117. *Sur les Espaces Complets et Régulièrement Complets.* I

Par Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. July 12, 1954)

1. On sait que plusieurs théorèmes fondamentaux de la théorie des ensembles de points dans les espaces euclidiens restent valables pour les espaces métriques complets. Ainsi, dans les espaces métriques complets, tout ensemble ouvert non vide est de seconde catégorie, c.-à-d., n'est pas une réunion d'une famille dénombrable d'ensembles non denses.[1] D'autre part, si un espace métrique complet est dense en soi, il contient toujours des ensembles mesurables (B) de la vraie classe α, α étant un nombre ordinal quelconque de la première ou deuxième classe de Cantor,[2] et des ensembles analytiques non mesurables (B).[3]

Mais, tout récemment, MM. L.W. Cohen,[4] C. Goffman,[4] et R. Sikorski[5] ont réussi à franchir encore la limite des espaces métriques et ils ont établi presque toute la partie de la théorie des ensembles de points dans les espaces plus généraux. Le but de cette Note est de compléter les résultats de ces auteurs surtout pour la partie qui concerne au théorème de Baire et l'existence des classes des ensembles.

2. D'abord précisons les espaces généraux que nous allons considérer et définissons la notion d'être *complet* pour ces espaces.

Définition 1. Considérons un espace R où la topologie est donnée par un système de voisinages satisfaisant à la condition (A) et (C) de F. Hausdorff.[6] Soit p un point de R. Si le système de voisinages du point p ne satisfait pas à l'axiome (B) de Hausdorff, nous disons que la *profondeur* de R au point p—que nous désignerons par $\omega(R, p)$—est égale à zéro. S'il existe un voisinage de p qui est contenu dans tous les autres voisinages de p, nous disons que $\omega(R, p)$

1) R. Baire: Sur les fonctions de variables réelles, Ann. di Mat., **3**, 65 (1899); Voir aussi F. Hausdorff, Grundzüge d. Mengenlehre, p. 327.

2) H. Lebesgue: Sur les fonctions représentables analytiquement, Journ. d. math. Série 6, **1**, 209 (1905).

3) N. Lusin: Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications (1930). Un excellent exposé pour ces questions se trouve dans "Topologie I" de M. C. Kuratowski.

4) L. W. Cohen: Uniformity properties in topological space satisfying the first denumerability postulate, Duke Math. J., **3**, 610–615 (1937). L.W. Cohen and C. Goffman: A theory of transfinite convergence, Trans. Amer. Math. Soc., **66**, 65–74 (1949).

5) R. Sikorski: Remarks on some topological space of high power, Fundamenta Mathematicae, **37**, 125 (1950).

6) Ouvrage de F. Hausdorff cité dans 1), p. 213.

est actuellement infinie. Excepté ces deux cas extrêmes, définissons la profondeur $\omega(R, p)$ comme il suit: la suite monotone décroissante

$$v_0(p) \supseteq v_1(p) \supseteq v_2(p) \supseteq \cdots \supseteq v_\alpha(p) \supseteq \cdots; \qquad 0 \leq \alpha < \beta$$

de voisinages de p sera dite maximale s'il n'y a aucun voisinage de p qui est contenu dans tous les $v_\alpha(p)$ de la suite. β sera appelé le type de la suite. Alors, $\omega(R, p)$ est le plus petit nombre ordinal des types de suites maximales. Désignons par $\omega(R)$ la borne inférieure de $\omega(R, p)$ où p parcourt R. $\omega(R)$ sera appelé la *profondeur* de l'espace R. Il faut remarquer que $\omega(R)$ est bien défini avec l'espace R, et que c'est un nombre limite inaccessible[7] (ou régulier). Par ailleurs, $\omega(R)$ n'est pas toujours égal au caractère du système de voisinages.[8]

Définition 2. Soit, maintenant, ω_ν un nombre ordinal, limite, inaccessible et tel que $\omega_\nu \leq \omega(R)$. Appelons les espaces "*rangés*", s'il existe une famille des voisinages $\mathfrak{V}_\alpha$ $(0 \leq \alpha < \omega_\nu)$ qui satisfait à la condition:

(a) Pour tout voisinage $v(p)$ du point p et pour tout nombre α $(0 \leq \alpha < \omega_\nu)$, il existe un nombre β qui se trouve entre α et ω_ν: $\alpha < \beta < \omega_\nu$ et tel qu'il exsite un voisinage $v_\beta(p)$ appartenant à la famille $\mathfrak{V}_\beta$ et qui est contenu dans $v(p)$. Pour un espace rangé, un voisinage d'un point p sera dit *de rang* α, s'il appartient à la famille $\mathfrak{V}_\alpha$.

On voit bien que, dans le cas des espaces métriques, on a $\omega(R) \geq \omega$ et par suite on peut poser $\omega_\nu = \omega$. Dans ce cas, on peut prendre comme $\mathfrak{V}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ la famille de toutes les sphères $S_{n+1}(p)$ des centres p et du rayon $1/(n+1)$. Mais, il faut remarquer que, dans les cas plus généraux, $\mathfrak{V}_\alpha$ peut contenir plusieurs voisinages du même point. Donc, le rang ne peut être employé comme une indice qui désigne le voisinage.[8]

Définition 3. Prenons encore un nombre ω_μ ordinal limite et inaccessible quelconque mais tel que $\omega_\mu \leq \omega_\nu$. Alors, une suite décroissante de voisinages

$$v_0(p_0) \supseteq v_1(p_1) 2 v_2(p_2) \supseteq \cdots \supseteq v_\alpha(p_\alpha) \supseteq \cdots, \qquad 0 \leq \alpha < \omega_\mu$$

sera dite *fondamentale*, si elle satisfait à deux conditions suivantes: (1) le rang de $v_\alpha(p_\alpha)$ est monotone croissant; (2) pour tout nombre α tel que $0 \leq \alpha < \omega_\mu$, il existe un nombre $\beta = \beta(\alpha)$ tel que $\alpha \leq \beta < \omega_\mu$, que $p_\beta = p_{\beta+1}$ et que le rang de $v_\beta(p_\beta)$ est inférieur à celui de $v_{\beta+1}(p_{\beta+1})$ (égalité exclue).

Nous disons qu'un espace rangé est *complet*, si pour tout nombre

7) Un nombre limite α est dit inaccessible, si, pour tout β tel que $\beta < \alpha$ et pour toute fonction α_γ telle que $0 \leq \gamma < \beta$ et $0 \leq \alpha_\gamma < \alpha$, on a toujours

$$\operatorname{Sup} \alpha_\gamma < \alpha.$$

8) Voir l'Exemple 1 qu'on donne plus bas.

inaccessible ω_μ tel que $0<\omega_\mu\leq\omega_\nu$ toute suite fondamentale donne l'intersection $\bigcap_\alpha v_\alpha(p_\alpha)$ non vide.

Définition 4. Étant donnée une suite des points $p_0, p_1, p_2, \dots, p_\alpha, \dots$, nous disons qu'elle converge vers un point p, si tout voisinage $v(p)$ de p contient tous les termes p_α de la suite à partir d'un certain indice qui dépend d'ailleurs du $v(p)$. Dans ce cas, nous écrivons ce fait par $\lim_\alpha p_\alpha=p$. Considérons maintenant une suite des suites fondamentales $v_\alpha^\beta(p_\alpha^\beta)$ dans un espace rangé dont les indices α, β parcourent tous les nombres tels que $0\leq\alpha$, $\beta<\omega_\nu$. Supposons qu'ellesatisfasse à la condition; pour $\beta\leq\alpha$ on a $p_\alpha^\beta=p_\alpha^0$ et $v_\alpha^\beta(p_\alpha^\beta)=v_\alpha^0(p_\alpha^0)$ simultanément. Nous disons qu'un espace rangé est *régulièrement complet* si pour toutes les telles suites, il existe un point q de $\bigcap_\alpha v_\alpha^0(p_\alpha^0)$ et un point q_β de $\bigcap_\alpha v_\alpha^\beta(p_\alpha^\beta)$ tel qu'on ait $\lim_\beta q_\beta=q$.

Dans cette Note, nous étudierons surtout les espaces rangés qui sont complets et n'utilisons la notion des espaces régulièrement complets que dans les travaux ultérieurs.

3. Étant donné un espace rangé R, nous disons qu'un ensemble E de points est de première catégorie si elle est exprimable de la manière:

$$E=\bigcup_\alpha E_\alpha \qquad 0\leq\alpha<\omega_\nu$$

avec E_α qui sont tous des ensembles non denses (c.-à-d., des ensembles E_α dont les complémentaires des adhérences $R-\overline{E}_\alpha$ sont partout denses dans l'espace). Alors, nous pouvons établir le fameux théorème de Baire:

Théorème. *Dans les espaces rangés complets, aucun ensemble ouvert non vide n'est de première catégorie.*

Démonstration. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer qu'étant donnée une suite d'ensembles ouverts $A_{2\alpha}$ $(0\leq\alpha<\omega_\nu)$ partout denses dans l'espace R, l'intersection $\bigcap_\alpha A_{2\alpha}$ est partout dense dans R.

Soient G un ensemble ouvert non vide quelconque et p_0 un point quelconque de G. Il existe alors un rang γ_0 et $v_0(p_0)$ de rang γ_0 tels que $v_0(p_0)\subseteq G$. Supposons qu'on a déjà défini p_β, γ_β et $v_\beta(p_\beta)$ pour tout β tel que $0\leq\beta<\alpha$, α étant un nombre entre 0 et ω_ν, qu'on ait

$$(*)\qquad v_0(p_0)\supseteq v_1(p_1)\supseteq\cdots,\qquad \gamma_0\leq\gamma_1\leq,\qquad v_\beta(p_\beta)\in\mathfrak{V}_{\beta\gamma}\ \cdots$$

et enfin qu'elle satisfasse à la condition: pour tout nombre β pair on a $p_\beta=p_{\beta+1}$, $\gamma_\beta<\gamma_{\beta+1}$ et $v_\beta(p_\beta)\subseteq A_\beta$.

Supposons d'abord que α soit un nombre pair et isolé. Posons $G_\alpha=v_{\alpha-1}(p_{\alpha-1})$. Puisque A_α est partout dense, $A_\alpha\cap G_\alpha$ n'est pas vide. Soit P_α un de ses points.

Si α est un nombre limite, on pose $G_\alpha = \bigcap_\beta v_\beta(p_\beta)$. Puisque R est complet, et qu'on peut extraire de (*) une suite partielle qui est fondamentale, G_α n'est pas vide. D'autre part, puisque $\alpha < \omega(R)$, G_α est un ensemble ouvert. Mais comme A_α est partout dense dans R, $A_\alpha \cap G_\alpha$ est un ensemble non vide. Soit p_α un de ses points.

Dans deux cas, on peut appliquer la condition (a). Il existe alors un nombre γ_α tel que $\gamma_\alpha \geq \gamma_{\alpha-1}$ et un voisinage $v_\alpha(p_\alpha)$ de $\mathfrak{V}_{\gamma_\alpha}$ tel que $v_\beta(p_\beta) \supseteq v_\alpha(p_\alpha)$.

Si α est un nombre impair, posons $p_\alpha = p_{\alpha-1}$ et choisissons, d'après la condition (a), un nombre γ_α tel que $\gamma_\alpha > \gamma_{\alpha-1}$ et un voisinage $v_\alpha(p_\alpha)$ de $\mathfrak{V}_{\gamma_\alpha}$ tel que $v_{\alpha-1}(p_{\alpha-1}) \supseteq v_\alpha(p_\alpha)$.

Ainsi nous avons une suite fondamentale $v_\alpha(p_\alpha)$ telle que $\bigcap_\alpha v_\alpha(p_\alpha) \subseteq \bigcap_\alpha A_{2\alpha} \cap G$. Puisque R est complet, on a $\bigcap_\alpha v_\alpha(p_\alpha) \neq 0$. Donc $\bigcap_\alpha A_{2\alpha} \cap G$ n'est pas vide, c.q.f.d.

Exemple 1. Soit N l'ensemble de tous les nombres réels, et considérons le produit cartésien d'une infinité $\mathfrak{c}$ de N: $\underset{x \in N}{P}(N_x = N)$. C'est un espace $N^{\mathfrak{c}}$ de toutes les fonctions réelles $y = f(x)$ définies pour une variable réelle. On y introduit la topologie en définissant les voisinages des points comme il suit: Prenons un nombre fini quelconque des nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et un nombre naturel m. Alors le voisinage de la fonction $f(x) \equiv 0$: $V(x_1, x_2, \ldots, x_n; m)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $y = f(x)$ telles que $|f(x_i)| < 1/(m+1)$. Les voisinages d'autres fonctions sont définis par la translation.

On voit bien que dans cet espace on a $\omega(R) = \omega$ tandis que le caractère est $\mathfrak{c}$.

On pose $\mathfrak{V}_m =$ la famille de tous les voisinages $V(x_1, \ldots, x_n; m)$, de tous les points. $N^{\mathfrak{c}}$ est un espace régulièrement complet.

Exemple 2. Soit encore N l'ensemble de tous les nombres réels, et désignons par N_+ l'espace[9] où le voisinage $V_m(p)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ du point p est l'ensemble tous les points x tels que

$$0 \leq x - p < 1/m$$

(pour $m = 0$, $1/m$ doit être remplacé par $+\infty$).

Dans cet Exemple, on a $\omega(R) = \omega$ et on peut poser $\mathfrak{V}_m =$ la famille de tous les voisinages $V_m(p)$ de tous les points. On voit bien que, par rapport à cette famille $\mathfrak{V}_m$, l'espace N_+ est complet et non pas régulièrement complet.

9) N. Bourbaki: Éléments de Mathématiques, Livres III Topologie Générale, Chap. IV, § 5, Exercices 10). Dans ce § , on trouve un très bon exposé du théorème de Baire.