22. *La géométrie des espaces métriques fondés sur la notion d'aire I.*

Par Hideyuki IWAMOTO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Nagoya.
(Comm. by T. TAKAGI, M. I. A., March 12, 1945.)

1. Le problème dont je vais m'occuper ici est la recherche des espaces métriques fondés sur l'intégrale multiple,

$$O=\int L(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}, \cdots, \frac{\partial^M x^i}{\partial u^{\lambda_1}\cdots\partial u^{\lambda_M}})\, du^1\cdots du^K, \ (1\leqq K\leqq N-1)$$ Dans le première partie de cette Note, nous allons étudier la géométrie fondée sur l'intégrale multiple

$$(1.1) \qquad O=\int L(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda})du^1\cdots du^K .$$

Considérons un espace de Riemann dont la forme quadratique fondamentale est :

$$ds^2=g_{ij}\, dx^i\, dx^j .$$

Un sous espace U^K dans V^N peut être défini par les équations paramétriques :

$$(1.2) \qquad x^i=x^i(u^1,\cdots, u^K) .$$

Alors, le volume d'une portion de surface (1.2) est donné par l'expression

$$O=\int L(x, \frac{\partial x}{\partial u})du^1\cdots du^K ,$$

où nous avons pose

$$L=\sqrt{det\| g_{\lambda\mu}\|}, \ g_{\lambda\mu}=p^i_\lambda p^j_\mu g_{ij}, \ p^i_\lambda=\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}$$

En définissent le tenseur $g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}$ par $g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}=g_{(i_1(j_1}\cdots g_{j_K)i_K)}$ on obtient

$$L^2=K\,!\, g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}\, p^{i_1\cdots i_K}\, p^{j_1\cdots j_K} ,$$

où nous avons pose

$$p^{i_1\cdots i_K}=p^{i_1}_{(1}\cdots p^{i_K}_{K)}.$$

Nous allons démontrer que les composantes $g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}$ sont les polynomes en L, $p^\lambda_i=\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial p^i_\lambda}$, $p^{\lambda}_{i}{}^{\mu}_{j}=\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial p^i_\lambda\, \partial p^j_\mu}$. Les relations

$$(L)^2=|p^i_\mu p^j_\mu g_{ij}| , \ p^i_\lambda=\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}$$

nous donnent

$$(1.3)\qquad \begin{cases} L_i^{\lambda}=Lg_{ij}\,g^{\lambda\mu}\,p_{\mu}^{j}, \\ L_{i\ j}^{(\lambda\ \mu)}=2(L)^{-1}L_i^{(\lambda}L_j^{\mu)} \\ \left(L_i^{\lambda}=\dfrac{\partial L}{\partial p_{\lambda}^{i}},\ L_{i\ j}^{\lambda\ \mu}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial p_{\lambda}^{i}\,\partial p_{\mu}^{j}}\right) \end{cases}$$

Les équations (1.3) nous donnent les relations

$$(1.4)\qquad F_i^{\lambda},\ F_{i\ j}^{(\lambda\ \mu)}=6L_i^{(\lambda}L_j^{\mu)},\cdots\left(F=\frac{1}{2}(L)^2\right)$$

En continuant de cette manière, on trouve

$$(1.5)\qquad F_{i_1\cdots i_\alpha}^{(\lambda_1\cdots\lambda_\alpha)}=\rho(\alpha)\alpha L^{2-\alpha}\,L_{i_1}^{(\lambda_1}\cdots L_{i_\alpha}^{\lambda_\alpha)},$$

$$F_{i_1\cdots i_\alpha\ j_1\cdots j_\beta}^{(\lambda_1\cdots\lambda_\alpha)\ (\mu_1\cdots\mu_\beta)}=\rho(\alpha)L^{2-\alpha}\,L_{i_1\ j_1}^{(\lambda_1\ (\mu_1}\cdots{}_{j_\beta}^{\mu_\beta)}\,L_{i_2}^{\lambda_2}\cdots L_{i_\alpha}^{\lambda_\alpha)}+\cdots$$

Les équations (1.3), (1.4) et (1.5) et

$$g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}=\tau\frac{\partial^{2K}F}{\partial p_{(1}^{i_1}\cdots\partial p_{K)}^{i_K}\,\partial p_{(1}^{j_1}\cdots\partial p_{K)}^{j_K}}$$

nous assurent que les composantes $g_{i_1\cdots i_K\,j_1\cdots j_K}$ sont les polynomes des variables $L,\ p_i^{\lambda},\ \dfrac{1}{L}L_{i\ j}^{\lambda\ \mu}$:

$$(1.6)\qquad g_{i_1\cdots i_K\,j_1\cdots j_K}=P_{i_1\cdots i_K\,j_1\cdots j_K}\left(L,\ p_i^{\lambda},\ \frac{1}{L}L_{ij}^{\lambda\mu}\right).$$

Dans le cas général nous définirons *a priori* le tenseur fondamental $g_{i_1\cdots i_K\,j_1\cdots j_K}$ par la formule (1.6).[1] *Les relations*

I. $\quad g_{i_1\cdots i_K\,j_1\cdots j_K}\,p^{i_1\cdots i_K}\,p^{j_1\cdots j_K}=(L)^2$

II. $\quad g_{i_1\cdots i_K\,j_1\cdots j_K}\,p^{j_1\cdots j_K}=(L)^2\,p_{i_1}^{(1}\cdots p_{i_K}^{K)}$

III. $\quad g_{i_1\cdots i_K\,j_1\cdots j_K;\,k}^{\ \ \lambda}\,p^{j_1\cdots j_K}=0$

sont très importantes.

Dans le cas $K=N-1$, les équations III nous assurent que les composantes $g_{i_1\cdots i_{N-1}\,j\cdots j_{N-1}}$ coincident avec le tenseur gg^{ij} de *E.* Cartan.

Il existe une connexion affine intrinsèquement liée au tenseur $g_{i_1\cdots i_K\,j_1\cdots j_K}$. Mais cette détermination est tres compliquée.

2. Considérons un vecteur X:

$$X(X_1,\cdots,X_N).$$

Soient $N-1$ vecteurs $x_{(1)},\cdots,x_{(N-1)}$ satisfaisant aux conditions:

$$X_i=\epsilon_{i\,i_2\cdots i_N}\,x_{(1)}^{i_2}\cdots x_{(N-1)}^{i_N}$$

La fonction $\mathfrak{A}$ définie par

$$\mathfrak{A}=\det\|x_{(\alpha_1)}^{i_1}\cdots x_{(\alpha K)}^{i_K}\,x_{(\beta_1)}^{j_1}\cdots x_{(\beta_K)}^{j_K}\,g_{i_1\cdots i_K\,j_1\cdots j_K}\|$$

est une fonction des $(2+K)\,N$ quantites $x^i,\ p_\lambda^i;\ X_1,\cdots,X_N$:

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(x^i,\ p_\lambda^i;\ X_1,\cdots,X_N).$$

Considerons dans l'espace affine $R_N(x,p)$ tangent en (x,p) une surface $\mathfrak{S}(x,p)$ définie par l'équation

1) La notation (...) représente l'opérateur de antisymétrisation.

$$\mathfrak{A}(X)=1.$$

Si la forme quadratique

$$g_{i_1\cdots i_K\, j_1\cdots j_K}\, X^{i_1\cdots i_K}\, X^{j_1\cdots j_K}$$

est positivement définie, la surface $\mathfrak{E}(x, p)$ est férmée. L'élément de volume de $\mathfrak{E}(x, p)$ est défine par

$$\omega=\rho\,|\,X\, dX\cdots dX\,|$$

La fonction $\rho(x, p)$ est définie par la condition

$$\int_{\mathfrak{E}}\omega=1.$$

Considérons $(N+1)$. $N/2$ intégrales abéliennes attachées à la surface $\mathfrak{E}(x, p)$:

(2.1) $$a_{ij}=\int_{\mathfrak{E}} X_i\, X_j\, \omega(d).$$

Les quantités a_{ij} sont les composantés d'une forme quadratique définie positive:

$$a_{ij}\, Z^i\, Z^j=\int(X_i\, Z^i)^2\,\omega(d)\geqq 0$$

Si $a_{ij}Z^iZ^j=0$, on a idéntiquement $X_iZ^i=0$. Le vecteur Z^i est donc nul. On peut donc définir la fonction ϕ de manière que

$$g_{ij}=\phi a_{ij},\quad (L)^2=|p^i_\lambda\, p^j_\mu\, g_{ij}|$$

Remarque. *Si V_N est un espace de Riemann, la fonction $\mathfrak{A}$ devient:*

$$\mathfrak{A}=(g g^{ij}X_iX_j)^{\binom{N-1}{K-2}}$$

Il est facile de voir que le tenseur fondamental de V_N coincident avec le tenseur g_{ij} défini en partant des intégrales (2.1):

$$(g)^{-1}g_{ij}=N\int X_iX_j\omega(d)\,.$$

3. Soit un repère naturel $[\mathfrak{E}_1,\cdots, \mathfrak{E}_N]$ associé a la variété $R_N(x, p)$. La connexion euclidienne est définie par

$$d\mathfrak{E}_i=\omega^j_i(d)\mathfrak{E}_j\,.$$

$\omega^j_i(d)$ sont les formes de Pfaff en dx, dp:

$$\omega^j_i(d)=C_{iK}^{j\lambda}\, dp^k_\lambda+\Gamma^j_{i\,k}\, dx^k\,.$$

Posons

$$\omega_{ij}(d)=g_{jk}\omega_i{}^k(d)\,.$$

La connexion étant euclidienne, on a

IV. $$dg_{ij}=\omega_{ij}(d)+\omega_{ji}(d)\,.$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial p^k_\lambda}g_{ij}=C_{ij}{}^\lambda_k+C_{ji}{}^\lambda_k\,,\quad \frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij}=\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik}\,.$$

Considérons en particulier un vecteur X dont les composantes contrevariantes resteront fixes. On aura :

$$DX^i = X^j C_j{}^{i\lambda}{}_k\, dp^k_\lambda\,, \quad dX^i = 0$$

Nous férons la convension (La convension de symétrie) que le produit scalaire (DX, Y) est symétrique par rappot aux vecteurs X et Y. Elle donnée les relations

V. $\quad C_{ijk}{}^\lambda = C_{jik}{}^\lambda\ .$

Considérons un nouveau tenseur Dp^i_λ défini par

$$Dp^i_\lambda = (\delta^i_j - p^i_\alpha p^\alpha_j)\ \ (dp^j_\lambda + p^h_\lambda (C^{j\lambda}_{hk} dp^\lambda_k + \Gamma^j_{hk} dx^k))$$

Posons

$$\omega^\lambda_i(d) = g_{ij} g^{\lambda\mu} Dp^j_\mu\ .$$

$\omega^\lambda_j(d)$ sont les composantes d'un tenseur. Soient les quantités définies par:

$$E^{\lambda\mu}_{i\ j} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L} L^{\lambda\mu}_{i\ j} - p^\lambda_i p^\mu_j + p^\mu_i p^\lambda_j + (g_{ij} - p^\alpha_i p^\beta_j g_{\alpha\beta}) g^{\lambda\mu}\right]$$

Le tenseur $\omega^\lambda_i(d)$ peut s'écrire:

$$\omega^\lambda_i(d) = E^{\lambda\mu}_{i\ j} dp^j_\mu + \Lambda^\lambda_{ij} dx^j$$

La forme quadratique $g_{i_1\cdots i_K\, j_1\cdots j_K}$ étant définie positive, il existe toujours un système des quantités $F^{i\ j}_{\lambda\mu}$ satisfaisant aux conditions

$$F^{i\ j}_{\lambda\mu} = F^{j\ i}_{\mu\lambda}\,, \quad F^{i\ j}_{\lambda\mu} p^\nu_j = 0\,, \quad F^{i\ j}_{\lambda\mu} E^{\mu\nu}_{j\ k} = \delta^\nu_\lambda (\delta^i_k - p^i_\alpha p^\alpha_k)\ .$$

Les quantités $\omega^i_\lambda(d)$ définies par

$$\omega^i_\lambda(d) = F^{i\ j}_{\lambda\mu} \omega^\mu_j(d)$$

sont de la forme:

$$\omega^i_\lambda(d) = (\delta^i_j - p^i_\alpha p^\alpha_j)(dp^j_\lambda + \Lambda^j_{\lambda k} dx^k)$$

La connexion d'éléments de la variété V_N est définie en partant de ω^i_λ.

VI. Les quantiés Γ^*_{ijk} définies par

$$\Gamma^*_{ijk} = \Gamma_{ijk} - C^{\ \mu}_{ijl} \Lambda^l_{\mu k}$$

sont symétriques par rapport aux i et k:

$$\Gamma^*_{ijk} = \Gamma^*_{kji}$$

On a, en tenant compte des relations IV, V, VI:

$$C^{\ \lambda}_{ijk} = \frac{1}{2} g_{ij;}{}^\lambda_k$$

$$2\Gamma^*_{ijk} = g^*_{ij;k} + g^*_{kj;i} - g^*_{ik;j}$$

où

$$g^*_{ij;k} = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Lambda^l_{\mu k} g_{ij;}{}^\mu_l\ .$$

4. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème **1.** *Pour qu'une variété à N-dimensions fondé sur la notion d'aire admette un tenseur fondamental g_{ij} satisfaisant aux conditions*

$$g_{i_1\cdots i_K\, j_1\cdots j_K} = g_{(i_1(j_1}\cdots g_{j_K)i_K)}$$

il faut et il suffit qu'on puisse trouver des fonctions g'_{ij} et $g^{\lambda\mu}$ telles qu'on ait

VII. $(L)^{-1}L_{i\ j}^{\lambda\mu}=p_i^\lambda p_j^\mu-p_i^\mu p_j^\lambda+g^{\lambda\mu}g''_{ij}, \quad det\|g^{\lambda\mu}\|=(L)^{-2}$,

$$rang\,\|g''_{ij}\|=N-K.$$

En tenant compte des relations I, II, III on voit que

VIII. $(L)^{-1}L_i^\lambda=g_{ij}g^{\lambda\mu}p_\mu^j$

IX. $(\delta_i^k-p_i^\alpha p_\alpha^k)p_\nu^h g_{kh\ j}^{\ \ \mu}=0$.

Dérivons VIII, et en substituant IX, on obtient

$$L_{i\ j}^{\lambda\mu}=L(p_i^\lambda p_j^\mu-p_i^\lambda p_j^\lambda+(g_{ij}-p_i^\alpha p_j^\beta g_{\alpha\beta})g^{\lambda\mu})$$

Si l'on suppose que l'espace admette les quantités g''_{ij} et $g^{\lambda\mu}$ liées par la relation VII, les composantes g_{ij} seront données par

$$g_{ij}=g''_{ij}+p_i^\alpha p_j^\beta g_{\alpha\beta}.$$

Nous arrivons donc au théorème suivant.

Théorème 2. *Si le tenseur* g_{ij} *défini par* (2.1) *satisfait aux équations*

$$g_{i_1\cdots ik\ j_1\cdots jk}=g_{(i_1(j_1}\cdots g_{jk)ik)}\,.$$

le tenseur $A_{i\ j}^{\lambda\mu}$ *défini par*

$$A_{i\ j}^{\lambda\mu}=2(\delta_i^k-p_i^\alpha p_\alpha^k)g^{\lambda\nu}p_\nu^h C_{kh\ j}^{\ \ \mu}$$

est nul.

On a aussi le

Théorème. 3. *A tout espace à* N-*dimensions fondé sur la notion d'aire à* K-*dimensions dont la forme de Legendre*

$$(\varphi,\varphi)=\left(\frac{1}{L}L_{i\ j}^{\lambda\mu}-p_i^\lambda p_j^\mu+p_i^\mu p_j^\lambda\right)\varphi_\lambda^i\varphi_\mu^j$$

est définie peut etrê associé d'une manière intrinséque un tenseur fondamental g_{ij} *satisfaisant aux conditions*

IIX. $\dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L}{\partial p_\lambda^i}=g_{ij}g^{\lambda\mu}p_\mu^j$

X. $\dfrac{1}{L}L_{i\ j}^{\lambda\mu}=p_i^\lambda p_j^\mu-p_i^\mu p_j^\lambda+(g_{ij}-p_i^\alpha p_j^\beta g_{\alpha\beta})g^{\lambda\mu}+A_{i\ j}^{\lambda\mu}$.

5. Le carré $(d\varphi)^2$ de l'angle entre deux éléments plans infiniment voisins de même centre se définira par la longuer du K.vecteur qui représente la différentielle absolue du K-vecteur simple associé:

$$Dp_{i_1\cdots ik}=dp_{i_1\cdots ik}-(d\log L)\,p^{i_1\cdots ik}$$

Si $A_{i\ j}^{\lambda\mu}=0$, on a

XI. $(d\varphi)^2=\hat{L}_{i\ j}^{\lambda\mu}dp_\lambda^i dp_\mu^j$,

où $\hat{L}$ est la forme de Legendre $L^{-1}L_{i\ j}^{\lambda\mu}-p_i^\lambda p_j^\mu+p_i^\mu p_j^\lambda$.

La courbure riemennienne de la métrique $(d\varphi)^2$ est

$$\Omega=g''_{il}g''_{jk}(g^{\lambda\nu}g^{\omega\mu}-g^{\lambda\mu}g^{\omega\nu})+g^{\lambda\omega}g^{\mu\nu}(g''_{ik}g''_{lj}-g''_{ij}g''_{kl})+g''_{il}S^{\lambda\omega\nu\mu}_{\ \ \ \ kj}+g^{\lambda\omega}S_{ilkj}^{\ \ \ \ \nu\mu}$$

où

$$S_{ijkh}^{\ \ \ \ \nu\mu}=C_{jnk}^{\ \ \ \nu}C_{i\ h}^{\ m\omega}-C_{jnh}^{\ \ \ \omega}C_{i\ k}^{\ m\nu},\quad S^{\lambda\mu\nu\omega}_{\ \ \ \ kh}=g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}p_\alpha^i p_\beta^j S_{ijkh}^{\ \ \ \ \nu\omega}$$

Si $S\equiv0$, la variété angulaire est une variété d'Einstein.