23. Über nilpotente topologische Gruppen, I.

Von Kenkiti IWASAWA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1945.)

In der abstrakten Gruppentheorie spielen bekanntlich die höheren Kommutatorgruppen, die absteigenden bzw. die aufsteigenden Zentralreihen wichtige Rollen. Sie charakterisieren besondere Klassen von Gruppen, nämlich auflösbare bzw. nilpotente Gruppen, deren Struktur, vor allem bei endlichen Gruppen, eingehend untersucht worden ist[1]. Dementsprechend sollen im folgenden die Kommutatorgruppen und die Zentralgruppen auch für topologische Gruppen definiert werden und dann die Struktur der auflösbaren bzw. der nilpotenten topologischen, insbesondere kompakten Gruppen untersucht werden.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine separable topologische Gruppe und $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}, \ldots\ldots$ (nicht notwendig abgeschlossene) Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathfrak{H}}$, $\overline{\mathfrak{A}}, \ldots\ldots$ bzw. $[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}], \ldots\ldots$ die abgeschlossenen Hüllen bzw. die abstrakten Kommutatorgruppen (im Sinne der abstrakten Gruppentheorie)[2] solcher Untergruppen. Es gilt dann wie leicht ersichtlich

$$(1) \qquad \overline{[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}]} = \overline{[\overline{\mathfrak{H}}, \overline{\mathfrak{A}}]}\,.$$

Wir nennen $\overline{[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}]}$ die *topologische Kommutatorgruppe* von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$.

Nun ersetzten wir die gewöhnlichen Kommutatorgruppen durch die topologischen und definieren die topologischen höheren Kommutatorgruppen $\mathfrak{D}^*_\xi(\mathfrak{G})$ bzw. die topologischen absteigenden Zentralgruppen $\mathfrak{Z}^*_\xi(\mathfrak{G})$ folgendermassen. Es sei

$$\mathfrak{D}^*_0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}\,, \qquad \mathfrak{Z}^*_0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$$

und für jede Ordnungszahl η mit $\eta < \xi$ sei $\mathfrak{D}^*_\eta(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_\eta(\mathfrak{G})$ schon definiert. Ist $\xi = \eta + 1$, so setze man $\mathfrak{D}^*_\xi(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_\xi(\mathfrak{G})$ gleich der topologischen Kommutatorgruppe von $\mathfrak{D}^*_\eta(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{D}^*_\eta(\mathfrak{G})$ bzw. von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Z}^*_\eta(\mathfrak{G})$, und wenn ξ eine Limeszahl ist, so sei $\mathfrak{D}^*_\xi(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_\xi(\mathfrak{G})$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{D}^*_\eta(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_\eta(\mathfrak{G})$ mit $\eta < \xi$.

Nach (1) kann man durch Induktion leicht beweisen, dass $\mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_n(\mathfrak{G})$ für eine natürliche Zahl n der Abschliessung der gewöhnlichen höheren

---

1) Vgl. z. B. P. Hall, A contribution to the theory of groups of primepower orders, Proc. Lond. Math. Soc. II **36** (1933); R. Baer, Nilpotent groups and their generalizations, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. **47** (1940).

2) $[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}]$ ist die von $(h, u) = huh^{-1}u^{-1}$, $h \in \mathfrak{H}$, $u \in \mathfrak{A}$ erzeugte Gruppe.

Kommutatorgruppe $\mathfrak{D}_n(\mathfrak{G})$ bzw. der gewöhnlichen absteigenden Zentralgruppe $\mathfrak{Z}_n(\mathfrak{G})$ gleich ist:

(2) $$\mathfrak{D}_n^*(\mathfrak{G})=\overline{\mathfrak{D}_n(\mathfrak{G})}, \qquad \mathfrak{Z}_n^*(\mathfrak{G})=\overline{\mathfrak{Z}_n(\mathfrak{G})}, \qquad n=1, 2,\ldots\ldots$$

Nun definieren wir die topologischen aufsteigenden Zentralgruppen $\mathfrak{z}_\xi^*(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$. Es sei $\mathfrak{z}_0^*(\mathfrak{G})$ die Einheitsgruppe und $\mathfrak{z}_\eta^*(\mathfrak{G})$ mit $\eta<\xi$ seien schon definiert. Wenn $\xi=\eta+1$ ist, so sei $\mathfrak{z}_\xi^*(\mathfrak{G})/\mathfrak{z}_\eta^*(\mathfrak{G})$ das Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{z}_\eta^*(\mathfrak{G})$ und wenn ξ eine Limeszahl ist, so sei $\mathfrak{z}_\xi^*(\mathfrak{G})$ die Abschliessung der Vereinigung aller $\mathfrak{z}_\eta^*(\mathfrak{D})$ mit $\eta<\xi$.

Zunächst beweisen wir einige Hilfssätze für diese $\mathfrak{G}_\xi^*(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{Z}_\xi^*(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{z}_\xi^*(\mathfrak{G})$.

Hilfssatz 1. Für eine abgeschlossene Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ gilt

(3) $$\mathfrak{D}_\xi^*(\mathfrak{G})\geqq\mathfrak{D}_\xi^*(\mathfrak{H}), \qquad \mathfrak{Z}_\xi^*(\mathfrak{G})\geqq\mathfrak{Z}_\xi^*(\mathfrak{H}).$$

Wenn $\mathfrak{N}$ ein abgeschlossener Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, so ist

(4) $$\mathfrak{D}_\xi^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\geqq\mathfrak{D}_\xi^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{Z}_\xi^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\geqq\mathfrak{Z}_\xi^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N},$$

(4′) $$\mathfrak{D}_n^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=\mathfrak{D}_n^*(\mathfrak{N})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{Z}_n^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=\mathfrak{Z}_n^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}, \text{ für } n=1, 2,\ldots$$

(5) $$\mathfrak{z}_\xi^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\geqq\mathfrak{z}_\xi^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}.$$

Beweis. (3) ist nach Definition ohne weiters klar. (4), (4′), (5) lassen sich durch Induktion nach ξ (n) leicht beweisen. Um z. B. (4) zu beweisen setzen wir voraus dass $\mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\geqq\mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ schon für $\eta<\xi$ als gültig bewiesen ist. Wenn $\xi=\eta+1$ ist, so ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_\xi^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})&=\overline{[\mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}),\ \mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})]}\geqq\overline{[\mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N},\ \mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}]}\\&\geqq\overline{[\mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G}),\ \mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G})]}\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}=\mathfrak{D}_\xi^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}.\end{aligned}$$

Wenn ξ eine Limeszahl ist, so gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_\xi^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})&=\bigwedge_{\eta<\xi}\mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\geqq\bigwedge_{\eta<\xi}(\mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N})\geqq(\bigwedge_{\eta<\xi}\mathfrak{D}_\eta^*(\mathfrak{G}))\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\\&=\mathfrak{D}_\xi^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}.\end{aligned}$$

Hilfssatz 2. Wenn $\mathfrak{G}$ eine kompakte Gruppe ist, so ist

$$\mathfrak{D}_\omega^*(\mathfrak{G})=\mathfrak{D}_{\omega+1}^*(\mathfrak{G})=\ldots\ldots, \quad \mathfrak{Z}_\omega^*(\mathfrak{G})=\mathfrak{Z}_{\omega+1}^*(\mathfrak{G})=\ldots\ldots.$$

Für einen abgeschlossenen Normalteiler $\mathfrak{N}$ gilt dann ausserdem

$$\mathfrak{D}_\omega^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=\mathfrak{D}_\omega^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{Z}_\omega^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=\mathfrak{Z}_\omega^*(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}.$$

Beweis. Wir beweisen $\mathfrak{D}_\omega^*(\mathfrak{G})=\mathfrak{D}_{\omega+1}^*(\mathfrak{G})=\ldots\ldots$. $\mathfrak{Z}_\omega^*(\mathfrak{G})=\mathfrak{Z}_{\omega+1}^*(\mathfrak{G})=\cdots\cdot$ lässt sich in analoger Weise beweisen. Zum Beweis der ersteren schicken wir einen Hilfssatz voraus, welcher auch an sich von Interesse sein mag.

Hilfssatz 3. In einer kompakten Lieschen Gruppe $\mathfrak{L}$ gilt der minimale Kettensatz für abgeschlossene Untergruppen. Es folgt nämlich aus

$$\mathfrak{L}\geqq\mathfrak{H}_1\geqq\mathfrak{H}_2\geqq\ldots\ldots,$$

dass es von einem gewissen n an

$$\mathfrak{H}_n=\mathfrak{H}_{n+1}=\mathfrak{H}_{n+2}=\ldots\ldots$$

gilt.

Bemerkung. Der maximale Kettensatz ist dagegen im allgemein nicht gültig. Das sieht man sofort an dem Beispiel der mod. 1 reduzierten additiven Gruppe $\mathfrak{R}$ aller reellen Zahlen[1].

Beweis. Für Dimensionen der Lieschen Gruppen $\mathfrak{H}_i$ gilt offenbar

$$\dim. \mathfrak{H}_1 \geqq \dim. \mathfrak{H}_2 \geqq \cdots\cdots$$

Von einem gewissen m an ist also

$$\dim. \mathfrak{H}_m = \dim. \mathfrak{H}_{m+1} = \cdots\cdots$$

und die 1-Komponente[2] von $\mathfrak{H}_m, \mathfrak{H}_{m+1}, \cdots\cdots$ fallen zusammen. Wenn man diese Gruppe mit $\mathfrak{N}_0$ bezeichnet, so sind $\mathfrak{H}_m/\mathfrak{N}_0, \mathfrak{H}_{m+1}/\mathfrak{N}_0, \cdots\cdots$ sämtlich kompakt und diskret, also endliche Gruppen und es gilt

$$\mathfrak{H}_m/\mathfrak{N}_0 \geqq \mathfrak{H}_{m+1}/\mathfrak{N}_0 \geqq \cdots\cdots$$

Daher gibt es ein n ($\geqq m$) mit

$$\mathfrak{H}_n/\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{H}_{n+1}/\mathfrak{N}_0 = \cdots\cdots, \text{ also } \mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_{n+1} = \cdots\cdots,$$

w. z. b. w.

Nun zeigen wir $\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}^*_{\omega+1}(\mathfrak{G}) = \cdots\cdots$ Es genügt offenbar nur $\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}^*_{\omega+1}(\mathfrak{G})$ nachzuweisen. Wir setzen voraus $\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}) \gneqq \mathfrak{D}^*_{\omega+1}(\mathfrak{G})$ und wählen ein Element g, mit $g \in \mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G})$, $g \notin \mathfrak{D}^*_{\omega+1}(\mathfrak{G})$. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}^*_{\omega+1}(\mathfrak{G})$ eine kompakte Gruppe ist, gibt es eine stetige Darstellung D von $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}^*_{\omega+1}(\mathfrak{G})$, welche g nicht auf die Einheitsmatrix E abbildet. Es ist also

$$(6) \qquad D(\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G})) \gneqq \{E\}, \qquad D(\mathfrak{D}^*_{\omega+1}(\mathfrak{G})) = \{E\}\,.$$

Aus der Kompaktheit von $\mathfrak{G}$ und aus $\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}) = \bigwedge_n \mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G})$ sieht man

$$D(\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G})) = \bigwedge_n D(\mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G}))\,.$$

Da es aber

$$D(\mathfrak{D}^*_0(\mathfrak{G})) \geqq D(\mathfrak{D}^*_1(\mathfrak{G})) \geqq D(\mathfrak{D}^*_2(\mathfrak{G})) \geqq \cdots\cdot$$

ist und $D(\mathfrak{D}^*_0(\mathfrak{G})) = D(\mathfrak{G})$ eine kompakte Liesche Gruppe ist, so folgt nach Hilfssatz 3

$$(7) \qquad D(\mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G})) = D(\mathfrak{D}^*_{n+1}(\mathfrak{G})) = \cdots\cdots \qquad = D(\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}))\,.$$

Andererseits ist aber $\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G})/D^*_{\omega+1}(\mathfrak{G})$ eine abelsche Gruppe. Es ist also nach Hilfssatz 1, (4′) und (7)

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G})) &= D(\mathfrak{D}^*_{n+1}(\mathfrak{G})) = \mathfrak{D}^*_{n+1}(D(\mathfrak{G})) = \overline{[\mathfrak{D}^*_n(D(\mathfrak{G}))\,,\ \mathfrak{D}^*_n(D(\mathfrak{G}))]} \\ &= \overline{[D(\mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G}))\,,\ D(\mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G}))]} = \overline{[D(\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}))\,,\ D(\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}))]} \\ &\leqq D(\mathfrak{D}^*_{\omega+1}(\mathfrak{G})) = \{E\}\,, \end{aligned}$$

was mit (6) in Widerspruch steht. Es muss also $\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}^*_{\omega+1}(\mathfrak{G})$ sein.

---

1) Im folgenden soll $\mathfrak{R}$ immer solche Gruppe bedeuten.

2) Die zusammenhändgende Komponente, welche das Einselement enthält. Sie bildet bekanntlich einen Normalteiler.

Man beweist nun $\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ folgendermassen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) &= \bigwedge_n \mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = \bigwedge_n \mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \quad \text{(nach (4'))}\\ &= \Big(\bigwedge_n \mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G})\Big)\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \quad \text{(nach der Kompaktheit von } \mathfrak{G}\text{)}\\ &= \mathfrak{D}^*_\omega(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\,.\end{aligned}$$

Genan so zeigt man $\mathfrak{Z}^*_\omega(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})=\mathfrak{Z}^*_\omega(\mathfrak{G})\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ und damit ist der Hilfssatz 2 in allen Teilen bewiesen.

Nun definieren wir auflösbare bzw. nilpotente topologische Gruppen. $\mathfrak{G}$ heisst *topologisch auflösbar* wenn für irgendeine Ordnungszahl ξ $\mathfrak{D}^*_\xi(\mathfrak{G})=e$[1] ist, und *topologisch nach unten bzw. nach oben nilpotent* wenn für irgendeine Ordnungszahl ξ $\mathfrak{Z}^*_\xi(\mathfrak{G})=e$ bzw. $\mathfrak{z}^*_\xi(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$ gilt. Gilt zwar $\mathfrak{D}^*_\xi(\mathfrak{G})=e$ ($\mathfrak{Z}^*_\xi(\mathfrak{G})=e$ oder $\mathfrak{z}^*_\xi(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$), $\mathfrak{D}^*_\eta\neq e$ ($\mathfrak{Z}^*_\eta(\mathfrak{G})\neq e$ oder $\mathfrak{z}^*_\eta(\mathfrak{G})\neq\mathfrak{G}$) für $\eta<\xi$, so soll ξ die Klasse der auflösbaren (nach unten oder nach oben nilpotente) Gruppe $\mathfrak{G}$ heissen. Falls es nur um endliche Gruppen handelt, so fallen bekanntlich die beiden Begriffen der nach unten und der nach oben nilpotenten Gruppen zusammen und nilpotente Gruppe besitzt nach unten dieselbe Klasse wie nach oben. Das gilt aber in unserem Falle nicht. Wir geben in der Tat nachher Beispiele von Gruppen, die nach unten aber nicht nach oben nilpotent sind und umgekehrt.

Da wir im folgenden immer mit topologischen Gruppen zu tun haben, wollen wir zukünftig das Wort "topologisch" in den Ausdrücken wie "topologische auflösbare oder nilpotente Gruppen" und den Stern in den Bezeichnungen wie $\mathfrak{D}^*_\xi$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_\xi$, $\mathfrak{z}^*_\xi$ fallen lassen, wenn es kein Furcht von Misverständnis steht.

Aus Hilfssätzen 1, 2 schliesst man sofort folgende Sätze.

Satz 1. Eine abgeschlossene Untergruppe einer auflösbaren bzw. nach unten nilpotenten topologischen Gruppe ist wieder auflösbar bzw. nach unten nilpotent. Eine Faktorgruppen nach einem abgeschlossenen Normalteiler einer nach oben nilpotenten topologischen Gruppen ist wieder nach oben nilpotent.

Satz 2. Eine kompakte Gruppe $\mathfrak{G}$ ist genau dann auflösbar bzw. nach unten nilpotent, wenn $\mathfrak{D}_\omega(\mathfrak{G})=e$ bzw. $\mathfrak{Z}_\omega(\mathfrak{G})=e$ gilt. Faktorgruppen nach abgeschlossenen Normalteiler einer kompakten auflösbaren bzw. nach unten nilpotenten Gruppe sind wieder auflösbar bzw. nach unten nilpotent.

Aus der Definition folgt ferner leicht der

Satz 3. Das direkte Prokukt endlichvieler oder abzählbarer kompakten auflösbaren Gruppen ist wieder auflösbar. Dasselbe gilt auch für nach unter oder nach oben nilpotente Gruppen.

Wir untersuchen nun die Struktur der kompakten nach unten nilpotenten Gruppen. Dazu beweisen wir zunächst den

---

1) e bedeutet das Einselement und zugleich auch die Einheitsgruppe.

Satz 4. Die 1-Komponente $\mathfrak{G}_0$ einer kompakten auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ ist abelsch.

Beweis. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{G}_0$ auch auflösbar. Wir können also $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0$ annehmen, und haben nur zu beweisen, dass eine zusammenhängende kompakte auflösbare Gruppe abelsch ist. Da es dann aber für ein beliebiges Element $g\neq e$ eine stetige Darstellung D von $\mathfrak{G}$ mit $D(g)\neq E$ gibt, so genügt es zu zeigen, dass jede stetige Darstellung von $\mathfrak{G}$ abelsch ist. Wir können also wieder von vornherein annehmen, dass $\mathfrak{G}=D(\mathfrak{G})$ ist, d.h. dass $\mathfrak{G}$ eine kompakte Liesche Gruppe ist. Nun gilt nach der Voraussetzung

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{D}_0(\mathfrak{G})\geqq\mathfrak{D}_1(\mathfrak{G})\geqq\mathfrak{D}_2(\mathfrak{G})\geqq\cdots\cdots \quad \geqq\mathfrak{D}_\omega(\mathfrak{G})=e\,,$$
$$\bigwedge_n \mathfrak{D}_n(\mathfrak{G})=\mathfrak{D}_\omega(\mathfrak{G})=e\,.$$

Nach Hilfssatz 3 gilt also von einem n an

$$\mathfrak{D}_n(\mathfrak{G})=\mathfrak{D}_{n+1}(\mathfrak{G})=\cdots \quad =\mathfrak{D}_\omega(\mathfrak{G})=e\,.$$

$\mathfrak{G}$ ist mithin eine zusammenhängende, kompakte, und im Sinne der Lieschen Theorie auflösbare Gruppe, ist also bekanntlich abelsch.

Für eine nach unten nilpotenten Gruppe können wir noch mehr sagen. Es gilt nämlich

Satz 5. Die 1-Komponent $\mathfrak{G}_0$ einer kompakten nach unten nilpotenten Gruppe $\mathfrak{G}$ ist im Zentrum von $\mathfrak{G}$ enthalten.

Beweis. Genau wie im vorigen Beweis dürfen wir $\mathfrak{G}$ als Liesche Gruppe annehmen. Da $\mathfrak{G}$ offenbar auflösbar ist, so ist $\mathfrak{G}_0$ nach Satz 4 eine zusammenhängende kompakte abelsche Liesche Gruppe, also direktes Produkt endlichvieler Gruppen $\mathfrak{K}_i$, welche der mod. 1 reduzierten additiven Gruppe $\mathfrak{K}$ aller reellen Zahlen isomorph sind[1].

$$\mathfrak{G}_0=\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2\times\mathfrak{K}_3\times\cdots\times\mathfrak{K}_m\,,\quad \mathfrak{K}_i\cong\mathfrak{K}\quad (i=1,2,\cdots,\mathrm{m}).$$

Die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ können also durch "Koordinaten" dargestellt werden:

$$h\leftrightarrow(h_1,h_2,\cdots,h_m)\quad (h_i,\ \mathrm{mod.}\ 1). \tag{8}$$

Die Transformation xhx^{-1} durch ein Element x aus $\mathfrak{G}$ induziert dann in $\mathfrak{G}_0$ einen Automorphismus, welcher durch eine ganzzahlige Matrix $A(x)$ dargestellt wird:

$$xhx^{-1}\leftrightarrow(\mathrm{h}_1\, h_2,\cdots\cdots,h_m)A(x)\,. \tag{9}$$

Aus (8), (9) ergibt sich

$$(x,h)=xhx^{-1}h^{-1}\leftrightarrow(h_1,h_2,\cdots\cdots,h_m)\,(A(x)-E) \tag{10}$$

und daraus durch n-malige Kommutatorbildung

$$(x,(x,\cdots(x,h))\cdots)\leftrightarrow(h_1,h_2,\cdots,h_m)\,(A(x)-E)^n.$$

Man sieht aber genau so wie im Beweis des Satzes 4, dass für genügend grosses n

1) Vgl. L. Pontrjagin, Topological groups (1939), S. 170.

$\mathfrak{Z}_n(\mathfrak{G})=e$ stattfindet. Für beliebige h, x ist dann der n-te Kommutator $(x, (x,\cdots(x, h)\cdots)$ immer gleich dem Einselement und daraus folgt

$$(A(x)-E)^n=0\,.$$

Die Eigenwerten von $A(x)$ sind mithin sämtlich gleich 1. Da aber $x\to A(x)$ offenbar eine Darstellung der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ gibt, so schliesst man sofort

$$A(x)=E, \quad \text{also} \quad xhx^{-1}=h\,,$$

w.z.b.w.

Wir untersuchen nun die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, d.h. 0-dimensionale kompakte nach unten nilpotente Gruppe.

Eine 0-dimensionale kompakte Gruppe heisst eine p-Gruppe, wenn es der Limes einer $\mathfrak{G}_\nu$-adischen Reihe von endlichen p-Gruppen ist. Eine Untergruppe $\mathfrak{P}$ einer 0-dimensionalen kompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ heisst eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{P}$ eine maximale p-Gruppe in $\mathfrak{G}$ ist. Unter diesen Begriffsbildungen hat v. Dantzig die Sylowsätze in der Theorie der endlichen Gruppen auf die topologischen Gruppen übertragen.[1] Er hat z. B. bewiesen, dass alle p-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ einarder konjugiert sind. Für die nach unten nilpotenten Gruppen beweisen wir nun folgende Sätze über Sylowgruppen.

Hilfssatz 4. Wenn $\mathfrak{G}$ nach unten nilpotent ist, so ist $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt seiner Sylowgruppen.

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ und

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{N}_1>\mathfrak{N}_2>\mathfrak{N}_3>\cdots, \qquad \bigwedge_n \mathfrak{N}_n=e$$

eine Reihe offener (und zugleich abgeschlossener) Normalteiler von $\mathfrak{G}$, welche ein Umgebungssystem in $\mathfrak{G}$ bestimmt. Es lässt sich dann leicht zeigen, dass $\mathfrak{P}\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_i$ eine p-Sylowgruppe der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$ ist und dass man umgekehrt jede p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ in solcher Weise als $\mathfrak{G}_\nu$-adischen Limes der p-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$ erhält. Setzt man nun $\mathfrak{G}$ als nach unten nilpotent voraus, so sind $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$ sämtlich endliche nilpotente Gruppen, also direkte Produkte ihrer Sylowgruppen. Daraus und aus dem oben Gesagten folgt sofort, dass $\mathfrak{G}$ selbst direktes Produkt der Sylowgruppen ist.

Hilfssatz 5. Jede p-Gruppe ist nach unten nilpotent.

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}$ eine p-Gruppe und $\mathfrak{N}_i$ seien wie oben in (11) ein Umgebungssystem bildende, offene Normalteiler von $\mathfrak{P}$. Nach Definition sind $\mathfrak{P}/\mathfrak{N}_i$ immer endliche p-Gruppen. Daraus folgt.

$$\mathfrak{Z}_\omega(\mathfrak{P})\leqq\mathfrak{N}_i \qquad (i=1, 2,\cdots)\,, \text{ also } \mathfrak{Z}_\omega(\mathfrak{P})=e\,.$$

Satz 2 und Hilfssätze 4, 5 können wir in folgendem Satz zusammenfassen.

---

1) D. van Dantzig, Zur topologischen Algebra III. Comp. Math. Vol. 3 (1936).

Satz 6. Dafür, dass eine 0-dimensionale kompakte Gruppe nach unten nilpotent sei, ist notwendig und hinreichend, dass sie direktes Produkt ihrer Sylowgruppen ist.

Nach diesem Satz reduziert sich die Untersuchung der Strukten der 0-dimensionalen kompakten nach unten nilpotenten Gruppe in einem gewissen Sinne auf die der Struktur der endlichen p-Gruppen.

Bei dieser Gelegenheit sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass sich verschiedene Definitionen und Sätze in der Theorie der endlichen Gruppen auf dem Falle der 0-dimensionalen kompakten Gruppen übertragen lassen. So sind z. B. die Definition der Φ-Untergruppe und daran anschliessendes Kriterium für das Nilpotentsein einer Gruppe[1] auf unserem Fall anwendbar.

Nun gehen wir zu nach oben nilpotenten Gruppen über.

Satz 7. Eine 0-dimensionale kompakte nach oben nilpotente Gruppe ist auch nach unten nilpotent.

Beweis. Es sei $\mathfrak{G}$ eine solche Gruppe und eine Reihe offener Normalteiler $\mathfrak{N}_i$ sei wie oben im Beweis von Hilfssatz 4 gewält. Nach Satz 1 ist jede Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$ nach oben nilpoient. Da es aber eine endliche Gruppe ist, so ist es auch nach unten nilpotent. Es ist also $\mathfrak{Z}_\omega(\mathfrak{G}) \leq \mathfrak{N}_i$ und daraus folgt $\mathfrak{Z}_\omega(\mathfrak{G}) = e$.

Es gibt aber 0-dimensionale kompakte Gruppen, welche nach unten nilpotent, aber nicht nach oben nilpotent sind. Wir zeigen tatsächlich nachher, dass es eine p-Gruppe gibt, welche kein Zentrum (ausser dem Einselement) besitzt. Um die Untersuchung der Struktur der kompakten nach oben nilpotenten Gruppen weiter zu führen, studieren wir zunächst Liesche Gruppen.

Hilfssatz 6. Eine zusammenhängende kompakte nach oben nilpotente Liesche Gruppe ist abelsch.

Beweis. $\mathfrak{G}$ sei eine solche Gruppe. Wir zeigen zunächst, dass dim. $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G}) \geqq 1$ gilt, falls $\mathfrak{G}$ nicht endlich ist. Man setze voraus dim. $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G}) = 0$. $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G})$ ist dann diskret und kompakt, also eine endliche Gruppe. Es ist dann sicher $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{z}_2(\mathfrak{G})$, denn sonst wäre $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{z}_2(\mathfrak{G}) = \dots \quad = \mathfrak{G}$ endlich entgegen der Voraussetzung. Es gibt also ein Element g_0 mit $g_0 \notin \mathfrak{z}_1(\mathfrak{G})$, $g_0 \in \mathfrak{z}_2(\mathfrak{G})$, und $g \rightarrow (g_0, g)$[2] für beliebiges g aus $\mathfrak{G}$ liefert dann eine stetige Abbildung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G})$. Das Bild von $\mathfrak{G}$ ist dabei einerseits zusammenhängend, andererseits aber als Teilmenge von $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G})$ diskret und enthält sicher das Einselement. Es muss also mit diesem zusammenfallen und $(g_0, g) = e$ sein für alle g in $\mathfrak{G}$. Das bedeutet aber dass g_0 $\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G})$ angehört entgegen der Wahl von g_0.

---

1) Vgl. z. B. H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie (1937), S. 44, 107.

2) Klammer bedeutet Kommutatorbildung.

Wenn wir statt $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{G}/\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G})$ betrachten, so folgt nach Obigem, dass entweder $\mathfrak{G}/\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G})$ endlich ist oder dim $\mathfrak{z}_2(\mathfrak{G})/\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G})\geqq 1$ gilt. So fortfahrend für $\mathfrak{G}/\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{z}_2(\mathfrak{G}),\dots$ erkennt man schliesslich, dass es eine natürliche Zahl n mit $\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$ gibt. Eine nach oben nilpotente Gruppe mit einer endlichen Klasse ist aber auch nach unten nilpotent und umgekehrt.[1] $\mathfrak{G}$ ist also auch nach unten nilpotent, folglich nach Satz 5 abelsch.

Hilfssatz 7. Die 1-Komponente $\mathfrak{G}_0$ einer kompakten nach oben nilpotenten Lieschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist abelsch.

Beweis. Nach Hilfssatz 6 genügt es zu zeigen, dess auch $\mathfrak{G}_0$ nach oben nilpotent ist. Wir konstruieren dazu eine Reihe von Normalteiler $\mathfrak{H}_\xi$ in $\mathfrak{G}_0$ folgendermassen. Es sei $\mathfrak{H}_0=e$ und $\mathfrak{H}_\eta(\eta<\xi)$ sei schon definiert. Wenn $\xi=\eta+1$ ist, so soll $\mathfrak{H}_\xi/\mathfrak{H}_\eta$ aus denjenigen Elementen von $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{H}_\eta$ bestehen, welche mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_\eta$ elementweise vertauschbar sind. Ist dagegen ξ eine Limeszahl, so setzen wir $\mathfrak{H}_\xi=\overline{\bigvee_{\eta<\xi}\mathfrak{H}_\eta}$. Es gilt dann wie leicht ersichtlich

$$\mathfrak{z}_\xi(\mathfrak{G}_0)\geqq\mathfrak{H}_\xi\,.$$

Es genügt daher zu beweisen, dass für irgendein ξ $\mathfrak{H}_\xi=\mathfrak{G}_0$ wird. Wir setzen also voraus dass dies nicht der Fall ist und leiten daraus einen Widerspruch her. Nach der Annahme gibt es eine Ordnungszahl η mit

$$\mathfrak{H}_\eta=\mathfrak{H}_{\eta+1}=\cdots\,,\qquad \mathfrak{H}_\eta\neq\mathfrak{G}_0\,. \tag{12}$$

Setzt man $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_\eta=\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{H}_\eta=\mathfrak{G}_0^*$, so folgt aus (12)

$$\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G}^*)\frown\mathfrak{G}_0^*=e\,.$$

Nun sei $\mathfrak{z}_{n-1}(\mathfrak{G}^*)\frown\mathfrak{G}_0^*=e$ schon bewiesen. Aus $h\in\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}^*)\frown\mathfrak{G}_0^*$ ergibt sich dann für beliebiges $g\in\mathfrak{G}^*$

$$(h,g)\in\mathfrak{z}_{n-1}(\mathfrak{G}^*)\frown\mathfrak{G}_0^*=e\,,\qquad (h,g)=e\,,$$

also

$$h\in\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G}^*)\frown\mathfrak{G}_0^*=e\,,\qquad h=e\,.$$

Es gilt somit

$$\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}^*)\frown\mathfrak{G}_0^*=e\,,\qquad n=1,2,\dots$$

Aus

$$\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}^*)\mathfrak{G}_0^*/\mathfrak{G}_0^*\cong\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}^*)/\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}^*)\frown\mathfrak{G}_0^*=\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}^*)$$

folgt dann

$$\text{Ordnung }\mathfrak{G}^*/\mathfrak{G}_0^*\geqq\text{Ordnung }\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}^*)\,.$$

Man beachte dabei dass $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{G}_0^*\cong\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ eine endliche Gruppe ist. Da aber andererseits $\mathfrak{G}^*$ nach oben nilpotent ist und

$$\mathfrak{z}_1(\mathfrak{G}^*)<\mathfrak{z}_2(\mathfrak{G}^*)<\cdots\,,\qquad \text{Ordnung }\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}^*)\to\infty$$

gilt, so ergibt sich ein Widerspruch.

1) Vgl. H. Zassenhaus, loc. cit. S. 119.

Aus diesem Hilfssatz folgert man sofort, dass eine kompakte nach oben nilpotente Liesche Gruppe immer auflösbar (sogar mit einer endlichen Klasse) ist.

Satz 8. Eine kompakte nach oben nilpotente Gruppe ist auflösbar. Ihre 1-Komponente ist also abelsch.

Beweis. Jede stetige Darstellung solcher Gruppe ist nach Hilfssatz 7 auflösbar und hieraus folgt der Satz unmittelbar.

Wir kehren wieder zu kompakten Lieschen Gruppen zurück.

Hilfssatz 8. Es sei $\mathfrak{G}$ eine kompakte nach oben nilpotente Liesche Gruppe und $\mathfrak{G}_0$ ihre 1-Komponente. Es ist dann

$$\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) \geq \mathfrak{G}_0$$

und für eine gewisse natürliche Zahl n gilt

$$\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G} .$$

Beweis. Wir zeigen zunächst durch Induktion

$$\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0 , \quad n=1, 2, \cdots . \tag{13}$$

Dazu setzen wie voraus $\mathfrak{z}_{\omega+1}(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0 \neq \mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0$ und leiten daraus einen Widerspruch her. Da $\mathfrak{z}_{\omega+1}(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0 / \mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0$ eine kompakte abelsche Liesche Gruppe ist, so gibt es ein Element a, mit

$$a \in \mathfrak{z}_{\omega+1}(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0 , \quad a^p \in \mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0 , \quad a \notin \mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0 , \tag{14}$$

wobei p eine gewisse Primzahl ist. Wenn man die 1-Komponente von $\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})$ mit $\mathfrak{z}_{\omega,0}(\mathfrak{G})$ bezeichnet, so ist bekanntlich $\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})/\mathfrak{z}_{\omega,0}(\mathfrak{G})$ eine endliche Gruppe und aus $\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) = \overline{\bigvee_l \mathfrak{z}_l(\mathfrak{G})}$ folgt dann

$$\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) = \mathfrak{z}_{\omega,0}(\mathfrak{G}) \cdot \mathfrak{z}_l(\mathfrak{G}) \tag{15}$$

für gewisse natürliche Zahl l. $\mathfrak{z}_{\omega,0}(\mathfrak{G})$ ist aber eine zusammenhängende kompakte abelsche Liesche Gruppe, also direktes Prokukt von mit $\mathfrak{R}$ isomorphen Gruppen. Indem wir also a durch geeignetes $a = ah$, $h \in \mathfrak{z}_{\omega,0}(\mathfrak{G})$ ersetzen, können wir sogar annehmen dass a^p in $\mathfrak{z}_l(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0$ enthalten ist. Wir bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ mit $\sigma, \tau, \cdots$ Die Transformation durch ein Element aus der Restklasse σ gibt in $\mathfrak{G}_0$ einen Automorphismus, den wir wieder mit σ bezeichnen. $\mathfrak{F}$ ist als endliche nilpotente Gruppe direktes Prokukt von einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{F}_p$ und einer Gruppe $\mathfrak{F}'$ deren Ordnung f' zu p prim ist:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_p \times \mathfrak{F}' .$$

Nach (14) gilt nun für beliebiges σ

$$a^\sigma \equiv a \qquad \text{mod. } \mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0 ,$$

und daraus folgt

$$\prod_{\sigma \in \mathfrak{F}'} a^\sigma \equiv a^{f'} \not\equiv e \qquad \text{mod. } \mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0 .$$

$b=\prod\limits_{\sigma\in\mathfrak{F}'} a^\sigma$ erfüllt also

(16) $\qquad b\notin\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}),\quad b^p\in\mathfrak{z}_l(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0,\quad b^\sigma=b$ für beliebiges σ aus $\mathfrak{F}'$.

Nun bilden diejenige Elemente h aus $\mathfrak{G}_0$, welche $h^p\in\mathfrak{z}_l(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$, $h^\sigma\equiv h$ mod. $\mathfrak{z}_l(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$ für beliebiges σ aus $\mathfrak{F}'$ erfüllen, einen $\mathfrak{z}_l(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$ enthaltenden Normalteiler $\mathfrak{H}$. Da aber $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{z}_l(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$ als kompakte abelsche Liesche Gruppe nur endlichviele Elemente von der Ordnung p enthält, ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{z}_l(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$ eine endliche p-Gruppe, deren einzelene Elemente gegen den Automorphismen von $\mathfrak{F}'$ invariant bleiben. Transformationen durch beliebige Elemente aus $\mathfrak{G}$ geben also für $\mathfrak{H}/\mathfrak{z}_l(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$ nur Automorphismen von p-Potenzordnungen. Daraus ergibt sich sofort, dass es eine natürliche Zahl m gibt, so dass $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{z}_{l+m}(\mathfrak{G})$ enthalten ist. b muss dann als Element von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{z}_{l+m}(\mathfrak{G})$, also natürlich in $\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})$ enthalten sein, was mit (16) in Widerspruch steht. Wir hahen also

(17) $$\mathfrak{z}_{\omega+1}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0=\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$$

bewiesen. Es sei nun schon

$$\mathfrak{z}_{\omega+n-1}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0=\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$$

bewiesen. Wir wählen beliebig h aus $\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$. Es ist dann für beliebiges g

$$(h,g)\in\mathfrak{z}_{\omega+n-1}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0=\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0.$$

Dies zeigt aber dass h in $\mathfrak{z}_{\omega+1}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0=\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0$ enthalten ist, also

$$\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0=\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0.$$

Damit ist (13) bewiesen. Nach (13) gilt nun

(18) $$\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G})\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_0\cong\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G})/\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0=\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G})/\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0.$$

Da aber $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ endlich ist, muss es einmal

$$\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G})\mathfrak{G}_0=\mathfrak{z}_{\omega+n+1}(\mathfrak{G})\mathfrak{G}_0=\cdots.$$

eintreten. Mit (18) zusammen ergibt sich dann

$$\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G})=\mathfrak{z}_{\omega+n+1}(\mathfrak{G})=\ldots\ldots=\mathfrak{G}$$

und nach (13) haben wir

$$\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0=\mathfrak{z}_{\omega+n}(\mathfrak{G})\frown\mathfrak{G}_0=\mathfrak{G}\frown\mathfrak{G}_0=\mathfrak{G}_0,$$

also

$$\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\geqq\mathfrak{G}_0,$$ w. z. b. w.

Hilfssatz 10. Keine kompakte nach oben nilpotente Liesche Gruppe besitzt die Klasse ω.

Bemerkung. Es gibt eine 0-dimensionale kompakte nach oben nilpotente Gruppe von der Klasse ω; z. B. das direkte Produkt aller endlichen p-Gruppen.

Beweis. Es sei $\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$. Aus $\mathfrak{G}\geqq\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G})\mathfrak{G}_0\geqq\mathfrak{G}_0$ und aus der Endlichkeit von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ folgt

$$\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G})\mathfrak{G}_0=\mathfrak{z}_{n+1}(\mathfrak{G})\mathfrak{G}_0=\cdots$$

für eine gewisse natürliche Zahl n. $\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})=\overline{\bigvee_i \mathfrak{z}_i(\mathfrak{G})}$ ergibt dann

$$\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G})\mathfrak{G}_0=\mathfrak{G}\,.$$

Nun ist aber $\mathfrak{G}/\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}) \cong \mathfrak{G}_0/\mathfrak{z}_n(\mathfrak{G}) \frown \mathfrak{G}_0$ nach Satz 8 abelsh, somit $\mathfrak{z}_{n+1}(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$.

Wir zeigen nun, dass es immer eine kompakte nach oben nilpotente Liesche Gruppe gibt, welche die Klasse $\xi=\omega+n$, $n=1, 2,\dots$ besitzt.

Es sei $\mathfrak{K}$ wie vorher die Gruppe der reellen Zahlen mod. 1, und σ derjenige Automorphismus von $\mathfrak{K}$, welcher jedes x von $\mathfrak{K}$ mit seinem Inverse $-x$ vertauscht. Wir setzen

$$\mathfrak{G}=\{\mathfrak{K}, a\}^{1)},\ a^2=e,\ axa^{-1}=x^\sigma=(-x),\ \text{für } x\in\mathfrak{K}\,.$$

Es zeigt sich leicht

$$\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})=\mathfrak{K}=\mathfrak{G}_0\,,\qquad \mathfrak{z}_{\omega+1}(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}\,,$$

d. h. dass $\mathfrak{G}$ die Klasse $\omega+1$ besitzt. Dieses Beispiel zeigt zugleich dass eine kompakte nach oben nilpotente Gruppe nicht immer nach unten nilpotent ist, denn man beweist leicht

$$\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})=\mathfrak{Z}_2(\mathfrak{G})=\cdots\ =\mathfrak{K}\,.$$

Dagegen ist eine kompakte nach unten nilpotente Liesche Gruppe immer auch nach oben nilpotent, da solche Gruppe eine endliche Klasse besitzt, wie es im Beweis von Satz 5 bemerkt ist.

Wir konstruieren nun eine Gruppe mit der Klasse $\omega+n$. Es sei $\mathfrak{F}$ eine endliche 2-Gruppe mit der Klasse n. Das Zentsum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{F}$ bestehe aus zwei Elemente e, σ. Durch

$$e\to 1\,,\qquad \sigma\to -1$$

wird eine Darstellung von $\mathfrak{z}$ gegeben. Die von dieser Darstellung induzierte Darstellung von $\mathfrak{F}$ sei mit $D(\mathfrak{F})$ bezeichnet. Der Grad von $D(\mathfrak{F})$ sei m. Diè Matrizen von $D(\mathfrak{F})$ haben lauter ganzrationale Komponenten. Wir setzen also

$$\mathfrak{G}_0=\mathfrak{K}_1\times\mathfrak{K}_2\times\ \cdots\ \times\mathfrak{K}_m\,,\ \ \mathfrak{K}_i\cong\mathfrak{K}\ \ (i=1, 2,\dots, m)$$

und definieren für beliebiges σ aus $\mathfrak{F}$ einen Automorphismus von $\mathfrak{G}_0$ durch

$$(x_1, x_2,\dots, x_m)^\sigma=(x_1, x_2,\dots, x_m)D(\sigma)\quad (x_i \text{ mod. } 1).$$

Indem man dann $\mathfrak{G}_0$ durch $\mathfrak{F}$ mit einem zerfallenden Faktorensystem erweitert, erhält man eine Gruppe $\mathfrak{G}$, welche die verlangte Eigenschaft besitzt. Für $\mathfrak{G}_1=\{\sigma, \mathfrak{G}_0\}$ beweist man nämlich durch Induktion

$$\mathfrak{z}_l(\mathfrak{G}_1)\geqq \mathfrak{z}_l(\mathfrak{G})\,,\qquad l=1, 2,\dots$$

Es ist aber wie leicht ersichtlich $\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}_1)=\mathfrak{G}_0$, also

$$\mathfrak{G}_0\geqq \mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\,.$$

Andererseits folgt aus Hilfssatz 9

$$\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G})\geqq \mathfrak{G}_0\,,$$

1) $\{\mathfrak{K}, a\}$ bedeutet die durch a erweiterte Obergruppe von $\mathfrak{K}$.

folglich

$$\mathfrak{z}_\omega(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}_0 .$$

Die Klasse von $\mathfrak{G}$ muss also gerade $\omega + n$ sein.

Wir haben also bewiesen den

Satz 9. Die Klasse ξ einer kompakten nach oben nilpotenten Lieschen Gruppe ist gleich einer der Zahlen

$$1, 2, 3, \cdots, \qquad \omega+1, \omega+2, \cdots$$

Ist umgekehrt ξ einer solcher Zahlen gleich, so gibt es eine kompakte nach oben nilpotente Liesche Gruppe mit der Klasse ξ.

Indem wir direktes Produkt von Gruppen mit der Klassen $\omega + n$ $(n=1, 2, \ldots)$ bilden, erhalten wir eine kompakte nach oben nilpotente Gruppe mit der Klasse $\omega 2$. Wenn man in oben erwähnten Beispielen die Gruppe $\mathfrak{K}$ durch geeignete kompakte abelsche 2-Gruppe ersetzt, kann man auch 0-dimensionale kompakte nach oben nilpotente Gruppen mit der Klasse $\omega + n (n=1, 2, \ldots)$ bzw. $\omega 2$ konstruieren.

Schliesslich geben wir ein Beispiel der kompakten p-Gruppe, welche kein Zentrum besitzt. Dass es bei abstrakten Gruppen solche p-Gruppen gibt, ist schon von R. Baer bemerkt worden[1]. Die von ihm gegebene p-Gruppe ist aber nicht nach unten nilpotent und man kann in ihn keine kompakte Topologie einführen. Wir konstruieren eine Reihe von endlichen p-Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ mit Homomorphismen

$$\mathfrak{G}_1 \leftarrow \mathfrak{G}_2 \leftarrow \mathfrak{G}_3 \leftarrow \cdots$$

und als deren Limes eine kompakte p-Gruppe $\mathfrak{G}$, welche kein Zentrum besitzt.

Wenn es erlaubt ist, dass $\mathfrak{G}$ Elemente mit der Ordnung p^∞ enthalten darf, so kann man sehr leicht solche Gruppe bilden[2]. Im folgenden soll aber sogar ein solches $\mathfrak{G}$ konstruiert werden, dass ihre Elemente wirklich endliche p-Potenzorddungen besitzen, und zwar deren Ordnungen p^2 nicht übersteigen.

Nun sei $\mathfrak{V}_1$ die p-dimensionale Vektorgruppe über dem Galoisfeld $GF(p)$, nämlich die additive Gruppe aller $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $x_i \in GF(p)$ und A_1 eine Matrix vom Grad p über $GF(p)$ der Form

1) Vgl. R. Baer, loc. cit.

2) Man nehme als $\mathfrak{G}_\nu$ die Gruppe aller Matrizen vom Grad ν über $GF(p)$ mit der Form

$$\begin{Bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\nu} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_{\nu-1\,\nu} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\, 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

wobei $a_{ij} (i<j)$ beliebiges Element von $GF(p)$ ist. Ordnet man jeder Matrix A von $\mathfrak{G}_{\nu+1}$ die von ersten ν Zeilen und ersten ν Spalten von A gebildeten Matrix A' von $\mathfrak{G}_\nu$ zu, so erhält man eine homomorphe Abbildung $\mathfrak{G}_\nu \leftarrow \mathfrak{G}_{\nu+1}$.

$$A_1=\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} p$$

Die Einheitsmatrix vom Grad p über $GF(p)$ sei mit E_1 bezeichnet. Indem wir für beliebiges $x=(x_1, x_2 \cdots, x_p)$ aus $\mathfrak{B}_1$

$$x^{\sigma_1}=(x_1, x_2, \cdots, x_p)A_1$$

setzen, erhalten wir einen Automorphismus σ_1 von $\mathfrak{B}_1$. Wir erweitern dann $\mathfrak{B}_1$ durch A_1 mit einem zerfallenden Faktorensystem und bezeichnen die so gewonnene Gruppe mit $\mathfrak{G}_1$:

$$\mathfrak{G}_1=\{A_1, \mathfrak{B}_1\} .$$

Aus $A_1^p=E_1$ folgt, dass $\mathfrak{G}_1$ eine endliche p-Gruppe ist und dass die Ordnung eines beliebigen Elementes von $\mathfrak{G}_1$ höchstens p^2 ist.

Nun seien $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ Matrizen vom Grad p^2 über $GF(p)$, welche die Formen

$$A_2^{(1)}=\left.\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_1 \end{pmatrix}\right\} p\text{-mal}, \qquad A_2^{(2)}=\left.\begin{pmatrix} E_1 & E_1 & & & \\ & E_1 & E_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & E_1 \\ & & & & E_1 \end{pmatrix}\right\} p\text{-mal}$$

besitzen, d. h.

$$A_2^{(1)}=A_1\times E_1, \qquad A_2^{(2)}=E_1\times A_1 \qquad \text{(Kroneckersches Produkt!)}$$

$A_2^{(1)}$ und $A_2^{(2)}$ sind einander vertauschbar und beide haben die Ordnung p. Sie erzeugen also eine abelsche Gruppe $\{A_2^{(1)}, A_2^{(2)}\}$ mit der Ordnung p^2. Wir erweitern nun genau so wie oben die p^2-dimensionale Vektorgruppe $\mathfrak{B}_2$ über $GF(p)$ durch $\{A_2^{(1)}, A_2^{(2)}\}$ und erhalten eine Gruppe

$$\mathfrak{G}_2=\{A_2^{(1)}, A_2^{(2)}, \mathfrak{B}_2\} .$$

$\mathfrak{G}_2$ ist offenbar eine endliche p-Gruppe und die Ordnung eines beliebigen Elementes von $\mathfrak{G}_2$ ist wieder hochstens p^2. Ausserdem kann man einen Homomorphismus von $\mathfrak{G}_2$ auf $\mathfrak{G}_1$ herstellen, indem man jeder Matrix von $\{A_2^{(1)}, A_2^{(2)}\}$ die von ihren ersten p-Zeilen und p-Spalten gebildeten Matrix zuordnet und jedem $x=(x_1, x_2, \cdots, x_{p^2})$ von $\mathfrak{B}_2$ den Vektor $x'=(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ von $\mathfrak{B}_1$ zuordnet. Es gibt also einen Homomorphismus von $\mathfrak{G}_2$ auf $\mathfrak{G}_1$:

$$\mathfrak{G}_1 \leftarrow \mathfrak{G}_2 .$$

Aus

$$A_3^{(1)}=A_1\times E_1\times E_1,\ A_3^{(2)}=E_1\times A_1\times E_1,\ A_3^{(3)}=E_1\times E_1\times A_1$$

und aus der p^3-dimensionalen Vektorgruppe $\mathfrak{B}_3$ über $GF(p)$ erhalten wir die Gruppe

$$\mathfrak{G}_3=\{A_3^{(1)}, A_3^{(2)}, A_3^{(3)}, \mathfrak{V}_3\}$$

und dann gegau so wie oben einen Homomorphismus

$$\mathfrak{G}_2 \leftarrow \mathfrak{G}_3 .$$

Die so definierte Reihe von endlichen p-Gruppe

$$\mathfrak{G}_1 \leftarrow \mathfrak{G}_2 \leftarrow \mathfrak{G}_3 \leftarrow \cdots$$

bestimmt bekanntlich eine kompakte Gruppe $\mathfrak{G}$. Da aber die Ordnung eines Elementes von $\mathfrak{G}_\nu$ immer hochstens p^2 ist, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{G}$.

Nun zeigen wir, dass das Zentrum von $\mathfrak{G}$ nur aus dem Einselement besteht. Nach Konstruktion gibt es offene Normalteiler $\mathfrak{N}_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$, so dass

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_\nu \cong \mathfrak{G}_\nu , \qquad \wedge\, \mathfrak{N}_\nu = e . \tag{19}$$

Wir betrachten z. B. $\mathfrak{G}_2$ und zeigen dass das Zentrum von $\mathfrak{G}_2$ der von

$$z_2=(0, 0, \cdots, 0, 1)$$

erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{V}_2$ gleich ist. Zunächst muss ein Zentrumselement von $\mathfrak{G}_2$ in $\mathfrak{V}_2$ enthalten sein, weil $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{V}_2$ einer Automorphismengruppe von $\mathfrak{V}_2$ isomorph ist. Aus

$$xA_2^{(1)}=x , \qquad xA_2^{(2)}=x$$

folgt dann sofort dass der Vektor x ein Vielfaches von z_2 ist. Genau so beweist man allgemein dass das Zentrum von $\mathfrak{G}_\nu$ die von

$$z_\nu=(0, 0, \cdots, 0, 1)$$

erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{V}_\nu$ ist.

Nun sei z ein Element aus dem Zentrum von $\mathfrak{G}$. z muss natürlich in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_\nu \cong \mathfrak{G}_\nu$ in der Restklasse von $\{z_\nu\}$ enthalten sein. Da aber diese Restklasse beim Homomorphismus $\mathfrak{G}_{\nu-1} \leftarrow \mathfrak{G}_\nu$ ins Einselement von $\mathfrak{G}_{\nu-1}$ abgebildet wird, so ist z in $\mathfrak{N}_{\nu-1}$ enthalten. Aus (19) folgt dann

$$z=e , \qquad\qquad \text{w. z. b. w.}.$$