

Supposons, ce qui est le cas général, qu'il existe un systèmedes quantite's

$$T^i_{\lambda(M+1)} \equiv p^i_{\lambda(M+1)} + H^i_{\lambda(M+1)}\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \dots, \frac{\partial^M x}{(\partial u)^M}\right), \text{ (modd. } p^i_\alpha)$$

satisfaisant aux conditions

$$E_i^{\lambda(M+1)} = H_i^{\lambda(M+1)}{}_j^{\mu(M+1)} T^j_{\mu(M+1)}$$

Soient $\dfrac{d}{du^\lambda}$ les opérateurs

$$\frac{d}{du^\lambda} = p^i_\lambda \frac{\partial}{\partial x^i} + \dots + p^i_{\lambda\mu(M-1)} \frac{\partial}{\partial p^i_{\mu(M-1)}} - H^i_{\lambda\mu(M)} \frac{\partial}{\partial p^i_{\mu(M)}}$$

Les quantités

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\frac{dg_{\alpha\mu}}{du^\nu} + \frac{dg_{\alpha\nu}}{du^\mu} - \frac{dg_{\mu\nu}}{du^\alpha}\right),$$

$$\Gamma^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta)} = \frac{d}{du^{(\mu}} \Gamma^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta-1))} + \delta^{(\lambda}_{(\mu} \Gamma^{\lambda(\alpha-1))}_{\mu(\beta-1))} + (\beta-1)\Gamma^{\nu}_{(\mu_1\mu_2} \Gamma^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta-2))\nu}$$

sont des fonctions en $\left(x, \dfrac{\partial x}{\partial u}, \dots, \dfrac{\partial^M x}{(\partial u)^M}\right)$. Les vecteurs de Synge d'ordre M seront définies par

$$\hat{\mathfrak{E}}_i^{\lambda(\alpha)} = \frac{1}{L} \sum_{\alpha>\beta} \overline{\Gamma}^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta)} \Big(\sum_{\tau} (-1)^{\beta-\tau} \tbinom{\tau}{\beta} \Gamma_i^{\mu(\beta)\nu(\tau-\beta)}{}_{/\nu(\tau-\beta)}\Big), \quad \big(\Gamma^{\lambda(\alpha)}_{\mu(\beta)} \Gamma^{\mu(\beta)}_{\nu(\tau)} = \delta^{\lambda(\alpha)}_{\nu(\tau)}\big)$$

En utilisant les quantités

$$\Lambda^i_{\lambda j} = \wedge^i_{\lambda j}\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \dots, \frac{\partial^M x^i}{\partial u^{\lambda_1} \dots \partial u^{\lambda_M}}, -H^i_{\lambda_1 \cdots \lambda_{M+1}},\right)$$

nous obtiendrons la dérivée covariante d'un vecteur:

$$D_\lambda X^i = \frac{\partial X^i}{\partial u^\lambda} + X^j \Lambda^i_{j\lambda}$$

La dérivée covariante d'un U-tenseur est définie par

$$\omega^\mu_\lambda(d) = \mathfrak{E}^\mu_i (dp^i_\lambda + \Lambda^i_{j\lambda} dx^j)$$

La dérivée covariante d'un vecteur est donnée par

$$DX^i = dX^i + X^j \omega^i_j(d)$$

où

$$K \cdot \omega^i_j(d) = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Gamma^\mu_{\nu(\beta)} \Big(\sum_{\tau=\beta}^{M} \tbinom{\tau}{\beta} \Lambda^i_{\mu j;}{}_l^{\nu(\beta)\rho(\tau-\beta)} dp^l_{\tau-\beta}\Big)$$

Soient les formes differentielles $\omega_i^{\lambda(\alpha)}$

$$L\omega_i^{\lambda(M)}(d) = \frac{M(M-1)\dots 1}{(K+1)\dots(K+M)} [dL_i^{\lambda(M)} - \omega^j_i(d) L_j^{\lambda(M)}$$

$$+\omega_{\mu}^{\cdot\lambda_1}(d)L_i^{\lambda_2\cdots\lambda\mu}+\cdots\omega_{\alpha}^{\alpha}(d)L_i^{\lambda(M)}]$$

$$\omega^{\nu(M-\alpha)}{}_j^{\mu(M)}(d)=\frac{M(M-1)\dots(\alpha+1)}{(K+1)\dots(K+M-\alpha)}\sum_{\beta=1}^{M-\alpha}\Gamma_{\lambda(\beta)}^{\nu(M-\alpha)}$$

$$\times\Sigma\binom{\gamma}{\beta}L_j^{\mu(M)}{}_l^{\lambda(\beta)\nu(\alpha-\beta)}\,dp^l_{\nu(\alpha-\beta)}\,.$$

La connexion des éléments d'ordre M de la variété V_N est définie en partant des expressions:

$$\omega^i_{\lambda(\alpha)}=\hat{\mathfrak{G}}^i_{\lambda(\alpha)\nu(M-\alpha)}{}^j_{\mu(M)}\,\omega^{\nu(M-\alpha)}{}_j^{\mu(M)}\qquad(1\leq\alpha\leq M)$$

Il est facile de voir que les quantités $\omega^i_{\lambda(\alpha)}$ sont de la forme

$$\omega^i_{\lambda(\alpha)}=(\delta^i_j-p^i_\rho\hat{\mathfrak{G}}^\rho_j)(dp^j_{\lambda(\alpha)}+\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\Lambda^j_{\lambda(\alpha)}{}_k^{\nu(\beta)}\,dp^k_{\mu(\beta)})$$

Le tenseur fondamental est défini par

$$g_{ij}=g_{\lambda_1\mu_1}\cdots g_{\lambda_M\mu_M}E_i^{\lambda(M)}{}_j^{\mu(M)}+\hat{\mathfrak{G}}^\alpha_i\hat{\mathfrak{G}}^\beta_j g_{\alpha\beta}$$

La connexion euclidienne est:

$$\begin{cases}\tilde{\omega}^i_j(d)=\sum_{\alpha=0}^{M}\Pi^i_j{}_k^{\lambda(\alpha)}\omega^k_{\lambda(\alpha)}\\[2mm] \Pi^i_j{}_k^{\lambda(\alpha)}=\frac{1}{2}g^{il}g^{*}_{lj;k}{}^{\lambda(\alpha)}\\[2mm] \Pi^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{il}(g^{*}_{lj;k}+g^{*}_{lk;j}-g^{*}_{jk;l})\end{cases}$$

$$(dg_{ij}=\sum_{\alpha=0}^{M}g^{*}_{ij;l}{}^{\lambda(\alpha)}\omega^l_{\lambda(\alpha)}(d))$$