28. *Sur la théorie des espaces à hyperconnexion euclidienne, II.**

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., March 12, 1945.)

§ 4. *Les tenseurs de courbure.*

Le tenseur de courbure $R^i_{\cdot jkh}$ de Riemann-Christoffel de V_n est donné par

$$(4.1)\qquad R^i_{\cdot jkh}=\{{}^{\,i}_{jk}\}_{,h}-\{{}^{\,i}_{jh}\}_{,k}+\{{}^{\,a}_{jk}\}\{{}^{\,i}_{ah}\}-\{{}^{\,a}_{jh}\}\{{}^{\,i}_{ak}\}\,.$$

Il apparait dans la formule de Ricci:

$$(4.2)\qquad v^i{}_{;k;h}-v^i{}_{;h;k}=v^jR^i_{\cdot jkh}\,,$$

et satifait aux relations algébriques :

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} &R^i_{\cdot jkh}=-R^i_{\cdot jhk}\,, \quad R^i_{\cdot jkh}+R^i_{\cdot khj}+R^i_{\cdot hjk}=0\,,\\ &R_{ijkh}=-R_{jikh}\,, \quad R_{ijkh}=R_{khij}\,, \end{aligned}$$

où l'on a posé $R_{ijkh}=g_{ia}R^a_{\cdot jkh}$,

De plus, il satisfait à l'identité bien connue de Bianchi:

$$(4.4)\qquad R^i_{\cdot jkh;l}+R^i_{\cdot jhl;k}+R^i_{\cdot jlk;h}=0\,,$$

d'où

$$(4.5)\qquad \left(R^i_{\cdot k}-\frac{1}{2}R\delta^i_k\right)_{;i}=0\,,$$

où nous avons posé $R^i_{\cdot k}=g^{ij}R_{jk}$ et $R_{jk}=R^i_{\cdot jki}$, R_{jk} étant le tenseur de Ricci qui est symétrique par rapport aux deux indices inférieurs.

Cela étant, nous allons considérer le tenseur de courbure de E_m. Pour cela, calculons $V^\lambda{}_{;k;h}-V^\lambda{}_{;h;k}$, on trouve, par un calcul facile,

$$(4.6)\qquad V^\lambda{}_{;k;h}-V^\lambda{}_{;h;k}=V^\mu K^\lambda_{\cdot\mu kh}\,,$$

où

$$(4.7)\qquad K^\lambda_{\cdot\mu kh}=\Gamma^\lambda_{\mu k,h}-\Gamma^\lambda_{\mu h,k}+\Gamma^\alpha_{\mu k}\Gamma^\lambda_{\alpha h}-\Gamma^\alpha_{\mu h}\Gamma^\lambda_{\alpha k}\,.$$

Les composantes du tenseur de courbure ainsi définies satisfont aux relations algébriques

$$(4.8)\qquad K^\lambda_{\cdot\mu kh}=-K^\lambda_{\cdot\mu hk},\quad K_{\lambda\mu kh}=-K_{\mu\lambda kh}\,,$$

la deuxième étant une conséquence de l'identité:

$$0=G_{\lambda\mu;k;h}-G_{\lambda\mu;h;k}=-G_{\alpha\mu}K^\alpha_{\cdot\lambda kh}-G_{\lambda\alpha}K^\alpha_{\cdot\mu kh}\,.$$

Calculons cette fois $B^{\cdot\lambda}_{j}{}_{;k;h}-B^{\cdot\lambda}_{j}{}_{;h;k}$, alors on trouve

$$(4.9)\qquad B^{\cdot\lambda}_{j}{}_{;k;h}-B^{\cdot\lambda}_{j}{}_{;h;k}=B^{\cdot\mu}_{j}K^\lambda_{\cdot\mu kh}-B^{\cdot\lambda}_{i}R^i_{\cdot jkh}\,.$$

---

* La dépense de cette recherche fut réglée par le frais du Ministère de l'Instruction Publique pour les recherches scientifiques.

La première partie de cette Note fut publiée dans ce Proc., **21** (1945), 156–163.

En substituant (2.8) dans cette équation et en tenant compte de (2.15), on obtient

$$(4.10)\qquad (H_{jk}^{\cdot\cdot P}{}_{;h}-H_{jh}^{\cdot\cdot P}{}_{;k})B_P^{\cdot\lambda}-B_i^{\cdot\lambda}(H_{jk}^{\cdot\cdot P}H^i_{\cdot hP}-H_{jh}^{\cdot\cdot P}H^i_{\cdot kP}) = B_j^{\cdot\mu}K^{\lambda}_{\cdot\mu kh}-B_i^{\cdot\lambda}R^i_{\cdot jkh},$$

d'où on tire

$$(4.11)\qquad R^i_{\cdot jkh}=K^i_{\cdot jkh}+H_{jk}^{\cdot\cdot P}H^i_{\cdot hP}-H_{jh}^{\cdot\cdot P}H^i_{\cdot kP},$$

et

$$(4.12)\qquad 0=K^P_{\cdot jkh}-H_{jk}^{\cdot\cdot P}{}_{;h}+H_{jh}^{\cdot\cdot P}{}_{;k},$$

où nous avons posé

$$(4.13)\qquad K^i_{\cdot jkh}=B^i_{\cdot\lambda}B_j^{\cdot\mu}K^{\lambda}_{\cdot\mu kh}\quad\text{et}\quad K^P_{\cdot jkh}=B^P_{\cdot\lambda}B_j^{\cdot\mu}K^{\lambda}_{\cdot\mu kh}.$$

La deuxième identité dε (4.3) et l'équation (4.11) nous donnent

$$(4.14)\qquad K^i_{\cdot jkh}+K^i_{\cdot khj}+K^i_{\cdot hjk}+N_{jk}^{\cdot\cdot P}H^i_{\cdot hP}+N_{kh}^{\cdot\cdot P}H^i_{\cdot jP}+N_{hj}^{\cdot\cdot P}H^i_{\cdot kP}=0,$$

où nous avons posé

$$(4.15)\qquad N_{jk}^{\cdot\cdot P}=H_{jk}^{\cdot\cdot P}-H_{kj}^{\cdot\cdot P}.$$

D'aute part, l'équation (4.12) nous donne

$$(4.16)\qquad K^P_{\cdot jkh}+K^P_{\cdot khj}+K^P_{\cdot hjk}=N_{jk}^{\cdot\cdot P}{}_{;h}+N_{kh}^{\cdot\cdot P}{}_{;j}+N_{hj}^{\cdot\cdot P}{}_{;k}.$$

De plus, si l'on pose $K_{ijkh}=g_{ia}K^a_{\cdot jkh}$, on obtient, de (4.11),

$$(4.17)\qquad K_{ijkh}=-K_{jikh}.$$

Cela étant, calculons cette fois $B_Q^{\cdot\lambda}{}_{;k;h}-B_Q^{\cdot\lambda}{}_{;h;k}$, alors on trouve

$$(4.18)\qquad B_Q^{\cdot\lambda}{}_{;k;h}-B_Q^{\cdot\lambda}{}_{;h;k}=B_Q^{\cdot\mu}K^{\lambda}_{\cdot\mu kh}-B_P^{\cdot\lambda}R^P_{\cdot Qkh},$$

où nous avons posé

$$(4.19)\qquad R^P_{\cdot Qkh}=\Gamma^P_{Qk,h}-\Gamma^P_{Qh,k}+\Gamma^R_{Qk}\Gamma^P_{Rh}-\Gamma^R_{Qh}\Gamma^P_{Rk}.$$

Ce tenseur de courbure de E_{m-n} satisfait aux relations algébriques

$$(4.20)\qquad R^P_{\cdot Qkh}=-R^P_{\cdot Qhk},\qquad R_{PQkh}=-R_{QPkh},$$

la deuxième étant une conséquence de

$$0=g_{PQ;k;h}-g_{PQ;h;k}=-g_{RQ}R^R_{\cdot Pkh}-g_{PR}R^R_{\cdot Qkh}.$$

Or, en substituant (2.15) dans (4.18), et en tenant compte de (2.8), on trouve

$$(4.21)\qquad H_{ik}^{\cdot\cdot\lambda}H^i_{\cdot hQ}-H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda}H^i_{\cdot kQ}-B_i^{\cdot\lambda}(H^i_{\cdot kQ;h}-H^i_{\cdot hQ;k}) = B_Q^{\cdot\mu}K^{\lambda}_{\cdot\mu kh}-B_P^{\cdot\lambda}R^P_{\cdot Qkh},$$

d'où on tire

$$(4.22)\qquad H^i_{\cdot kQ;h}-H^i_{\cdot hQ;k}=-B^i_{\cdot\lambda}B_Q^{\cdot\mu}K^{\lambda}_{\cdot\mu kh},$$

et

$$(4.23)\qquad R^P_{\cdot Qkh}+H_{ik}^{\cdot\cdot P}H^i_{\cdot hQ}-H_{ih}^{\cdot\cdot P}H^i_{\cdot kQ}=0.$$

Comme nous avons $-B^i_{\cdot\lambda}B_Q^{\cdot\mu}K^{\lambda}_{\cdot\mu kh}=g_{PQ}g^{ij}K^P_{\cdot jkh}$, l'équation (4.22) est équivalente à (4.12).

Or, nous avons déjà démontré la formule de Ricci (4.6).

Appliquons cette formule à un tenseur mixte $V^{\lambda}{}_{;k}$. Nous aurons, par un calcul facile,

$$(4.24)\qquad V^{\lambda}{}_{;k;h;l}-V^{\lambda}{}_{;k;l;h}=V^{\mu}{}_{;k}K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu hl}-V^{\lambda}{}_{;i}R^{\cdot i}_{\bullet\,khl}\,.$$

D'autre part, en dérivant covariantement la formule (4.6), on a

$$(4.25)\qquad V^{\lambda}{}_{;k;h;l}-V^{\lambda}{}_{;h;k;l}=V^{\mu}{}_{;l}K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh}-V^{\mu}K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh;l}\,.$$

On permute les indices k, h, l cycliquement dans (4.24) et dans (4.25), et on compare les équations obtenues, alors en tenant compte de l'identité (4.3), on trouve

$$V^{\mu}(K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh;l}+K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu hl;k}+K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu lk;h})=0\,,$$

d'où

$$(4.26)\qquad K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh;l}+K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu hl;k}+K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu lk;h}=0\,,$$

V^{μ} étant tout à fait arbitraire. La formule (4.26) nous donne l'identité de Bianchi pour le tenseur de courbure $K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh}$.

On peut démontrer, par un procédé analogue, l'identité de Bianchi

$$(4.27)\qquad R^{\cdot P}_{\bullet\,Qkh;l}+R^{\cdot P}_{\bullet\,Qhl;k}+R^{\cdot P}_{\bullet\,Qlk;h}=0\,,$$

pour le tenseur de courbure $R^{\cdot P}_{\bullet\,Qkh}$.

§ 5. *La détermination du tenseur de courbure $K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh}$ de E_m.*

Nous avons trouvé trois tenseurs de courbure, celui de V_n $R^{\cdot i}_{\bullet\,jkh}$, celui de E_{m-n} $R^{\cdot P}_{\bullet\,Qkh}$ et celui de E_m $K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh}$. Nous allons montrer, dans ce Chapitre, que les composantes $K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh}$ du tenseur de courbure de E_m peuvent se déterminer en termes de $R^{\cdot i}_{\bullet\,jkh}$, $R^{\cdot P}_{\bullet\,Qkh}$ et $H_{jk}^{\cdot\cdot P}$, le tenseur qui relie les connexions de V_n et E_{m-n} à celle de E_m.

Des équations (4.10), on obtient, en contractant $B^{j}_{\cdot\,\mu}$,

$$(5.1)\qquad B_P^{\cdot\lambda}B^{j}_{\cdot\,\mu}(H_{jk}^{\cdot\cdot P}{}_{;h}-H_{jh}^{\cdot\cdot P}{}_{;k})-B_i^{\cdot\lambda}B^{j}_{\cdot\,\mu}(H_{jk}^{\cdot\cdot P}H^{\cdot i}_{\bullet\,hP}-H_{jh}^{\cdot\cdot P}H^{\cdot i}_{\bullet\,kP})$$
$$=B^{j}_{\cdot\,\mu}B_j^{\cdot\alpha}K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\alpha kh}-B_i^{\cdot\lambda}B^{j}_{\cdot\,\mu}R^{\cdot i}_{\bullet\,jkh}\,.$$

D'autre part, des équations (4.21), on trouve, en contractant $B^{Q}_{\cdot\,\mu}$,

$$(5.2)\qquad H_{ik}^{\cdot\cdot\lambda}H^{\cdot i}_{\bullet\,h\mu}-H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda}H^{\cdot i}_{\bullet\,k\mu}-B_i^{\cdot\lambda}B^{Q}_{\cdot\,\mu}(H^{\cdot i}_{\bullet\,kQ;h}-H^{\cdot i}_{\bullet\,hQ;k})$$
$$=B^{Q}_{\cdot\,\mu}B_Q^{\cdot\alpha}K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\alpha kh}-B_P^{\cdot\lambda}B^{Q}_{\cdot\,\mu}R^{\cdot P}_{\bullet\,Qkh}\,.$$

En ajoutant (5.1) et (5.2) et remarquant que $B^{j}_{\cdot\,\mu}B_j^{\cdot\alpha}+B^{Q}_{\cdot\,\mu}B_Q^{\cdot\alpha}=\delta^{\alpha}_{\mu}$, on trouve

$$(5.3)\qquad K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh}=B_i^{\cdot\lambda}B^{j}_{\cdot\,\mu}R^{\cdot i}_{\bullet\,jkh}+B_P^{\cdot\lambda}B^{Q}_{\cdot\,\mu}R^{\cdot P}_{\bullet\,Qkh}$$
$$+B_P^{\cdot\lambda}B^{j}_{\cdot\,\mu}(H_{jk}^{\cdot\cdot P}{}_{;h}-H_{jh}^{\cdot\cdot P}{}_{;k})-B_i^{\cdot\lambda}B^{j}_{\cdot\,\mu}(H_{jk}^{\cdot\cdot P}H^{\cdot i}_{\bullet\,hP}-H_{jh}^{\cdot\cdot P}H^{\cdot i}_{\bullet\,kP})$$
$$+H_{ik}^{\cdot\cdot\lambda}H^{\cdot i}_{\bullet\,h\mu}-H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda}H^{\cdot i}_{\bullet\,k\mu}-B_i^{\cdot\lambda}B^{Q}_{\cdot\,\mu}(H^{\cdot i}_{\bullet\,kQ;h}-H^{\cdot i}_{\bullet\,hQ;k})\,,$$

ce qui est une géneralisation d'une formule donnée par MM. Michal et Botsford.

Le tenseur de courbure $K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh}$ de E_m étant donné par la formule (5.3), nous posons

$$(5.4)\qquad K_{\mu k}=B^{h}_{\cdot\,\lambda}K^{\cdot\lambda}_{\bullet\,\mu kh}\,,$$

et l'appelons le tenseur d'Einstein-Mayer. De (5.3) on obtient

$$(5.5) \quad K_{\mu k} = B^{j}_{\cdot\mu}(R_{jk} - H_{jk}^{\cdot\cdot P} H^{a}_{\cdot aP} + H_{ja}^{\cdot\cdot P} H^{a}_{\cdot kP}) \\ - B^{Q}_{\cdot\mu}(H^{a}_{\cdot kQ;a} - H^{a}_{\cdot aQ;k}).$$

Cela étant, posons encore

$$(5.6) \qquad K = B^{k\mu} K_{\mu k},$$

alors, on aura, de (5.5),

$$(5.7) \qquad K = R - H^{a\cdot P}_{\cdot a} H^{b}_{\cdot bP} + H^{a\cdot P}_{\cdot b} H^{b}_{\cdot aP},$$

K étant la courbure scalaire de E_m.

§ 6. *Les lignes les plus droites relativement à E_m.*

La ligne géodésique de V_n est donnée par

$$(6.1) \qquad \frac{\delta^2 x^i}{ds^2} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Donc, le vecteur $\dfrac{dx^i}{ds}$ tangent à la courbe se déplace parallèlement à lui-même; si l'on déplace, le long de cette courbe, le vecteur $B_i^{\cdot\lambda} \dfrac{dx^i}{ds}$ de E_m tangent à la courbe, on trouve

$$(6.2) \qquad \frac{\delta}{ds}\left(B_i^{\cdot\lambda} \frac{dx^i}{ds}\right) = H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds},$$

par conséquent, le vecteur $B_i^{\cdot\lambda} \dfrac{dx^i}{ds}$ ne se déplace parallèlement que dans le cas où nous avons $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} \dfrac{dx^j}{ds} \dfrac{dx^k}{ds} = 0$.

Or, nous allons considérer un vecteur V^λ de E_m qui se déplace toujours parallèlement à lui-même dans la direction déterminée par $v^i = B^i_{\cdot\lambda} V^\lambda$. La direction v^i dans V_n décrit une courbe. C'est la ligne la plus droite relativement à E_m considérée par MM. Einstein et Mayer pour représenter la trajectoire d'une particule dans le champ gravifique et éléctromagnétique.

Posons

$$\frac{dx^i}{dr} = B^i_{\cdot\lambda} V^\lambda.$$

Alors, on trouve

$$(6.3) \qquad V^\lambda = B_i^{\cdot\lambda} \frac{dx^i}{dr} + B_P^{\cdot\lambda} v^P,$$

où v^P est défini par

$$(6.4) \qquad v^P = B^P_{\cdot\lambda} V^\lambda.$$

Or, d'après la définition, on a, de (6.3),

$$\frac{\delta}{dr}V^\lambda = B_i^{\cdot\lambda}\left(\frac{\delta^2 x^i}{dr^2} - H^i_{\cdot kP}v^P\frac{dx^k}{dr}\right) + B_P^{\cdot\lambda}\left(H_{jk}^{\cdot\cdot P}\frac{dx^j}{dr}\frac{dx^k}{dr} + \frac{\delta}{dr}v^P\right)$$
$$= aV^\lambda = a\left(B_i^{\cdot\lambda}\frac{dx^i}{dr} + B_P^{\cdot\lambda}v^P\right),$$

d'oû

$$\frac{\delta^2 x^i}{dr^2} + H^i_{\cdot kP}v^P\frac{dx^k}{dr} = a\frac{dx^i}{dr}. \tag{6.5}$$

et

$$\frac{\delta}{dr}v^P + H_{jk}^{\cdot\cdot P}\frac{dx^j}{dr}\frac{dx^k}{dr} = av^P. \tag{6.6}$$

Si l'on suppose que V^λ soit un vecteur unitaire, on aura $a=0$.

§ 7. *V_n plan ou géodésique relativement à E_m.*

Si l'espace vectoriel linéaire E_n se déplace parallèlement à lui-même quand on déplace dans n'importe quelle direction, on dit que V_n est plan relativement à E_m.

Pour cela, on doit avoir

$$B^P_{\cdot\lambda}\delta(B_j^{\cdot\lambda}v^j) = H_{jk}^{\cdot\cdot P}v^j dx^k = 0,$$

pour n'importe quel vecteur v^i et pour n'imorte quelle direction dx^i, donc,

$$H_{jk}^{\cdot\cdot P} = 0 \qquad \text{ou} \qquad H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = 0. \tag{7.1}$$

Dans ce cas, l'espace vectoriel linéaire E_{m-n} se déplace aussi parallèlement à lui-même, comme on peut du reste le vérifier en tenant compte de (2.15).

Si le vecteur $B_i^{\cdot\lambda}\dfrac{dx^i}{ds}$ de E_m tangent à une géodésique de V_n se déplace toujours parallèlement à lui-même le long de la géodésique, on dit que V_n est géodésique relativement à E_m.

Pour cela, on doit avoir

$$\frac{\delta}{ds}\left(B_i^{\cdot\lambda}\frac{dx^i}{ds}\right) = H_{jk}^{\cdot\lambda}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

pour n'importe quelle direction $\dfrac{dx^j}{ds}$, d'oû

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} + H_{kj}^{\cdot\cdot\lambda} = 0 \qquad \text{ou} \qquad H_{jk}^{\cdot\cdot P} + H_{kj}^{\cdot\cdot P} = 0. \tag{7.2}$$

§ 8. *La théorie d'Einstein et Mayer et la généralisation par Michal et Botsford.*

Dans leur théorie unitaire des champs, MM. Einstein et Mayer ont considere un V_4 géodésique ralativement à E_5. Examinons ce cas, en supposant que V_n soit géodésique relativement à E_m.

Dans ce cas, les équations de la ligne la plus droite relativement à E_m s'écrivent

$$(8.1)\qquad \frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{{}^{\,i}_{jk}\right\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=H^i_{\cdot kP}v^P\frac{dx^k}{ds}\,,\quad \frac{\delta}{ds}v^P=0\,,$$

donc, v^P se déplace parallèlement d'après la connexion de E_{m-n}.

Or, l'équation (5.5) s'écrit dans ce cas

$$(8.2)\qquad K_{\mu k}=B^j_{\cdot\mu}(R_{jk}+H_{ja}^{\cdot\cdot P}H^a_{\cdot kP})-B^Q_{\cdot\mu}H^a_{\cdot kQ;a}\,,$$

et l'équation (5.7)

$$(8.3)\qquad K=R+H^{a\cdot\cdot P}_{\cdot b}H^b_{\cdot aP}\,.$$

Posons, avec Einstein et Mayer,

$$\begin{aligned}(8.4)\qquad U_{\mu k}&=K_{\mu k}-\frac{1}{4}B_{k\mu}(K+R)\\ &=B^j_{\cdot\mu}\left(R_{jk}-\frac{1}{2}Rg_{jk}+H_{ja}^{\cdot\cdot P}H^a_{\cdot kP}-\frac{1}{4}H^{a\cdot\cdot P}_{\cdot b}H^{b\cdot\cdot P}_{\cdot a}g_{jk}\right)\\ &\qquad -B^Q_{\cdot\mu}H^a_{\cdot kQ;a}\,.\end{aligned}$$

En dérivant (8.4) covariantement, on trouve

$$\begin{aligned}U_{\mu k;h}=&\,H^j_{\cdot h\mu}\left(R_{jk}-\frac{1}{2}Rg_{jk}+H_{ja}^{\cdot\cdot P}H^a_{\cdot kP}-\frac{1}{4}H^{a\cdot\cdot P}_{\cdot b}H^b_{\cdot aP}g_{jk}\right)\\ &+B^j_{\cdot\mu}\Big[R_{jk;h}-\frac{1}{2}R_{;h}g_{jk}+H_{ja}^{\cdot\cdot P}{}_{;h}H^a_{\cdot kP}+H_{ja}^{\cdot\cdot P}H^a_{\cdot kP;h}\\ &\qquad -\frac{1}{4}H^{a\cdot\cdot P}_{\cdot b}{}_{;h}H^b_{\cdot aP}+H^{a\cdot\cdot P}_{\cdot b}H^b_{\cdot aP;h})g_{jk}\Big]\\ &+B_{i\mu}H^{i\cdot\cdot Q}_{\cdot h}H^a_{\cdot kQ;a}-B^Q_{\cdot\mu}H^a_{\cdot kQ;a;h}\,,\end{aligned}$$

d'où

$$(8.5)\qquad U_\mu^{\cdot i}{}_{;i}=\frac{1}{2}B^j_{\cdot\mu}(H_{jk}^{\cdot\cdot P}{}_{;h}+H_{kh}^{\cdot\cdot P}{}_{;j}+H_{hj}^{\cdot\cdot P}{}_{;k})H^{kh}_{\cdot\cdot P}-B^Q_{\cdot\mu}H^{ab}_{\cdot\cdot Q;a;b}\,,$$

grâce à l'identité (4.5) et $R_{jk}=R_{kj}$.

D'autre part, on a

$$H^{ab}_{\cdot\cdot Q;k;h}-H^{ab}_{\cdot\cdot Q;h;k}=H^{cb}_{\cdot\cdot Q}R^a_{\cdot ckh}+H^{ac}_{\cdot\cdot Q}R^b_{\cdot\cdot ckh}-H^{ab}_{\cdot\cdot P}R^P_{\cdot Qkh}\,,$$

d'où, en posant $a=k$, $b=h$,

$$(8.6)\qquad 2H^{ab}_{\cdot\cdot Q;a;b}=-H^{ab}_{\cdot\cdot P}R^P_{\cdot Qab}\,.$$

En substituant (8.6) dans (8.5), on obtient finalement

$$(8.7)\qquad U_\mu^{\cdot i}{}_{;i}=\frac{1}{2}[B^j_{\cdot\mu}(H_{jk}^{\cdot\cdot P}{}_{;h}+H_{kh}^{\cdot\cdot P}{}_{;j}+H_{hj}^{\cdot\cdot P}{}_{;k})H^{kh}_{\cdot\cdot P}+B^Q_{\cdot\mu}H^{ab}_{\cdot\cdot P}R^P_{\cdot Qab}]$$

Examinons le cas où $n=m-1$. Dans ce cas, en posant

$$B^{\cdot\lambda}_n=B^\lambda\,,\qquad H_{jk}^{\cdot\cdot n}=H_{jk}\,,\qquad \text{etc.,}$$

nous avons, de (8.4),

$$U_{\mu k}=B^j_{\cdot\mu}\left[\left(R_{jk}-\frac{1}{2}Rg_{jk}\right)+\left(H_{ja}H^a_{\cdot k}-\frac{1}{4}H^a_{\cdot b}H^b_{\cdot a}g_{jk}\right)\right]-B_\mu H^a_{\cdot k;a}\,,$$

et de (8.7)

$$U^{\cdot\, i}_{\mu;\, i} = \frac{1}{2} B^{j}_{\cdot\,\mu} (H_{jk;h} + H_{kh;j} + H_{hj;k}) H^{kh}\,, \tag{8.8}$$

parce que $R^{P}_{\cdot\, Qkh} = 0$.

Ceux qui correspondent aux équations des champs d'Einstein et Mayer sont

$$U_{\mu k} = 0 \qquad \text{et} \qquad H_{jk;h} + H_{kh;j} + H_{hj;k} = 0\,,$$

d'où on a

$$\left(R_{jk} - \frac{1}{2} R g_{jk}\right) + \left(H^{\cdot\, a}_{j} H^{\cdot}_{a\cdot\, k} - \frac{1}{4} H^{a}_{\cdot\, b} H^{b}_{\cdot\, a} g_{jk}\right) = 0\,, \tag{8.9}$$

et

$$H^{a}_{\cdot k;a} = 0\,, \tag{8.10}$$

H_{jk} étant de la forme

$$H_{jk} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^j}\,, \tag{8.11}$$

où φ_j est un vecteur covariant qui correspond au potentiel éléctomagnétique.