

64. Zur konformen Abbildung vielfach zusammenhängender Gebiete.

Von Yūsaku KOMATU.

Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., Dec. 12, 1946.)

1. Wir betrachten zunächst schlichte konforme Abbildungen eines $n + 2$ fach zusammenhängenden Normalgebietes auf der z -Ebene, welches dadurch entsteht, daß man einen konzentrischen Kreisring $R_0 < |z| < R_1$ längs n Kreisbogen mit dem Mittelpunkt $z = 0$ aufschlitzt, auf Gebiete auf der w -Ebene, die durch ganze Peripherien $|w| = P_0$ und $|w| = P_1$ sowie n irgendwelche Randkomponenten innerhalb des Kreisringes $P_0 < |w| < P_1$ begrenzt; dabei sollen beide Peripherien der Kreisringe miteinander entsprechen. Setzen wir zur Abkürzung

$$(1) \quad R = \frac{R_1}{R_0}, \quad P = \frac{P_1}{P_0},$$

so gilt nach einem Satze von Grötzsch¹⁾ die Verzerrungsungleichung

$$(2) \quad R \leq P,$$

und wenn wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf derartige Abbildungen beschränken, welche die Randkomponenten $|z| = R_0$ und $|w| = P_0$ miteinander entsprechen lassen, besteht das Gleichheitszeichen in (2) dann und nur dann, falls die Abbildung durch $w = cz$ vermittelt wird; hierin bedeutet c eine Konstante mit absolutem Betrag P_0/R_0 . Bei jeder Extremalabbildung entsteht also das Bildgebiet aus dem Urgebiet durch eine Drehstreckung um den Koordinatenursprung. Aus der letztgenannten Tatsache mögen wir vermuten, daß, wenn ein Bildgebiet angenähert dieselbe Gestalt besitzt wie das Urgebiet, so das Verhältnis $R:P$ fast gleich Eins sein muß.

Andererseits können wir aber als Normalgebiet auf der z -Ebene statt eines Kreisbogenschlitzgebiet innerhalb eines Kreisringes auch ein Parallelschlitzgebiet mit der Neigung Null, d. h. ein längs einigen zur reellen Achse parallelen Strecken aufgeschlitztes Gebiet annehmen. Dann genügt jede schlichte Abbildungsfunktion solches Gebietes, welche um $z = \infty$ die Entwicklung der Gestalt

1) H. Grötzsch, Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung, I. Leibziger Ber. 80 (1928), 267-376; II. Ibid., 497-502. Vgl. auch E. Rengel, Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung. Schriften d. Math. Sem. u. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin I (1932/3), 141-162.

$$(3) \quad w = f(z) \equiv z + \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu} z^{-\mu}$$

besitzt, stets, wie de Possel²⁾ gezeigt hat, der Bedingung

$$(4) \quad \Re C_1 \leq 0.$$

Hierbei tritt das Gleichheitszeichen dann und nur dann auf, wenn die Abbildung durch eine Parallelverschiebung $w = z + C_0$ vermittelt wird.

In bezug auf die Abweichung der Größe $\Re C_1$ von ihrem Extremumwert 0 für solche Gebiet, dessen komplementäre Menge das Gesamthalt A besitzt, hat Tsuji³⁾ die Abschätzung

$$(5) \quad \Re C_1 \leq -\frac{A}{2\pi}$$

hergeleitet. Andererseits mögen wir diesmal wieder erwarten, daß bei angenannt parallelschlitzförmigen Begrenzungen eines Bildgebietes diese Größe $\Re C_1$ beinahe Null sein muß.

In dieser Note sollen wir die eben gestellten und verwandten Fragen quantitativ bejahend erledigen.

2. Wir nehmen nun ein $n + 2$ -fach zusammenhängendes *Kreisbogenschlitzgebiet innerhalb eines Kreisringes* auf der z -Ebene, welches dadurch entsteht, daß man einen konzentrischen Kreisring $R_0 < |z| < R_1$ aufschlitzt längs n gegeneinander punktfremden Schlitzbögen

$$S_{\nu}: \quad |z| = r_{\nu}, \quad \theta_{\nu} \leq \arg z \leq \theta_{\nu} + \gamma_{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Bei einer in diesem Gebiet regulär schlichten Abbildung $w = f(z)$, welche $|z| = R_0$ und $|z| = R_1$ zu $|w| = P_0$ bzw. $|w| = P_1$ ($P_0 < P_1$) entsprechen läßt, gehe das innere Ufer von S_{ν}

$$S_{\nu}^{(i)}: \quad |z| = r_{\nu} - 0, \quad \theta_{\nu} \leq \arg z \leq \theta_{\nu} + \gamma_{\nu}$$

und das äußere Ufer von S_{ν}

$$S_{\nu}^{(a)}: \quad |z| = r_{\nu} + 0, \quad \theta_{\nu} + \gamma_{\nu} \leq \arg z \leq \theta_{\nu}$$

in die Kurve $\Gamma_{\nu}^{(i)}$ bzw. $\Gamma_{\nu}^{(a)}$ auf der w -Ebene über. Der Einfachheit halber nehmen wir hierbei und auch im folgenden an, daß die Abbildungsfunktion $w = f(z)$ sich einschließlich der Randteile $S_{\nu}^{(i)}$ und $S_{\nu}^{(a)}$ stetig verhält.

Für jede im Grundgebiet *eindeutig* reguläre und einschließlich des Randes stetige Funktion $F(z)$ gilt im allgemeinen nach dem Cauchyschen Integralsatz die Gleichung

$$(6) \quad \int F(z) \frac{dz}{z} = 0,$$

2) R. de Possel, Zum Parallelschlitztheorem unendlich vielfach zusammenhängender Gebiete. Göttinger Nachr. (1931), 199-202.

3) M. Tsuji, Theory of conformal mapping of multiply connected domain. Japanese Journ. of Math. 18 (1943), 759-775; vgl. auch Y. Komatu, Einige Anwendungen der Verzerrungssätze auf Hydrodynamik. Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943), 454-461.

wo das Integral links über ganze Randkomponenten im positiven Sinne zu erstrecken ist. Bei unserem Falle kann man darin $F(z) = \lg \frac{f(z)}{z}$ setzen. Wir erhalten dann die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} \left(\lg \frac{f(R_1 e^{i\theta})}{R_1 e^{i\theta}} - \lg \frac{f(R_0 e^{i\theta})}{R_0 e^{i\theta}} \right) i d\theta + \sum_{\nu=1}^n \int_{\theta_\nu}^{\theta_\nu + \gamma_\nu} \left(\lg \frac{f((r_\nu - 0) e^{i\theta})}{r_\nu e^{i\theta}} - \lg \frac{f((r_\nu + 0) e^{i\theta})}{r_\nu e^{i\theta}} \right) i d\theta = 0.$$

Trennen wir daraus den imaginären Anteil, so erhalten wir die Relation

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{\theta_\nu}^{\theta_\nu + \gamma_\nu} \lg \left| \frac{f((r_\nu - 0) e^{i\theta})}{f((r_\nu + 0) e^{i\theta})} \right| d\theta = \lg \frac{R}{P},$$

wo die Bezeichnungen in (1) angenommen sind.

Bezüglich der Entfernungen der Punkte auf jeder Randkomponente bezeichnen wir den größten und kleinsten Wert von $|w|$ auf $\Gamma_\nu^{(i)}$ bzw. $\Gamma_\nu^{(a)}$ mit $M_\nu^{(i)}$ und $m_\nu^{(i)}$ bzw. $M_\nu^{(a)}$ und $m_\nu^{(a)}$. Da beide Kurven $\Gamma_\nu^{(i)}$ und $\Gamma_\nu^{(a)}$ die Endpunkte gemeinsam besitzen, so ist selbstverständlich $m_\nu^{(i)} \leq M_\nu^{(a)}$, $m_\nu^{(a)} \leq M_\nu^{(i)}$. Aus unserer Grundrelation (7) und der Grötzschischen Beziehung (2) entnehmen wir ohne weiteres die Ungleichung

$$(8) \quad \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{m_\nu^{(i)}}{M_\nu^{(a)}} \right)^{\gamma_\nu / 2\pi} \leq \frac{R}{P} \leq 1.$$

Jedes Gleichheitszeichen tritt hierbei nur dann auf, wenn die Abbildung in eine Drehstreckung um $z = 0$ ausartet, also

$$f(z) = cz \quad \text{mit} \quad |c| = \frac{P_0}{R_0}, \quad \frac{m_\nu^{(i)}}{M_\nu^{(a)}} = 1 \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

ist. Setzen wir ferner $M_\nu = \text{Max}(M_\nu^{(i)}, M_\nu^{(a)})$, $m_\nu = \text{Min}(m_\nu^{(i)}, m_\nu^{(a)})$, so ergibt sich offenbar

$$(9) \quad \prod_{\nu=1}^n \frac{m_\nu}{M_\nu} \leq \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{m_\nu}{M_\nu} \right)^{\gamma_\nu / 2\pi} \leq \frac{R}{P} \leq 1;$$

denn es ist stets $0 \leq \gamma_\nu < 2\pi$.

3. Wenn ein $n + 2$ -fach zusammenhängendes Radialschlitzgebiet innerhalb eines Kreisringes auf der z -Ebene als Grundgebiet normaler Gestalt angenommen ist, läßt sich auch ein ähnliches Resultat herleiten. Die Begrenzungen dieses Gebietes seien $|z| = R_0$ und $|z| = R_1$ ($R_0 < R_1$) sowie n innerhalb $R_0 < |z| < R_1$ gelegene Radialschlitze

$$S_\nu: \quad \arg z = \theta_\nu, \quad r_\nu \leq |z| \leq t_\nu r_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Bei einer in diesem Gebiet regulär schlichten Abbildung $w = f(z)$ entspreche $|z| = R_0$ und $|z| = R_1$ zu $|w| = P_0$ bzw. $|w| = P_1$, und ferner gehe das linke Ufer von S_ν

$$S_\nu^{(i)}: \quad \arg z = \theta_\nu + 0, \quad r_\nu \leq |z| \leq t_\nu r_\nu$$

und das rechte Ufer von S_ν

$$S_\nu^{(r)} \quad \arg z = \theta_\nu - 0, \quad t_\nu r_\nu \leq |z| \leq r_\nu$$

in die Bildkurve $\Gamma_\nu^{(l)}$ bzw. $\Gamma_\nu^{(r)}$ über. In diesem Falle können wir in (5) wieder

$F(z) = \lg \frac{f(z)}{z}$ annehmen. Damit erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \left(\lg \frac{f(R_1 e^{i\theta})}{R_1 e^{i\theta}} - \lg \frac{f(R_0 e^{i\theta})}{R_0 e^{i\theta}} \right) i d\theta \\ + \sum_{\nu=1}^n \int_{r_\nu}^{t_\nu r_\nu} \left(\lg \frac{f(r e^{i(\theta_\nu+0)})}{r e^{i\theta_\nu}} - \lg \frac{f(r e^{i(\theta_\nu-0)})}{r e^{i\theta_\nu}} \right) \frac{dr}{r} = 0,$$

und daraus ergibt sich nach Trennung des imaginären Anteils die *Relation*

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{r_\nu}^{t_\nu r_\nu} \arg \frac{f(r e^{i(\theta_\nu+0)})}{f(r e^{i(\theta_\nu-0)})} \frac{dr}{r} = \lg \frac{R}{P};$$

R und P bedeuten wieder die in (1) angegebenen Größen. In diesem Falle gilt aber die zu (2) entgegengesetzte Ungleichung nach Grötzsch

$$(11) \quad R \geq P;$$

demgemäß ist die rechte Seite von (10) stets nichtnegativ und ferner wird sie gleich Null dann und nur dann, wenn die Abbildung eine ausgeartete Gestalt $f(z) = cz$ mit konstantem c besitzt.

Diesmal bezeichnen wir den größten und kleinsten Wert von $\arg w$ auf $\Gamma_\nu^{(l)}$ bzw. $\Gamma_\nu^{(r)}$ mit $\Phi_\nu^{(l)}$ und $\varphi_\nu^{(l)}$ bzw. $\Phi_\nu^{(r)}$ und $\varphi_\nu^{(r)}$; hierbei und auch in (10) beude $\arg w = \arg f(r e^{i(\theta_\nu \pm 0)})$ natürlich ein auf $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu^{(l)} + \Gamma_\nu^{(r)}$ stetig fortgesetzten Zweig. Da die Endpunkte von $\Gamma_\nu^{(l)}$ - und $\Gamma_\nu^{(r)}$ gemeinsam sind, so ist selbstverständlich $\varphi_\nu^{(l)} \leq \Phi_\nu^{(r)}$, $\varphi_\nu^{(r)} \leq \Phi_\nu^{(l)}$. Wir schließen nun aus den Relationen (10) und (11) die *Abschätzung*

$$(12) \quad 1 \leq \frac{R}{P} \leq \prod_{\nu=1}^n t_\nu^{(\Phi_\nu^{(l)} - \varphi_\nu^{(r)})/2\pi}$$

Jedes Gleichheitszeichen gilt hierbei nur dann, wenn der triviale Fall

$$f(z) = cz \quad \text{mit} \quad |c| = \frac{P_0}{R_0}, \quad \Phi_\nu^{(l)} - \varphi_\nu^{(r)} = \frac{R}{P} - 1 = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

auftritt. Setzen wir ferner $\Phi_\nu = \text{Max}(\Phi_\nu^{(l)}, \Phi_\nu^{(r)})$, $\varphi_\nu = \text{Min}(\varphi_\nu^{(l)}, \varphi_\nu^{(r)})$, so erhalten wir speziell

$$(13) \quad 1 \leq \frac{R}{P} \leq \prod_{\nu=1}^n t_\nu^{(\Phi_\nu - \varphi_\nu)/2\pi}$$

Da aber definitionsgemäß $1 \leq t_\nu < R$ ($\nu = 1, \dots, n$) ist, so zieht die Beziehung (13) nach sich, daß auch die Ungleichung

$$(14) \quad R^{1 - \sum_{\nu=1}^n (\Phi_\nu - \varphi_\nu)/2\pi} \leq P \leq R$$

erfüllt werden muß.

4. Als $n+1$ -fach zusammenhängendes Grundgebiet normaler Gestalt kann man ein *Kreisbogenschlitz- oder Radialschlitzgebiet innerhalb eines Kreises*

$|z| < R_1$ annehmen. In diesen Fällen kann man statt der alten Normierungsbedingung, daß bei Abbildung die inneren Peripherien $|z| = R_0$ und $|w| = P_0$ miteinander entsprechen sollen, die neue Normierung für Abbildungsfunktionen:

$$f(0) = 0, \quad \left(\frac{f(z)}{z} \right)_{z=0} = f'(0)$$

ansetzen. Indem man sonstige Bezeichnungen erhalten bleibt, kann man dann die Gleichung

$$(15) \quad \int \lg \frac{f(z)}{z} \cdot \frac{dz}{z} = -2\pi i \lg f'(0)$$

benutzen, wo das Integral linker Hand über ganze Randkomponenten im positiven Sinne zu erstrecken ist. Auf Grund dieser Gleichung können wir den obigen Gedankengang wiederverfolgen. Aber wir können vielmehr kurz und gut auch den Grenzübergang

$$R_0 \rightarrow 0, \quad \frac{P_0}{R_0} \rightarrow |f'(0)|$$

vollziehen. Somit ergibt sich für beliebige Abbildungen von *Kreisbogenschlitzgebiet innerhalb des Kreises* $|z| < R_1$, bei welchen $|z| = R_1$ in $|w| = P_1$ übergeht, die Verzerrungsformel

$$(16) \quad \prod_{\nu=1}^n \frac{m_\nu}{M_\nu} \leq \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{m_\nu}{M_\nu} \right)^{r_\nu/2\pi} \leq \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{m_\nu^{(i)}}{M_\nu^{(a)}} \right)^{r_\nu/2\pi} \\ \leq \frac{R_1}{P_1} |f'(0)| = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{\theta_\nu}^{\theta_\nu+r_\nu} \lg \left| \frac{f((r_\nu-0)e^{i\theta})}{f((r_\nu+0)e^{i\theta})} \right| d\theta \right) \leq 1,$$

und für Abbildungen ähnlicher Art von *Radialschlitzgebiet innerhalb des Kreises* $|z| < R_1$ die Formel

$$(17) \quad 1 \leq \frac{R_1}{P_1} |f'(0)| = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{r_\nu}^{t_\nu r_\nu} \arg \frac{f(re^{i(\theta_\nu+0)})}{f(re^{i(\theta_\nu-0)})} \frac{dr}{r} \right) \\ \leq \prod_{\nu=1}^n t_\nu^{(\Phi_\nu^{(b)} - \varphi_\nu^{(r)})/2\pi} \leq \prod_{\nu=1}^n t_\nu^{(\Phi_\nu - \varphi_\nu)/2\pi}$$

Jedes Gleichheitszeichen tritt nur dann auf, wenn die Abbildung durch $w = cz$ mit $|c| = P_1/R_1$ vermittelt wird.

Bei Abbildungen von einem n -fach zusammenhängenden *Kreisbogenschlitz-* oder *Radialschlitzgebiet* kommt es auf ganz ähnliche Umstände an. In diesen Fällen können wir unter Normierungsbedingungen

$$f(0) = 0, \quad \left(\frac{f(z)}{z} \right)_{z=0} = f'(0); \quad f(\infty) = \infty, \quad \left(\frac{f(z)}{z} \right)_{z=\infty} = f'(\infty)$$

die Grenzübergänge

$$R_0 \rightarrow 0, \quad \frac{P_0}{R_0} \rightarrow |f'(0)|; \quad R_1 \rightarrow \infty, \quad \frac{P_1}{R_1} = |f'(\infty)|$$

vornehmen. In der Tat beträgt das im positiven Sinne erstreckte Integral hierbei gerade

$$\int \lg \frac{f(z)}{z} \frac{dz}{z} = 2\pi i \lg \frac{f(\infty)}{f(0)}.$$

Dieselben Resultate ergeben sich gleichfalls, indem man in entsprechenden Beziehungen (16) bzw. (17) die Größe P_1/R_1 durch $|f(\infty)|$ ersetzt.

5. Ähnliche Überlegungen lassen sich auch auf den Fall eines *Spiralbogenschlitzgebietes* verallgemeinern, welcher gesamte bisher behandelten Fälle als Grenzfälle enthält. Man nehme nämlich ein solches Grundgebiet auf der z -Ebene auf, das dadurch entsteht, daß man einen konzentrischen Kreisring $R_0 < |z| < R_1$ aufschlitzt längs n logarithmischen Spiralbogen, jede von denen auf der Kurve

$$(18) \quad \arg z - a \lg |z| = c_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

liegt. Wird etwa die Neigung a der Spiralschar als *positiv* angenommen, und werden die Grenzen jedes Schlitzbogens durch

$$\theta_\nu \leq \arg z \leq \theta_\nu + \gamma_\nu, \quad r_\nu \leq |z| \leq t_\nu r_\nu$$

geliefert, dann besteht die Beziehung

$$c_\nu = \theta_\nu - a \lg r_\nu = \theta_\nu + \gamma_\nu - a \lg (t_\nu r_\nu)$$

und also $\gamma_\nu = a \lg t_\nu$. Für Punkte $z = r e^{i\theta}$ aus unsrer Schar (18) gilt

$$\theta - a \lg r = c_\nu; \quad d\theta = a \frac{dr}{r}, \quad \frac{dz}{z} = i d\theta + \frac{dr}{r}.$$

Wir betrachten nun eine regulär schlichte Abbildung $w = f(z)$ vom Grundgebiet auf ein Gebiet, welches durch $|w| = P_0$ und $|w| = P_1$ sowie n sonstige innerhalb $P_0 < |w| < P_1$ gelegene Randkomponenten begrenzt ist; die innerste und äußerste Randperipherien sollen dabei miteinander entsprechen. Setzen wir nun der Einfachheit wegen

$$\rho_\nu(\theta) = \exp \frac{\theta - c_\nu}{a}, \quad \psi_\nu(r) = a \lg r + c_\nu,$$

so ergibt sich die Gleichung

$$(19) \quad 0 = \int \lg \frac{f(z)}{z} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \left(\lg \frac{f(R_1 e^{i\theta})}{R_1 e^{i\theta}} - \lg \frac{f(R_0 e^{i\theta})}{R_0 e^{i\theta}} \right) i d\theta \\ + \sum_{\nu=1}^n \left\{ \int_{\theta_\nu}^{\theta_\nu + \gamma_\nu} \left(\lg \frac{f(\rho_\nu(\theta) - 0) e^{i\theta}}{\rho_\nu(\theta) e^{i\theta}} - \lg \frac{f(\rho_\nu(\theta) + 0) e^{i\theta}}{\rho_\nu(\theta) e^{i\theta}} \right) i d\theta \right. \\ \left. + \int_{r_\nu}^{t_\nu r_\nu} \left(\lg \frac{f(r e^{i\psi_\nu(r) + 0})}{r e^{i\psi_\nu(r)}} - \lg \frac{f(r e^{i\psi_\nu(r) - 0})}{r e^{i\psi_\nu(r)}} \right) \frac{dr}{r} \right\}$$

Das Trennen des imaginären Anteils führt uns zur *Relation*

$$\Im \left\{ \frac{1 + ia}{2\pi a} \sum_{\nu=1}^n \int_{\theta_\nu}^{\theta_\nu + \gamma_\nu} \lg \frac{f(\rho_\nu(\theta) - 0) e^{i\theta}}{f(\rho_\nu(\theta) + 0) e^{i\theta}} d\theta \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (20) \quad &= \Im \left\{ \frac{1 + i\alpha}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{r_\nu}^{t_\nu r_\nu} \operatorname{lg} \frac{f(re^{i(\psi_\nu(r)+0)})}{f(re^{i(\psi_\nu(r)-0)})} \frac{dr}{r} \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \left\{ \int_{\theta_\nu}^{\theta_\nu + \gamma_\nu} \operatorname{lg} \left| \frac{f((\rho_\nu(\theta)-0)e^{i\theta})}{f((\rho_\nu(\theta)+0)e^{i\theta})} \right| d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{r_\nu}^{t_\nu r_\nu} \operatorname{arg} \frac{f(re^{i(\psi_\nu(r)+0)})}{f(re^{i(\psi_\nu(r)-0)})} \frac{dr}{r} \right\} = \operatorname{lg} \frac{R}{P};
 \end{aligned}$$

hierbei werden wiederum die Bezeichnungen (1) benutzt. Aus dieser Relation lassen sich entsprechende Abschätzungen herleiten. Bezeichnen wir z. B. den größten und kleinsten Wert von $|w|$ bzw. von $\operatorname{arg} w$ auf der Bildkurve von ν -ten auf (18) gelegenen Schlitz mit M_ν und m_ν bzw. Φ_ν und φ_ν , so gelangen wir zur Ungleichung

$$\begin{aligned}
 R \sum_{\nu=1}^n (\varphi_\nu - \Phi_\nu + \alpha \operatorname{lg} (m_\nu/M_\nu)) / 2\pi &\leq \prod_{\nu=1}^n \left\{ \left(\frac{m_\nu}{M_\nu} \right)^{\gamma_\nu/2\pi} t_\nu^{(\varphi_\nu - \Phi_\nu)/2\pi} \right\} \leq \frac{R}{P} \\
 (21) \quad &\leq \prod_{\nu=1}^n \left\{ \left(\frac{M_\nu}{m_\nu} \right)^{\gamma_\nu/2\pi} t_\nu^{(\Phi_\nu - \varphi_\nu)/2\pi} \right\} \leq R^{\varphi_\nu/2\pi \sum_{\nu=1}^n (\Phi_\nu - \varphi_\nu + \alpha \operatorname{lg} (M_\nu/m_\nu)) / 2\pi}
 \end{aligned}$$

Nebenbei bemerke man, daß durch Trennen des reellen Anteils aus der Gleichung (19) sich die folgende Relation ergibt:

$$\begin{aligned}
 &\Re \left\{ \frac{1 + i\alpha}{2\pi\alpha} \sum_{\nu=1}^n \int_{\theta_\nu}^{\theta_\nu + \gamma_\nu} \operatorname{lg} \frac{f((\rho_\nu(\theta)-0)e^{i\theta})}{f((\rho_\nu(\theta)+0)e^{i\theta})} d\theta \right\} \\
 (22) \quad &= \Re \left\{ \frac{1 + i\alpha}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{r_\nu}^{t_\nu r_\nu} \operatorname{lg} \frac{f(re^{i(\psi_\nu(r)+0)})}{f(re^{i(\psi_\nu(r)-0)})} \frac{dr}{r} \right. \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \left\{ - \int_{\theta_\nu}^{\theta_\nu + \gamma_\nu} \operatorname{arg} \frac{f((\rho_\nu(\theta)-0)e^{i\theta})}{f((\rho_\nu(\theta)+0)e^{i\theta})} d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{r_\nu}^{t_\nu r_\nu} \operatorname{lg} \left| \frac{f(re^{i(\psi_\nu(r)+0)})}{f(re^{i(\psi_\nu(r)-0)})} \right| \frac{dr}{r} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{arg} \frac{f(R_1 e^{i\theta})}{f(R_0 e^{i\theta})} d\theta.
 \end{aligned}$$

Bezüglich der Grenzfälle $R \rightarrow 0$, $P_0 / R_0 \rightarrow |f'(0)|$ oder danebst weiter $R_1 \rightarrow \infty$, $P_1 / R_1 \rightarrow |f'(\infty)|$ läßt es sich leicht begreifen.

Zum Schluß bemerke man noch, daß Kreisbogenschlitz- und Radialschlitzgebiet aus Spiralbogenschlitzgebieten durch Grenzübergängen $\alpha \rightarrow \infty$, $t_\nu = 1$ bzw. $\alpha \rightarrow 0$, $\gamma_\nu = 0$ erzeugt angesehen werden kann.

6. Wir betrachten jetzt ein n -fach zusammenhängendes *Parallelschlitzgebiet* auf der z -Ebene, dessen Berandung aus n Strecken

$$S_\nu: \quad \Re z = \beta_\nu, \quad \alpha_\nu \leq \Re z \leq \alpha_\nu + x_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

besteht, und die Familie derjenigen darin schlichten Funktionen $f(z)$, welche um $z = \infty$ in der Gestalt (3) dargestellt werden können. Dann ist $-C_1$ das Residuum an $z = \infty$ und deshalb gilt

$$\int f(z) dz = -2\pi i C_1;$$

hierbei ist das Integral in linker Hand wieder über den ganzen Rand im positiven Sinne zu erstrecken.

Setzt man nun $z = x + iy$, so wird dies

$$(23) \quad \sum_{\nu=1}^n \int_{a_\nu}^{a_\nu+x_\nu} (f(x+i(\beta_\nu+0)) - f(x+i(\beta_\nu-0))) dx = -2\pi i C_1$$

und folglich durch Trennen des imaginären Anteils ergibt sich weiter die *Relation*

$$(24) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{a_\nu}^{a_\nu+x_\nu} \Im (f(x+i(\beta_\nu+0)) - f(x+i(\beta_\nu-0))) dx = \Re C_1.$$

Die Bildkurven der oberen und unteren Ufer von S_ν seien $\Gamma_\nu^{(o)}$ bzw. $\Gamma_\nu^{(u)}$. Bezeichnet man ferner den größten und kleinsten Wert von $\Im w$ auf $\Gamma_\nu^{(o)}$ bzw. $\Gamma_\nu^{(u)}$ mit $K_\nu^{(o)}$ und $k_\nu^{(o)}$ bzw. $K_\nu^{(u)}$ und $k_\nu^{(u)}$, so ist selbstverständlich $k_\nu^{(o)} \leq K_\nu^{(o)}$, $k_\nu^{(u)} \leq K_\nu^{(u)}$. Aus unsrer Relation (24) und der de Posselschen Ungleichung (4) ergibt sich die *Abschätzung*

$$(25) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n (k_\nu^{(u)} - K_\nu^{(o)}) x_\nu \leq \Re C_1 \leq 0,$$

und jedes Gleichheitszeichen tritt hierbei nur dann auf, wenn die Abbildung durch eine Parallelverschiebung $f(z) = z + C_0$ geliefert wird. Bezeichnen wir ferner die Höhe, d. h. die Länge der Projektion auf der imaginären Achse jeder Randkomponente mit

$$h_\nu = \text{Osc } \Im w \equiv \text{Max}(K_\nu^{(o)}, K_\nu^{(u)}) - \text{Min}(k_\nu^{(o)}, k_\nu^{(u)}),$$

$w \in \Gamma_\nu$

so gilt die *Abschätzung*

$$(26) \quad -\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n h_\nu x_\nu \leq \Re C_1 \leq 0.$$

Diese Ungleichung läßt sich eine Ergänzung für Tsujisché Abschätzung (5).

Andererseits können wir ähnliche Resultate auch für die Größe $\Im C_1$ angeben. Zum Zwecke trennen wir aus (23) den reellen Anteil und erhalten somit die *Relation*

$$(27) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{a_\nu}^{a_\nu+x_\nu} \Re (f(x+i(\beta_\nu+0)) - f(x+i(\beta_\nu-0))) dx = \Im C_1.$$

Der größte und kleinste Wert von $\Re w$ auf $\Gamma_\nu^{(o)}$ bzw. $\Gamma_\nu^{(u)}$ sei $L_\nu^{(o)}$ und $l_\nu^{(o)}$ bzw. $L_\nu^{(u)}$ und $l_\nu^{(u)}$, und ferner die Schwankung von $\Re w$ auf $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu^{(o)} + \Gamma_\nu^{(u)}$ sei b_ν . Dann ergeben sich die *Beziehungen*

$$(28) \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n (l_\nu^{(o)} - L_\nu^{(u)}) x_\nu \leq \Im C_1 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n (L_\nu^{(o)} - l_\nu^{(u)}) x_\nu,$$

$$(29) \quad |\Im C_1| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n b_\nu x_\nu.$$

Aus der letzten Abschätzung folgt insbesondere eine merkwürdige Tatsache, daß C_1 *reell* sein muß, falls die Berandung des Bildgebietes lauter aus den zur imaginären Achse parallelen Schlitzern besteht.

Der Fall, wo das Grundgebiet allgemeiner die *Neigung* α besitzt, d. h. dessen gesamte Randstrecken auf der Geradenschar mit dem Richtungskoeffizienten α liegen, und wo die Normierung an $z = \infty$: $f(\infty) = \infty$ und $f'(\infty) = 1$ erhalten bleibt, kann sofort auf den soeben behandelten zurückgeführt werden. In der Tat gehört die Funktion $e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$ dann der eben betrachteten Familie. Dementsprechend werden die Größe $e^{-2i\alpha} C_1$ den entsprechenden Beziehungen genügen; hierbei bedeutet C_1 natürlich den Koeffizienten von z^{-1} der Laurentschen Entwicklung von $f(z)$ um $z = \infty$.