43. *Sur les espaces à connexion conforme normale dont les groupes d'holonomie fixent une sphere à un nombre quelconque de dimensions II.*

Par Kentaro YANO,

Institut Mathématique, Université de Tokyo,

et Shigéo SASAKI,

Institut Mathématique, Tôhoku Université, Sendai.

(Comm. by. S. KAKEYA, M. I. A., Sept. 12, 1946.)

§1. *Introduction.*

Dans une Note(1) portant le même titre, nous avons étudié la structure des espaces à connexion conforme normale dont les groupes d'holonomie fixent une sphère à un nombre quelconque de dimensions et nous avons obtenu le résultat suivant: Si le groupe d'holonomie d'un espace C_n à connexion conforme normale à n dimensions fixe une sphère S_{m-1} à $m-1$ dimensions, la forme quadratique différentielle fondametale de l'espace doit être conformément séparable sous la forme(2)(3)

(1) $ds^2=g_{\mu\nu}(x^\lambda)\,dx^\mu\,dx^\nu = f(x^\lambda)\,\overset{*}{g}_{bc}(x^a)\,dx^b\,dx^c + h(x^\lambda)\,\overset{*}{g}_{jk}(x^i)\,dx\ \,dx^k$,

les surfaces C_m définies par x^i = constantes et les surfaces C_{n-m} définies par x^a = constantes étant toutes les deux totalement ombiliquées et orthogonales les unes aux autres, et il doit exister un repère mobile de M. O. Veblen $[A_0, A_a, A_i, A_\infty]$ par rapport auquel la connexion conforme normale s'exprime par

$$(2)\qquad \begin{cases} dA_0 = & dx^a\,A_a + dx^i\,A_i, \\ dA_b = \overset{0}{\omega_b}\,A_0 + \overset{a}{\omega_b}\,A_a & + \overset{\infty}{\omega_b}A_\infty, \\ dA_j = \overset{0}{\omega_j}\,A_0 & + \overset{i}{\omega_j}\,A_i + \overset{\infty}{\omega_j}A_\infty, \\ dA_\infty = & \overset{a}{\omega_\infty}A_a + \overset{i}{\omega_\infty}A_i\,, \end{cases}$$

où les $\overset{0}{\omega_\mu} = \overset{0}{\omega_{\mu\nu}}\,dx^\nu$ satisfont aux relations

$$\overset{0}{\omega_{bc}} = \tfrac{1}{2}\,g_{bc}, \qquad \overset{0}{\omega_{bk}} = \overset{0}{\omega_{jc}} = 0, \qquad \overset{0}{\omega_{jk}} = -\tfrac{1}{2}\,g_{jk}.\text{(4)}$$

(1) K. Yano et S. Sasaki: Sur les espaces à connexion conforme normale dont les groupes d'holonomie fixent une sphère à un nombre quelconque de dimensions I. Proc., *20* (1944), 525–535.

(2) Les indices $\begin{cases}\lambda, \mu, \nu, \cdots\cdots \\ a, b, c, \cdots\cdots \\ i, j, k, \cdots\cdots\end{cases}$ prennent respectivement les valeurs $\begin{cases}1, 2, \cdots, n, \\ 1, 2, \cdots, m, \\ m+1, \cdots, n.\end{cases}$

(3) K. Yano: Conformally separable quadratic differential forms. Proc., *16* (1940), 83–86.

(4) Pour le cas où $n=m$, voir S. Sasaki: On the spaces with normal conformal

Inversement, si la forme quadratique différentielle fondamentale d'un espace à connexion conforme normale est conformément separable sous la forme (1) et qu'il existe une famille de repères mobiles de M. O. Veblen $[A_0, A_a, A_i, A_\infty]$ dont les conposantes $\omega^0_{\mu\nu}$ satisfont aux conditions (3), on peut écrire les formules (2) sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} dA_0 = & dx^a A_a + dx A, \\ dA_b = +\tfrac{1}{2}g_{bc}dx^c A_0 + \omega^a_b A_a & + g_{bc}dx^c A_\infty, \\ dA_j = -\tfrac{1}{2}g_{jk}dx^k A_0 & + \omega^i_j A_i + g_{jk}dx^k A_\infty, \\ dA_\infty = & +\tfrac{1}{2}dx^a A_a - \tfrac{1}{2}dx^i A_i, \end{cases}$$

grâce aux relations (3) et aux

$$\omega^\infty_{bc} = g_{bc}, \quad \omega^\infty_{bk} = \omega^\infty_{jc} = 0, \quad \omega^\infty_{jk} = g_{jk}$$
$$\omega^a_{\infty c} = \tfrac{1}{2}\delta^a_c, \quad \omega^a_{\infty k} = \omega^i_{\infty c} = 0, \quad \omega^i_{\infty k} = -\tfrac{1}{2}\delta^i_k.$$

Donc, si l'on pose

$$R_0 = \tfrac{1}{2}A_0 + A_\infty, \qquad R_\infty = \tfrac{1}{2}A_0 - A_\infty,$$
$$R_a = A_a, \qquad R_i = A_i,$$

on en obtient

$$(5)\quad \begin{cases} dR_0 = & dx^a R_a, \\ dR_b = g_{bc}dx^c R_0 + \omega^a_b R_a, \end{cases} \qquad \begin{cases} dR_\infty = & dx^i R_i, \\ dR_j = -g_{jk}dx^k R_\infty + \omega^i_j R_i, \end{cases}$$

ce qui nous montre que la sphère d'intersection des $n-m+1$ hypersphères R_i et R_∞ est fixée par le groupe d'holonomie de l'espace.

Or, le repère mobile étant celui de M. O. Veblen, les équations (4) nous montrent que

$$(6)\qquad \omega^a_j = \{^a_{j\nu}\}\, dx^\nu = 0 \quad \text{et} \quad \omega^i_b = \{^i_{b\nu}\}\, dx^\nu = 0,$$

donc, on peut aller plus loin et peut montrer que le ds^2 de l'espace est une somme des éléments linéaires des deux espaces d'Einstein dont les courbures scalaires satisfont à une certaine relation. C'est ce que nous allons faire dans la suite.

§ 2. *La structure des espaces à connexion conforme normale dont le groupe d'holonomie laisse fixe une sphère à un nombre quelconque de dimensions.*

Supposons que le groupe d'holonomie d'un espace C_n à connexion conforme normale à n dimensions fixe une sphère S_{m-1} à $m-1$ dimensions. Alors, la forme quadratique différentielle fondamentale de l'espace doit être conformément séparable sous la forme (1), et de plus il doit exister un repère mobile de M. O. Veblen $[A_0, A_a, A_i, A_\infty]$ par rapport auquel la connexion conforme normale de l'espace peut s'exprimer par les

connexion whose groups of holonomy fix a point or a hypersphere, I, II, III. Japanese Journal of Mathematics, *18* (1943), 615–622; 623–633; 791–795, et K. Yano: Conformal and concircular geometries in Einstein spaces. Proc. *19* (1943), 444–453.

formules (2), les $\overset{0}{\omega}_{\mu\nu}$ ($\overset{0}{\omega}_{\mu} = \overset{0}{\omega}_{\mu\nu} dx^\nu$) étant données par (3).

Or, les formules (2) nous montrent que

$$\overset{i}{\omega}_b = \overset{i}{\omega}_{bc}\, dx^c + \overset{i}{\omega}_{bk}\, dx^k = 0,$$
$$\overset{a}{\omega}_j = \overset{a}{\omega}_{jc}\, dx^c + \overset{a}{\omega}_{jk}\, dx^k = 0,$$

d'où

$$\overset{i}{\omega}_{bc} = 0, \quad \overset{i}{\omega}_{bk} = 0, \quad \overset{a}{\omega}_{jc} = 0, \quad \overset{a}{\omega}_{jk} = 0.$$

D'autre part, le repère $[A_0, A_a, A_i, A_\infty]$ étant celui de M. O. Veblen, on a

$$\overset{\lambda}{\omega}_{\mu\nu} = \left\{ {}^{\lambda}_{\mu\nu} \right\} = \tfrac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}),$$

la virgule désignant la dérivée partielle par rapport à x^ν, d'où

(7) $$\left\{ {}^{i}_{bc} \right\} = 0, \quad \left\{ {}^{i}_{bk} \right\} = 0, \quad \left\{ {}^{a}_{jc} \right\} = 0, \quad \left\{ {}^{a}_{jk} \right\} = 0.$$

Cela étant, nous calculerons les symboles de Christoffel en tenant compte de la forme (1) de la forme fondamentale. Alors, on trouvera

$$\left\{ {}^{i}_{bc} \right\} = -\frac{f}{2h} \overset{*}{g}_{bc}\, g^{*ih} f_h, \quad \left\{ {}^{i}_{bk} \right\} = \tfrac{1}{2} h_b\, \delta^i_k,$$
$$\left\{ {}^{a}_{jc} \right\} = \tfrac{1}{2} f_j\, \delta^a_c, \quad \left\{ {}^{a}_{jk} \right\} = -\frac{h}{2f} \overset{*}{g}_{jk}\, g^{*ac} h_c,$$

où

$$f_h = \frac{\partial \log f}{\partial x^h}, \qquad h_c = \frac{\partial \log h}{\partial x^c}.$$

Par conséquent, les équations (7) et les relations précédentes nous montrent que la fonction f est indépendante de x^h et la fonction h est indépendante de x^c, soit,

(8) $$f = f(x^a), \qquad h = h(x^i).$$

Donc, en écrivant $\overset{*}{g}_{bc}$ et $\overset{*}{g}_{jk}$ au lieu de $f\overset{*}{g}_{bc}$ et $h\overset{*}{g}_{jk}$ respectivement, on obtient, de (1),

(9) $$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \overset{*}{g}_{bc}(x^a)\, dx^b dx^c + \overset{*}{g}_{jk}(x^i)\, dx^j dx^k.$$

Or, en calculant les symboles de Christoffel $\left\{ {}^{\lambda}_{\mu\nu} \right\}$ formés avec les $g_{\mu\nu}$, on trouvera

(10) $$\left\{ {}^{a}_{bc} \right\} = \left\{ {}^{a}_{bc} \right\}^*, \qquad \left\{ {}^{i}_{jk} \right\} = \left\{ {}^{i}_{jk} \right\}^*,$$

les autres $\left\{ {}^{\lambda}_{\mu\nu} \right\}$ étant tous nuls, où $\left\{ {}^{a}_{bc} \right\}^*$ et $\left\{ {}^{i}_{jk} \right\}^*$ désignent les symboles de Christoffel formés avec les $\overset{*}{g}_{bc}$ et $\overset{*}{g}_{jk}$ respectivement.

En calculant ensuite les composantes du tenseur de courbure $R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ de C_n, on obtiendra

$$R^{a}_{\cdot bcd} = \overset{*}{R}{}^{a}_{\cdot bcd}, \qquad R^{i}_{\cdot jkh} = \overset{*}{R}{}^{i}_{\cdot jkh},$$

les autres $R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ étant toutes nulles, où $\overset{*}{R}{}^{a}_{\cdot bcd}$ et $\overset{*}{R}{}^{i}_{\cdot jkh}$ désignent les composantes de tenseurs de courbure formées avec les $\left\{ {}^{a}_{bc} \right\}^*$ et $\left\{ {}^{i}_{jk} \right\}^*$ respectivement, d'où

(11) $$R_{bc} = \overset{*}{R}_{bc}, \qquad R_{bk} = R_{jc} = 0, \qquad R_{jk} = \overset{*}{R}_{jk},$$

et

(12) $$R = R_1^* + R_2^*,$$

où

$$R_{\mu\nu} = R^{a}_{\cdot\mu\nu a}, \quad R^*_{bc} = R^{*\,a}_{\cdot bca}, \quad R^*_{jk} = R^{*\,i}_{\cdot jki},$$
$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad R_1^* = g^{*bc} R^*_{bc}, \quad R_2^* = g^{*jk} R^*_{jk}.$$

Cela posé, la connexion conforme de C_n étant normale et le repère adopté étant celui de M. O. Veblen, les équations (3), (11), (12) et

$$\overset{0}{\omega}_{\mu\nu} = -\frac{R_{\mu\nu}}{n-2} + \frac{g_{\mu\nu} R}{2(n-1)(n-2)}$$

nous donnent

(13) $$\begin{cases} \overset{0}{\omega}_{bc} = -\dfrac{R^*_{bc}}{n-2} + \dfrac{g^*_{bc}(R_1^*+R_2^*)}{2(n-1)(n-2)} = +\dfrac{1}{2} g^*_{bc}, \\ \overset{0}{\omega}_{bk} = \overset{0}{\omega}_{jc} = 0, \\ \overset{0}{\omega}_{jk} = -\dfrac{R^*_{jk}}{n-2} + \dfrac{g^*_{jk}(R_1^* + R_2^*)}{2(n-1)(n-2)} = -\dfrac{1}{2} g^*_{jk}, \end{cases}$$

d'où

(14) $$R^*_{bc} = \frac{1}{m} R_1^* g^*_{bc}, \quad R^*_{jk} = \frac{1}{m'} R_2^* g^*_{jk}, \quad (m' = n - m)$$

ce qui nous montre que les espaces dont les formes fondamentales ont respectivement $g^*_{bc}(x^a)\, dx^b\, dx^c$ et $g^*_{jk}(x^i)\, dx^j\, dx^k$ sont tous les deux les espaces d'Einstein.

En substituant (14) dans la première et la troisième équations de (13), on trouve

$$R_1^* = -m(m-1), \qquad R_2^* = m'(m'-1),$$

d'où

(15) $$\frac{R_1^*}{m(m-1)} + \frac{R_2^*}{m'(m'-1)} = 0, \qquad R_1^* < 0, \quad R_2^* > 0.$$

Donc, on peut dire que si le groupe d'holonomie d'un espace C_n à connexion conforme normale à n dimensions fixe une sphère S_{m-1} à $m-1$ dimensions, le ds^2 de l'espace doit être séparable sous la forme (9), chaque forme fondamentale étant celle d'un espace d'Einstein dont la courbure scalaire est liée par la relation (15).

Inversement, supposons que la forme fondamentale d'un espace a connexion conforme normale soit séparable sous la forme (9), chaque forme fondamentale étant celle d'un espace d'Einstein dont la courbure scalaire est liée par la relation (15).

Si l'on adopte le repère de M. O. Veblen, la connexion conforme normale de l'espace peut s'exprimer par

(16) $$\begin{cases} dA_0 = \qquad dx^a A_a + dx^i A_i, \\ dA_b = \overset{0}{\omega}_b A_0 + \overset{a}{\omega}_b A_a + \overset{i}{\omega}_b A_i + \overset{\infty}{\omega}_b A_\infty, \\ dA_j = \overset{0}{\omega}_j A_0 + \overset{a}{\omega}_j A_a + \overset{i}{\omega}_j A_i + \overset{\infty}{\omega}_j A_\infty, \\ dA_\infty = \qquad \overset{a}{\omega}_\infty A_a + \overset{i}{\omega}_\infty A_j, \end{cases}$$

où $\overset{0}{\omega}_{\mu} = \overset{0}{\omega}_{\mu\nu}\, dx^{\nu}$, $\overset{\lambda}{\omega}_{\mu} = \overset{\lambda}{\omega}_{\mu\nu}\, dx^{\nu}$, $\overset{\infty}{\omega}_{\mu} = \overset{\infty}{\omega}_{\mu\nu}\, dx^{\nu}$ et $\overset{\lambda}{\omega}_{\infty} = \overset{\lambda}{\omega}_{\infty\nu}\, dx^{\nu}$ sont respectivement données par

$$\overset{0}{\omega}_{\mu\nu} = -\frac{R_{\mu\nu}}{n-2} + \frac{g_{\mu\nu} R}{2(n-1)(n-2)},$$

$$\overset{\lambda}{\omega}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}, \quad \overset{\infty}{\omega}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \quad \overset{\lambda}{\omega}_{\infty\nu} = g^{\lambda\mu} \overset{0}{\omega}_{\mu\nu},$$

On, la forme fondamentale ayant la forme (9), on obtient

$$(17)\qquad \begin{cases} \overset{0}{\omega}_{bc} = c_1 g^*_{bc}, & \overset{a}{\omega}_{bc} = \left\{ {a \atop bc} \right\}^*, \quad \overset{\infty}{\omega}_{bc} = g^*_{bc}, \\ \overset{0}{\omega}_{jk} = c_2 g^*_{jk}, & \overset{i}{\omega}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\}^*, \quad \overset{\infty}{\omega}_{jk} = g^*_{jk}, \\ & \overset{a}{\omega}_{\infty c} = c_1 \delta^a_c, \quad \overset{i}{\omega}_{\infty k} = c_2 \delta^i_k, \end{cases}$$

les autres ω étant nuls, où nous avons posé

$$(18)\qquad \begin{cases} c_1 = -\dfrac{R_1^*}{m(n-2)} + \dfrac{R_1^* + R_2^*}{2(n-1)(n-2)}, \\ c_2 = -\dfrac{R_2^*}{m'(n-2)} + \dfrac{R_1^* + R_2^*}{2(n-1)(n-2)}. \end{cases}$$

Donc, les équations (16) peuvent être écrites sous la farme

$$(19)\qquad \begin{cases} dA_0 = & dx^a A_a & + dx^i A_i, \\ dA_b = c_1 g^*_{bc}\, dx^c A_0 + \left\{ {a \atop bc} \right\}^* dx^c A_a & & + g^*_{bc} dx^c A_\infty, \\ dA_j = c_2 g^*_{jk}\, dx^k A_0 & + \left\{ {i \atop jk} \right\}^* dx^k A_i & + g^*_{jk} dx^k A_\infty, \\ dA_\infty = & c_1 dx^a A_a & + c_2 dx^i A_i \end{cases}$$

Mais, d'autre part, en substituant (15) dans (18), on trouve

$$(20)\qquad c_1 = -\frac{R_1^*}{2m(m-1)}, \qquad c_2 = -\frac{R_2^*}{2m'(m'-1)},$$

d'où

$$(21)\qquad c_1 + c_2 = 0.$$

Par conséquent, on a de (19)

$$(22)\qquad \begin{cases} d(c_1 A_0 + A_\infty) = & 2c_1\, dx\ \ A_a, \\ dA_b = g^*_{bc}\, dx^c (c_1 A_0 + A_\infty) + \left\{ {a \atop bc} \right\}^* dx^c A_a, \end{cases}$$

et

$$(23)\qquad \begin{cases} d(c_2 A_0 + A_\infty) = & 2c_2 dx^i A_i, \\ dA_j = g^*_{jk} dx^k (c_2 A_0 + A_\infty) + \left\{ {i \atop jk} \right\}^* dx^k A_i. \end{cases}$$

Le carré $-2c_2$ de l'hypersphère $c_2 A_0 + A_\infty$ étant en général positif, la sphère S_{m-1} d'intersection de $c_2 A_0 + A_\infty$ et A_j à $m-1$ dimensions sera fixée par le groupe d'holonomie de l'espace ambiant C_n à connexion conforme normale à n dimensions. Donc, nous avons les deux thèorèmes suivants:

Théoreme 1: Pour que le groupe d'holonomie H_n d'un espace C_n à connexion conforme normale à n dimensions laisse fixe une sphere S_{m-1} à $m-1$ dimensions, il faut et il suffit que son élément linéaire puisse être reduite à la somme de deux éléments linéaires des espaces d'Einstein l'un à m dimensions, l'autre à $n-m$ dimensions, dont les courbures scalaires satisfont aux relations (15).

Théoreme 2: Le groupe d'holonomie H_n d'un espace C_n à connexion conforme normale à n dimensions laissant fixe une sphere S_{m-1} à $m-1$ dimensions est le produit direct de deux groupes h_m et $h_{m'}$, h_m et $h_{m'}$ étant holoédriquement isomorphes respectivement aux groupes de transformations de Möbius qui laissent fixe une hypersphère ou un point dans les espaces de Möbius M_m et $M_{m'}$.

Il est à remarquer que $ds_1^2 = g^*_{bc}(x^a)\,dx^b\,dx^c$ et $ds_2^2 = \overset{*}{g}_{jk}(x^i)\,dx^j\,dx^k$ étant tous les deux les éléments linéaires des espaces d'Einstein, $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$ n'est pas toujours un élément linéaire d'un espace d'Einstein. Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir

$$\frac{R_1^*}{m} = \frac{R_2^*}{m'},$$

d'ou, en tenant compte de (15),

$$R_1^* = R_2^* = 0.$$

Donc, l'espace ambiant peut être un espace d'Einstein si et seulement si les deux espaces d'Einstein qui le forment sont tous les deux à courbure scalaire nulle. Dans ce cas, l'espace ambiant est aussi un espace d'Einstein à courbure scalaire nulle.

§3. *La structure des espaces a connexion conforme normale dont le groupe d'holonomie laisse fixe un certain nombre d'hypersphères.*

Supposons que le groupe d'holonomie H_n d'un espace C_n a connexion conforme normale a n dimensions laisse fixe $n-m+1$ hypersphères lineairement indépendantes. Alors, la sphère d'intersection S_{m-1} de ces $n-m+1$ hypersphères sera fixée par le groupe d'holonomie de l'espace en question.

Donc, d'après le résultat obtenu dans le Paragraphe précédent, le ds^2 de l'espace doit être séparable sous la forme (9), chaque élément linéaire étant celui d'un espace d'Einstein dont la courbure scalaire satisfait aux (15).

Si l'on choisit un repère convenable de M. O. Veblen, on aura

$$\text{(24)}\quad \begin{cases} dA_0 = & dx^a A_a + dx^i A_i, \\ dA_b = cg^*_{bc}\,dx^c A_0 + \{{}^{a}_{bc}\}^* dx^c A_a & + g^*_{bc} dx^c A_\infty, \\ dA_j = -cg^*_{jk} dx^k A_0 & + \{{}^{i}_{jk}\}^* dx^k A_i + \overset{*}{g}_{jk} dx^k A_\infty, \\ dA_\infty = & c dx^a A_a - c dx^i A_i, \end{cases}$$

ou

$$c = -\frac{R_1^*}{2m(m-1)} = +\frac{R_2^*}{2m'(m'-1)},$$

la sphère S_{m-1} fixée étant l'intersection de $n-m+1$ hypersphères A_i et $R_\infty = -cA_0 + A_\infty$.

Or, chaque hypersphère fixée par le groupe d'holonomie sera représentée par

$$u^i A_i + u^\infty R_\infty$$

ou

$$u^i A_i + R_\infty$$

en laissant de coté les points en lesquels $u^\infty = 0$.

Cela etant, l'hypersphère $u^i A_i + R_\infty$ étant fixée par le groupe d'holonomie de l'espace, on doit avoir

$$d(u^i A_i + R_\infty) = (v_c\, dx^c + v_k\, dx^k)(u^i A_i + R_\infty),$$

d'où, en tenant compte des relations

$$\begin{cases} dA_j = \{{}^{\,i}_{jk}\}^* dx^k A_i + g^*_{jk} dx^k R_\infty, \\ dR_\infty = -2c\, dx^i A_i , \end{cases}$$

on trouve

$$du^i + \{{}^{\,i}_{jk}\}^* u^j\, dx^k - 2c\, dx^i = (v_c\, dx^c + v_k\, dx^k)\, u^i ,$$

$$u^j g^*_{jk} dx^k = (v_c\, dx^c + v_k\, dx^k),$$

d'où encore

$$\text{(25)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u^i}{\partial x^c} = v_c\, u^i , & \dfrac{\partial u^i}{\partial x^k} + \{{}^{\,i}_{jk}\}^* u^j - 2c\,\delta^i_k = v_k\, u^i , \\ 0 = v_c , & u_k = v_k , \end{cases}$$

ou nous avons pose

$$u_k = g^*_{jk} u^j .$$

Les équations (25) nous donnent

$$\text{(26)} \qquad u^i = u^i(x^j)$$

et

$$\text{(27)} \qquad u_{j;\,k} = u_j\, u_k + 2c\, \overset{*}{g}_{jk} ,$$

où le point-virgule désigne la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel.

De (27), on obtient, par la dérivée covariante

$$u_{j;\,k;\,h} = u_{j;\,h}\, u_k + u_j\, u_{k;\,h}$$

$$= (u_j\, u_h + 2c\, \overset{*}{g}_{jh})\, u_k + u_j\, u_{k;\,h}.$$

En portant cette équation dans l'identite

$$u_{j;\,k;\,h} - u_{j;\,h;\,k} = -u_i\, R^{*\cdot i}_{\ jkh} ,$$

on trouve

$$u_i\, R^{*\cdot i}_{\ jkh} = 2c\, u_i\, (g^*_{jk}\, \delta^i_h - g^*_{jh}\, \delta^i_k).$$

Cette équation devant être valable pour $n-m$ vecteurs u_i linéairement indépendants, on doit avoir

$$R^{*\cdot i}_{\ jkh} = 2c\, (g^*_{jk}\, \delta^i_h - g^*_{jh}\, \delta^i_k),$$

ce qui montre que l'espace dont la forme fondamentale est $g^*_{jk}(x^i)\, dx^j dx^k$ est à courbure constante. Donc, on peut choisir les coordonnées x^i de manière qu'on ait

$$g^*_{jk}(x^i)\, dx^j\, dx^k = \frac{(x^{m+1})^2 + \cdots + (x^n)^2}{\left[1 + \dfrac{K}{4}\{(x^{m+1})^2 + \cdots + (x^n)^2\}\right]^2} ,$$

où

$$K = 2c = \frac{R_2^*}{m'(m'-1)},$$

par suite

(28) $$\frac{R_1^*}{m(m-1)} + K = 0.$$

Donc, on a le

Théorème 3: Pour que le groupe d'holonomie H_n d'un espace C_n à connexion conforme normale à n dimensions laisse fixe $n-m+1$ hypersphères linéairement indépendantes, il faut et il suffit que la forme fondamentale de C_n puisse être écrite comme la somme de deux formes fondamentales, l'une étant celle d'un espace d'Einstein à m dimensions et l'autre celle d'un espace à courbure constante à $n-m$ dimensions entre les courbures scalaires desquels il existe la relation (28).