29. *Sur les propriétés de la famille des courbes intégrales d'un système différentiel ordinaire.*

Par Masuo HUKUHARA.

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., May 12, 1949.)

1. Nous considérons le système différentiel ordinaire

$$y_j' = f_j(x, y_1, \cdots\cdots, y_n) \quad (j=1,2,\cdots\cdots,n), \tag{1}$$

dont les seconds membres sont continus et bornés dans le domaine

$$a \leqq x \leqq a', \quad |y_1| < \infty, \cdots\cdots, \quad |y_n| < \infty. \tag{2}$$

Soit A un ensemble contenu dans (2). Nous désignerons par $R(A)$ la région remplie par les courbes intégrales passant par un point de A, et par $S(\xi\,;\,A)$ la section de $R(A)$ par l'hyperplan $x=\xi$.

On sait que la famille des courbes intégrales jouit des propriétés suivantes.

A. *$R(A)$ est borné si A est borné.*

B. *$R(A)$ est fermé si A est fermé.*

C. *$S(\xi\,;\,A)$ est un continu si A est un continu.*

D. *Si A est un ensemble fermé dans un hyperplan $x=\xi$ et si Q est un point frontière de $R(A)$, il existe une courbe intégrale passant par Q et un point P de A et dont l'arc PQ se trouve sur la frontière de $R(A)$.*

On peut généraliser la proposition C de la manière suivante.

C′. *$S(\xi\, A)$ est connexe si A est connexe.*

Supposons en effet, que $S(\xi\,;A)$ soit la somme de deux ensembles sans point commun S_1 et S_2. Si $A_1 = AR(S_1)$ et $A_2 = AR(S_2)$ ont un point commun P, on aura

$$S_1 S\,(\xi\,;\,P) \neq 0, \quad S_2 S(\xi\,;\,P) \neq 0.$$

Or, $S(\xi\,;\,P)$ étant un continu d'après C, on a

$$S_1 S_2' + S_1' S_2 \neq 0.$$

Si A_1 et A_2 n'ont pas de point commun on a

$$A_1 A_2' + A_1' A_2 \neq 0,$$

car A est connexe. Si par exemple, $A_1 A_2' \neq 0$, on aura $S_1 S_2' \neq 0$. Donc $S\,(\xi\,;\,A)$ est connexe.

2 Nous appellerons la distance de deux courbes intégrales C_1 et C_2 la borne supérieure de la distance des points de C_1 et de C_2 ayant les mêmes abscisses et la désignerons par $\rho\,(C_1, C_2)$. Alors la proposition suivante est évidente.

E. *S'il n'existe qu'une courbe intégrale C_0 passant par un point P_0, on peut faire correspondre à un nombre positif donné ε un nombre positif δ de manière que toute courbe intégrale C passant par un point distant de P_0 moins de δ soit distante de C_0 moins de ε.*

Il existe donc, quelque petit que soit le nombre positif ε, une courbe intégrale C différente de C_0 et telle que $\rho\ (C\ C_0)<\varepsilon$. Il en sera de méme bien que l'unicité ne soit pas assurée.

F. *Soit C_0 une courbe intégrale passant par un point donné P_0. S'i ly a une infinité de courbes intégrales passant par P il en existe une courbe intégrale qui est différente de C_0 et telle que $\rho(C,C_0)<\varepsilon$.*

Soit C_1 une courbe intégrale passant par P_0 et bifurquant de C_0 en un point P d'abscisse ξ. Supposons, par exemple, que ξ soit plus grand que l'abscisse de P_0. Il suffit de montrer l'existence d'une courbe intégrale C passant par P et telle que les points correspondants de C_0 et de C sont distants l'un de l'autre moins de ε pour $x>\xi$, car, nous pouvons supposer que C et C_0 coïncident à gauche de P.

Prenons une suite de nombres x_k $(k=1,2,\cdots\cdots,N)$ tels que

$$0<x_k-x_{k-1}<\delta' \quad (k=1,2,\cdots\cdots,N\ ;\ x_0=\xi,\ x_N=a').$$

Soit P_k le point de la courbe C_0 dont l'abscisse est x_k. Nous désignerons par Γ_0 l'ensemble formé d'un seul point P. Si le continu $S(x_1\,;\,\Gamma_0)$ contient des points extérieurs à l'hypersphère fermée T_1 de centre P_1 et de rayon ε', le plus grand continu Γ_1 contenu dans $T_1\ S\ (x_1\,;\,\Gamma_0)$ et contenant P_1 aboutit à la frontière de T_1. Si $S(x_1\,;\,\Gamma_0)$ ne contient pas de points extérieurs à T_1, on pose $\Gamma_1=S(x_1\,;\,\Gamma_0)$.

Si le continu $S(x_2\,;\,\Gamma_1)$ contient des points extérieurs à l'hyper sphère fermée T_2 de centre P_2et de rayon ε' nous désignons par Γ_2 le plus grand continu contenu dans $T_2S(x_2,\,\Gamma_1)$. Sinon, nous posons $\Gamma_2=S(x_2,\,\Gamma_1)$, En continuant ainsi nous obtenons une suite de continus $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\cdots\cdots,\Gamma_N$ jouissant de la propriété suivante.

Γ_k est le plus grand continu contenu dans $T_kS(x_k,\Gamma_{k-1})$, et contenant P_k, T_k étant l'hypersphère fermée de centre P_k, et de rayon ε'.

Si δ' est suffisammert petit, Γ_1 ne se réduit pas à un point, car $S(x_1.\,P)$ contient un point de C_1 non situé sur C_0. Supposons donc que Γ_m contienne des points autres que P_m, tandis que Γ_k est formé d'un seul point P_k pour $k>m$. Alors il existe une courbe intégrale C passant par des points de Γ_k $(k=0,1,\cdots\cdots,N)$ et en particulier, un point Q donné arbitrairement dans Γ_m. Si deux nombres positifs ε' et δ' sont assez petits cette courbe intégrale répond à la question.

3. On appelle point droit de Peano le point où se bifurquent vers droite deux courbes intégrales et point gauche de Peano le

point où se bifurquent vers gauche deux courbes intégrales. Alors on a la proposition suivante.

G. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) C_0 *est une selule courb intégrale pasasant par* P_0 *et distante de* C_0 *moins de* ε, ε *étant un nombre positif donné arbitrairement.*

(ii) C_0 *étant une courbe intégrale passant par* P_0, *il n'existe sur* C *ni de point droit de Peano à droite de* P_0 (P_0 *compris*) *ni de point gauche de Peano à gauche de* P_0 (P_0 *compris*).

Il est clair que (ii) entraîne (i).

La réciproque est aussi évidente d'après la proposition F.

REMARQUE. Les deux conditions ci-dessus sont entiérement locale c'est-à-dire ne dépendent que des valeurs de f_j $(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ aux points dont les distances à la courbe C_0 sont moindres qu'un nombre positif quelconque ε. La proposition subsiste donc si les fonctions f_j sont définies dans un ensemble contenant les points $(x, y_1,\cdots\cdots,y_n)$ tels que

$$a\leqq x\leqq a', |y_1-\varphi_1(x)|<\varepsilon,\cdots\cdots,|y_n-\varphi_n(x)|<\varepsilon,$$

$y_j=\varphi_j(x)$ $(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ représentant la courbe intégrale C_0.