10. Über linearen Kontinuen.

Von Hidetaka TERASAKA.

Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M. I. A., Apr. 12, 1946.)

In der vorliegenden Note werde eine Klasse von kompakten linearen Kontinuen betrachtet, deren Punkte als eine naheliegende Verallgemeinerung der dyadischen Entwicklung der reellen Zanlen durch transfinite Folgen von Nullen und Einsen definiert sind. Es stellte sich heraus, dass es unter solchen Kontinuen unabzählbar viele gibt, die homogen sind, und die sich voneinander nach Stufen der Linearität unterscheiden. Die Aufzählung aller solchen homogenen Kontinuen ist bezielt. Die Sätze sind teils mit allerdings flüchtigen Beweisen, teils ohne Beweis angegeben.

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist der Versuch, die in § 4 dargelegten Hausdorffschen teilweise geordneten Räumen in einigen Punkten klarzumachen, weshalb wir ihnen einen Paragraphen separat gewidmet haben.

Herrn Professor T. Takagi spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus, indem ich vom Gespräch, das wir während seines Besuches bei unserem Seminar gehalten haben, viele Anregungen zu meiner Arbeit empfangen habe.

§ 1. *Definition des linearen Kontinuums L^α; L-Kontinuum.*

Es sei α eine Ordnungszahl und zwar eine Limeszahl. Man definiere den Punkt ξ durch die transfinite Folge vom Typus α von lauter Nullen und Einsen, d. h.

$$\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots) \quad (\lambda < \alpha), \quad x_\lambda = 0 \text{ oder } 1.$$

Dabei sollen zwei Punkte

$$\xi = (x_1, \ldots, x_\lambda, \ldots) \text{ und } \eta = (y_1, \ldots, y_\lambda, \ldots)$$

dann und nur dann gleich ($\xi = \eta$) sein, wenn

(i) entweder für alle λ: $x_\lambda = y_\lambda$,

(ii) oder für ein gewisses λ und für alle $\mu > \lambda$: $x_\lambda = 0$, $x_\mu = 1$ und $y_\lambda = 1$, $y_\mu = 0$

Es soll ferner $\xi < \eta$ sein, wenn $\xi \neq \eta$ und $x_\lambda \leqq y_\lambda$ gelten.

Durch diese Vorschrift erklärte Punkte bilden dann ein kompaktes lineares Kontinuum, das kurz *L-Kontinuum* genannt werden möge, und das mit L^α bezeichnet werden soll. Das gewöhnliche lineare Kontinuum, d. h. das Zahlenintervall $0 \leqq x \leqq 1$, ist offenbar ein L-Kontinuum ($\alpha = \omega$).

Bei gegebenem α wollen wir die Punkte ξ, deren "Koordinaten" x_λ von einem gewissen λ an lauter Nullen sind:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ \overset{\lambda}{0},\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots$$

α-rationale Punkte nennen. Die Menge aller α-rationalen Punkte von L^α ist offenbar überalldicht auf L^α.

§ 2. *Verallgemeinerung von L^α. Der lineare Produktraum.* Für gegebene Ordnungszahl α ($\neq 0$) seien $I_0, I_1, \ldots, I_\lambda, \ldots$ ($\lambda > \alpha$) eine transfinite Folge von linear geordneten Räumen. Falls α eine Limeszahl ist, verstehen wir unter

$$(I_0,\ I_1,\ \ldots,\ I_\lambda,\ \ldots)$$

den Raum, dessen Punkte

$$(\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_\lambda,\ \ldots) \quad , \text{ wobei } \xi_\lambda \varepsilon I_\lambda \text{ ist,}$$

durch dieselbe Vorschrift wie in § 1 definiert und linear angeordnet sind. Falls α keine Limeszahl ist, so ergänze man die Folge $I_0, \ldots, I_{\alpha-1}$ durch Nullen (d. h. durch die aus je einem einzigen Punkte bestehenden Räume) zu einer mit ω konfinalen Folge $I_0, \ldots, I_{\alpha-1}, 0, 0, \ldots$ und setze

$$(I_0,\ I_1,\ \ldots,\ I_{\alpha-1}) = (I_0,\ \ldots,\ I_{\alpha-1},\ 0,\ 0,\ \ldots)$$

Der auf diese Weise definierte Raum $(I_0, I_1, \ldots, I_\lambda, \ldots)$ soll *linearer Produktraum* heissen.

§ 3. *Spezielle lineare Produkträume.*

Satz 1. Es sei $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ eine Folge von L-Kontinuen und zwar sei $I_n = L^{\alpha_n}$. Dann ist $(I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots) = L^\alpha$.

Dies folgt aus den folgenden beiden Sätzen, deren erste einleuchtend ist.

Satz 2. Es seien I_n ($n = 0, 1, \ldots$) linear geordnete Mengen. Dann ist

$$(I_0,\ I_1,\ \ldots,\ I_n,\ \ldots) = \sum_{(\xi_0, \ldots, \xi_n)\, \varepsilon\, (I_0, \ldots, I_n)} I_{\xi_0, \ldots, \xi_n}$$

wobei $I_{\xi_0, \ldots, \xi_n} = (0, \ldots, 0, I_{n+1}, I_{n+2})$ und wobei wir unter $\sum_{(\xi_0, \ldots, \xi_n)\, \varepsilon\, (I_0, \ldots, I_n)}$ eine mit den Punkten von $(I_0, I_1, \ldots, I_n)$ "ordnungstreue" *Summierung von $I_{\xi_0, \ldots, \xi_n}$ verstehen.*

Satz 3. Es seien α und α_n ($n = 0, 1, \ldots$) Ordnungszahlen mit $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots$. Dann ist

$$L^\alpha = \sum_{(\xi_0, \ldots, \xi_n)\, \varepsilon\, (L^{\alpha_0}, \ldots, L^{\alpha_n})} I_{\xi_0, \ldots, \xi_n}$$

wobei $I_{\xi_0, \ldots, \xi_n}$ Intervall auf L^α ist.

Der Beweis von Satz 3 verläuft folgendermassen: Jeder Punkt von L^α lautet nach Definition

$$\underbrace{x_0,\ x_1,\ \ldots}_{\alpha_0},\ \underbrace{y_0,\ y_1,\ \ldots}_{\alpha_1},\ \underbrace{z_0,\ z_1,\ \ldots}_{\alpha_2},\ \ldots$$

(i) Jedem nicht rationalen Punkte $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ von L^{α_0} entsprechend bilden die sämtlichen Punkte von der Form

$$a_0, a_1, \dots, y_0, y_1, \dots, z_0, z_1, \dots, \dots \qquad (\text{für alle } y, z, \dots = 0, 1)$$

ein L-Kontinuum, das wir mit $I_{a_0}, \dots, a_n, \dots$ oder kurz mit I_{ξ_0} bezeichnen. wobei $\xi_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$

(ii) Jedem rationalen Punkte $a_0, a_1 \dots, \overset{\lambda}{1}, 0, 0, \dots = a_0, a_1, \dots, 0, 1, 1, \dots$ entsprechend bilden die sämtlichen Punkte sowohl von der Form

$$a_0, a_1, \dots, \overset{\lambda}{1}, 0, 0, \dots, y_0, y_1, \dots, z_0, z_1, \dots$$

als auch von der Form

$$a_0, a_1, \dots, \overset{\lambda}{1}, 1, 1, \dots, y_0, y_1, \dots, z_0, z_1, \dots$$

für alle $y, z, \dots = 0, 1$ ein Kontinuum, da

$$\begin{aligned} & a_0, a_1, \dots, \overset{\lambda}{1}, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, \dots \\ = \; & a_0, a_1, \dots, \overset{\lambda}{0}, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots, \dots \end{aligned}$$

Wir bezeichnen dieses Kontinuum mit $I_{a_0, a_1, \dots, 1, 0, \dots}$ oder kurz mit I_{ξ_0}, wobei $\xi_0 = a_0, a_1, \dots, \overset{\lambda}{1}, 0, 0, \dots$ gesetzt ist.

Zusammenfassend erhält man die Formel

$$L^a = \sum_{\xi_0 \in L^{a_0}} I_{\xi_0}$$

Auf den Fall (ii) Rücksicht nehmend, erhält man analogerweise

$$L_a = \sum_{(\xi_0, \xi_1) \in (L^{a_0}, L^a)} I_{\xi_0, \xi_1}$$

u. s. w.

§ 4. *Hausdorffsche teilweise geordnete Räume H^a.* Es sei a eine Anfangszahl. Zwei Punkte

$$\xi = (x_0, x_1, \dots, x_\lambda, \dots) \quad \text{und} \quad \eta = (y_0, y_1, \dots, y_\lambda, \dots) \; (\lambda < a),$$

wobei $x_\lambda, y_\lambda = 0, 1$, sollen dann und nur dann gleich sein, wenn für alle $\mu \geqq \lambda$ bei gewissem $\lambda < a$ $x_\mu = y_\mu$ gilt. Es soll $\xi < \eta$ sein, wenn $\xi \neq \eta$ und für alle $\mu \geqq \lambda$ bei gewissem $\lambda < a$ $x_\mu \leqq y_\mu$ gilt.

Der Raum, dessen Punkte auf diese Weise teilweise geordnet sind, heisse *Hausdorffscher teilweise geordneter Raum* oder kurz *H-Raum* und mit H^a be zeichnet werde.

In H^a gibt es beliebig viele, linear geordnete Menge T derart, dass sie bei Aufrechterhaltung der linearen Anordnung keiner Erweiterung mehr fähig ist durch Hinzufügung weiterer Punkte von H^a zu T. Solche gesättigte linear geordnete Menge ist dennoch, wie man leicht sieht, total zusammenhangslos. Nach der Ausfüllung der Lücken durch Dedekindsche Schnitte bekommt man erst ein Kontinuum.

Das einfachste H-Raum H^ω hat schon einige merkwürdige Eigenschaften. Betrachten wir z. B. eine gesättigte lineare Menge T auf H^ω. Jeder Folge von Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ auf T mit

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots < \beta_n < \ldots < \beta_2 < \beta_1$$

entsprechend, gibt es, wie Hausdorff gezeigt hat, immer noch ein weiteres Paar von Punkten ξ, η mit

$$\alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots < \xi < \eta < \ldots < \beta_n < \ldots < \beta_1,$$

woraus man schliesst, dass auf T eine transfinite Folge vom Typus Ω (Anfangszahl der Ordnungszahlen von der Machtigkeit $\mathfrak{c}$) $\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda, \ldots$ und eine vom umgekehrten Typus Ω^* $\ldots, \beta_\lambda, \ldots, \beta_1$ gibt derart, dass

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\lambda < \ldots < \beta_\lambda < \ldots < \beta_2 < \beta_1.$$

Darunter gibt es sicherlich eine gesättigte, die somit eine Lücke aufweist. Unter Heranziehung der Kontinuumshypothese folgert man daraus, dass die durch Ausfüllung der Lücken gewonnene Menge $\overline{T}$ von T ein Kontinuum ist, dessen Intervall mit dem L^{ω_1} homöomorph ist, wobei ω_1 die Anfangszahl der Ordnungszahlen dritter Klasse bedeutet.

Das Kontinuum L^{ω_1} ist indessen nicht homogen. Denn jeder ω_1-rationale Punkt und nur dieser ist der Punkt, gegen welchen eine Folge von abzählbar vielen Punkten konvergiert. Aus demselben Grunde kann im allgemeinen jedes L^α, dessen Ordnung $\alpha \geqq \omega_1$ ist, nicht homogen sein. Gibt es nun überhaupt unter L^α mit $\alpha < \omega_1$ homogenes Kontinuum ausser L^ω, d. h. das gewöhnliche Zahlenintervall? Diese Frage zu beantworten ist unser nächster Schritt.

§ 5. *Homogeneität.* Ein lineares Kontinuum heisse *homogen*, wenn zwei beliebige Intervalle desselben miteinander homöomorph sind. Um ein lineares Kontinuum $[\alpha\,\beta]$ mit den Endpunkten α, β als homogen zu erkennen, genügt es offenbar zu zeigen, dass für beliebigen, von α und β verschiedenen Punkt ξ von $[\alpha\,\beta]$ eine *ordnungstreue* Abbildung von $[\alpha\,\xi]$ auf $[\alpha\,\beta]$ hergestellt werden kann.

Wir haben nun

Satz 4. L^{ω^2} ist homogen.

Dies ist nach Satz 1 äquivalent mit folgendem

Satz 5 (Takagi)[1] *Es sei I das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ der reellen Zahlen x. Dann ist $(I, I, \ldots, I, \ldots)$ homogen.*

Beweis. Man setze $\alpha_0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $\alpha_1 = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ und sei $I = [\alpha_0\,\alpha_1]$. Nach dem soeben bemerkten hat man nur zu zeigen, dass für jeden

1) Diesen Satz, den ich in der Formulierung von Satz 4 vermutete, habe Prof. Takagi schon bewiesen, wie ich von ihm mündlich erfahren habe. Seinen Beweis weiss ich indessen nicht. Er soll zu seinem Unglück auf dieses "negative" Resultat gestossen haben, als er etwa durch die Homogeneitätseigenschaft das Zahlenintervall charakterisieren wollte.

von a_0 und a_1 verschiedenen $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \varepsilon [a_0 a_1]$ das Intervall $[a_0 \alpha]$ auf das ganze Intervall I abgebildet werden kann. Dies geschieht folgendermassen.

(i) Erster Fall; $\alpha = (a_0, 1, 1, \dots, 1, \dots)$, $a_0 \neq 0$. Man bilde das Zahlenintervall $0 \leqq x \leqq a$ homöomorph auf das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ durch eine strikt monotone Funktion $f(x)$ ab. Dann ist die Abbildung $(x_0, 1, 1, \dots) \rightarrow (f(x_0), 1, 1, \dots)$ das gewünschte.

(ii) Zweiter Fall: $\alpha = (0, 1, 1, \dots, 1, \dots)$. Schon die Abbildung $(0, x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x_1, x_2, \dots)$ leistet das gewünschte.

(iii) Dritter Fall: $\alpha = (a_0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, $a_0 \neq 0$. Es sei $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ eine gegen a_0 konvergierende, aufsteigende Folge von reellen Zahlen, d. h. $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots \rightarrow a_0$. Dann lässt das Intervall $[a_0 \ \alpha]$ die folgende Zerlegung zu.

$$[a_0 \alpha] = \sum_{0 \leqq x < x_1} I_x + \sum_{x_1 \leqq x < x_2} I_x + \dots + \sum_{x_n \leqq x < x_{n+1}} I_x + \dots$$

Da sich $[a_0 a_1]$ andererseits wie folgt zerlegen lässt (wozu vgl. Satz 2),

$$[a_0 a_1] = \sum_{0 \leqq x < 1} I_x + \sum_{0 \leqq x < 1} I_{1,\, x} + \dots + \sum_{0 \leqq x < 1} I_{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n},\, x} + \dots$$

und da $\sum\limits_{x_n \leqq x < x_{n+1}} I_x$ und $\sum\limits_{0 \leqq x < 1} I_{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n},\, x}$ miteinander homöomorph sind, folgt, dass $[a_0 \alpha]$ mit $[a_0 a_1]$ homöomorph ist.

(iv) Allgemeiner Fall: $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ lässt sich dann auf dien vorangehenden zurückführen.

Eine Verallgemeinerung diese Satzes ist der folgende

Satz 6. Ist I ein homogenes kompaktes lineares Kontinuum, so ist es auch mit $(I, I, \dots, I, \dots)$.

Der Beweis verläuft genau so wie oben bei Satz 5, auf Grund des folgenden einleuchtenden Satzes.

Satz 7. Jedes homogene kompakte lineare Kontinuum genügt dem Hausdorffschen ersten Abzählbarkeitsaxiome.

§ 6. *Stufen der Linearität.* L^{ω^2} ist als homogenes lineares Kontinuum höherstufig als das gewöhnliche Zahlenintervall in dem Sinne, dass sich das letzte zwar in L^{ω^2} ordnungstreu einbetten lässt, aber nicht umgekehrt; eine Tatsache, die sich schon daraus erklärt, dass L^{ω^2} aus unabzählbar vielen, paarweise fremden Intervallen besteht. Wir haben im allgemeinen

Satz 8. $(I, I, \dots, I, \dots)$ *ist höherstufig als I, wo I ein kompaktes lineares Kontinuum ist.*

Dies folgt unmittelbar aus folgendem

Satz 9. Es seien I, J kompakte lineare Kontinuen. Dann ist (I, J) *auf keinem Teil von I ordnungstreu abbildbar.*

Beweis. Nach Satz 2 ist nämlich $(I, J) = \sum_{\xi \varepsilon I} J_\xi$. Wir nehmen an, dass sich (I, J) auf eine Teilmenge T von I ordnungstreu abbilden lässt. Jedem I_ξ entspricht dann in I ordnungstreu eine Menge T_ξ. Es sei I_ξ das kleinste, T_ξ enthaltende Intervall von I. Ersichtlich sind für verschiedene ξ, η die Intervalle I_ξ, I_η zueinander fremd. Auf I haben wir somit paarweise fremde Intervalle I_ξ gefunden, die ordnungstreu den Punkten ξ von I zugeordnet werden. Diese Zuordnung sei $\xi = f(I_\xi)$. Die auf diese Weise erklärte Zuordnung $f(I_\xi)$ ist als Funktion des Arguments I_ξ offenbar stetig.

Es seien nun α, β $(\alpha < \beta)$ die beiden Endpunkten von I Für α gilt dann symbolisch geschrieben $\alpha = f(I_\alpha) < I_\alpha$, d. h., dass für alle $\xi \varepsilon I_\alpha$ $\alpha < \xi$ gilt mit eventueller Ausnahme bei dem kleineren Endpunkte von I_α, falls nämlich $\alpha \varepsilon I_\alpha$. Da $f(I_\xi)$ stetig ist, so gilt dann für hinreichend nahe an α gelegenes ξ ebenfalls $f(I_\xi) < I_\xi$. Es sei ξ_0 die obere Grenze solcher Punkte. Da ξ_0 selbst noch der Beziehung $f(I_{\xi_0}) < I_{\xi_0}$ genügen muss, müsste ξ_0 mit β zusammenfallen (andernfalls wäre ξ_0 keine obere Grenze), während dies auch nicht der Fall sein kann, da für β $f(I_\beta) = \beta < I_\beta$ offenbar unmöglich ist. Damit ist der Satz 9 bewiesen.

Die Sätze 6 und 8 fassen wir zusammen in

Satz 10 (Der erste Produktsatz). *Ist I ein homogenes kompaktes lineares Kontinuum, so ist das kompakte lineare Kontinuum $(I, I, \ldots, I, \ldots)$ homogen und höherstufig als I.*

Wir haben also erkannt, dass, wenn mit $I^{(0)}$ das Zahlenintervall $0 \leqq x \leqq 1$ bezeichnet wird, das L-Kontinuum $I^{(1)} = (I^{(0)}, I^{(0)}, \ldots)$ homogen und höherstufig als $I^{(0)}$ ist, sodann, dass $I^{(2)} = (I^{(1)}, I^{(1)}, \ldots)$ homogen und höherstufig als $I^{(1)}$, u. s. w. Auf diese Weise fortschreitend haben wir eine Folge von homogenen L-Kontinuen $I^{(0)}, I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots$, wo jedes Glied höherstufig als die vorangehenden ist. Können wir nun einen noch höherstufigen L-Kontinuum erhalten? Dies geschieht in der Tat mit Hilfe des folgenden

Satz 11 (Der zweite Produktsatz). *Es seien I_n $(n = 0, 1, \ldots)$ homogene L-Kontinuen, für welche I_{n+1} höherstufig als I_n. Dann ist das L-Kontinuum $(I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots)$ homogen und höherstufig als alle I_n.*

Der Beweis stützt sich auf folgende Sätze.

Satz 12. Es sei $n > m$. Dann ist $(I^{(n)}, I^{(m)})$ mit $I^{(m)}$ homöomorph.

Denn, erstens ist klar, dass $(I^{(n)}, I^{(n+1)}) = I^{(n+1)}$, weil (assoziatives Gesetz!)

$$(I^{(n)}, I^{(n+1)}) = (I^{(n)}, (I^{(n)}, I^{(n)}, \ldots) = (I^{(n)}, I^{(n)}, I^{(n)}, \ldots) = I^{(n+1)}.$$

Durch Wiederholung dieses Einsaugungsprinzips hat man dann

$$(I^{(n)}, I^{(m)}) = (I^{(n)}, I^{(n+1)}, \ldots, I^{(m-1)}, I^{(m)}) = I^{(m)}.$$

Satz 13. Es sei $n < m$. Dann lässt sich $I^{(m)}$ in $I^{(n)}$ viele Intervalle, und *zwar* $I^{(n)}$, *ordnungstreu zerlegen.* Genauer:

$$I^{(m)} = \sum_{\xi \varepsilon I(n)} I_{\xi}{}^{(m)}.$$

Denn, $I^{(n+1)} = (I^{(n)}, I^{(n)} \ldots) = \sum_{\xi \varepsilon I(n)} (\xi, I^{(n)}, I^{(n)}, \ldots) = \sum_{\xi \varepsilon I(n)} I_{\xi}{}^{(n)}$

$$I^{(n+2)} = (I^{(n+1)}, I^{(n+1)}, \ldots) = \Big(\sum_{\xi \varepsilon I(n)} I_{\xi}{}^{(n)}, I^{(n+1)}, \ldots\Big) = \sum_{\xi \varepsilon I(n)} (I_{\xi}{}^{(n)}, I^{(n+1)}, \ldots)$$

$$= (\text{nach Satz 12}) \sum_{\xi \varepsilon I(n)} (I^{(n+1)}, \ldots)_{\xi} = \sum_{\xi \varepsilon I(n)} I_{\xi}{}^{(n+2)}, \text{ u. s. w.}$$

Der zweite Produktsatz besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil bezieht sich auf die Homogeneitätsfrage, deren Beweis genau so verläuft wie bei Satz 5 oder 6. Der Beweis des zweiten Teiles bietet keine Schwierigkeit.

Auf Grund dieses Satzes ist $I^{(\omega)} = (I^{(0)}, I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(n)}, \ldots)$ homogen und höherstufig als $I^{(n)}$. Mittels des ersten Produktsatzes bekommt man sodann der Reihe nach $I^{(\omega+1)}, I^{(\omega+2)}, \ldots$, u. s. w.

Um für jede Ordnungszahl α von zweiter Zahlenklasse das entsprechende L-Kontinuum herzustellen, benötigt man noch den

Satz 14 (Allgemeiner Produktsatz). *Es seien* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *eine nicht absteigende Folge von Ordnungszahlen von zweiter Zahlenklasse und sei* $I^{(\alpha_n)}$ *für jedes natürliche n wohldefinierte homogene L-Kontinuum von der Stufe* α_n. *Dann ist* $(I^{(\alpha_0)}, I^{(\alpha_1)}, \ldots, I^{(\alpha_n)}, \ldots)$ *wiederum homogen und höherstufig als alle* $I^{(\alpha_n)}$.

Falls alle α_n gleich α sind, so sei $(I^{(\alpha)}, I^{(\alpha)}, \ldots) = I^{(\alpha+1)}$

Falls es unendlich viele verschiedene α^n gibt, so sei $\alpha = \lim \alpha_n$. Es ist $(I^{(\alpha_1)}, I^{(\alpha_2)}, \ldots, I^{(\alpha_n)}, \ldots) = \lim I^{(\alpha_n)} = (I^{(0)}, I^{(1)}, \ldots, I^{(\alpha_n)}, I^{(\alpha+1)}, \ldots, I^{(\alpha_n)}, \ldots) = I^{(\alpha)}$.

Die ersten homogenen L-Kontinuen L^{α} lauten der Reihe nach

$$I^{(0)} = L^{\omega},\ I^{(1)} = L^{\omega^2},\ I^{(2)} = L^{\omega^3}, \ldots, I^{(\omega)} = L^{\omega^{\omega}},$$
$$I^{(\omega+1)} = L^{\omega^{\omega}\cdot\omega}, \ldots$$

Zwischen L^{ω} und L^{ω^2}; L^{ω^2} und L^{ω^3}, u. s. w. liegt kein weiteres homogenes L-Kontinuum. Nicht homogen ist z. B. $L^{\omega\cdot 2}$, die in der Gestalt (L^{ω}, L^{ω}) geschrieben werden kann. Das sieht man aus dem folgenden

Satz 15. Es seien L^{α} *und* L^{β} *L-Kontinuen mit* $\alpha > \beta$. *Dann ist* (L^{α}, L^{β}) *nicht homogen.*

Wäre nämlich (L^{α}, L^{β}) homogen, so wäre (L^{α}, L^{β}), da L^{β} ein Intervall auf demselben ist, mit L^{β} homöomorph. Da nun $\beta < \alpha$, so ist L^{β} auf eine Teilmenge von L^{α} ordnungstreu abbildbar. Also müsste (L^{α}, L^{β}) auf eine Teilmenge von L^{α} ordnungstreu abbildbar sein, im Widerspruch mit Satz 9.

Mit Hilfe des Satzes 15 und des allgemeinen Produktsatzes schliesst man nun ohne Mühe

Satz 16. (Charakterisierung des homogenen L-Kontinuums). *Das L-Kon-*

tinuum L^{ω} ist dann und nur dann homogen, wenn erstens α von zweiter Zahlenklasse ist und wenn zweitens die wohlgeordnete Menge vom Typus α die Eigenschaft hat, dass jedes Anfangsstück derselben kleiner ist als das ihm entsprechende Endstück.

Wir haben damit endgültig alle homogenen Kontinuen unter den kompakten linearen Kontinuen L^{α} bestimmt. Ob es ausser L^{α} noch andere homogene kompakte lineare Kontinuen gibt, ist eine offene Frage, deren Erledigung freilich eben nicht so leicht zu sein scheint.

Hikone, den 11. März, 1946.