150. *Espaces à Connexion de Cartan Complets*

Par Shôshichi KOBAYASHI

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Oct. 12, 1954)

Nous supposons la connaissancé de la notion de connexion infinitésimale dans les variétés fibrées et celle de connexion de Cartan.[1]

1. Connexion de Cartan

Expliquons d'abord quelques notations qui seront utilisées dans la suite. Soit E une variété fibrée de base B, de fibre F et de groupe structural de Lie G. On suppose les conditions que voici:

(1) G opère transitivement sur F; c'est-à-dire F peut être identifiée à l'espace homogène G/G', où G' est le groupe d'isotropie en un point O de F.

(2) $\dim. F = \dim. B$.

(3) Le groupe structural G de la variété fibrée E peut être réduit jusqu' à G'; autrement dit E admet une section que nous noterons par σ. Quand la variété E est considérée comme la variété fibrée à groupe structural G', elle sera désignée par E'.

(4) Deux variétés fibrées $T(B)$ et $T_F(E)$ de base B sont équivalentes, où $T(B)$ est l'espace des vecteurs tangents à B et que $T_F(E)$ est l'espace des vecteurs tangents à F_x en $\sigma(x)$, x parcourant dans B.

Dans toute variété fibrée E satisfaisant à ces 4 conditions, il existe une connexion de Cartan, qui est une connexion infinitésimale du type particulier dans E. Elle peut être définie par la donnée d'une forme différentielle ω (de degré 1) à valeurs dans l'algèbre de Lie de G et définie sur H', qui est l'espace fibré principal associé à E'. ω doit satisfaire à certaines conditions que nous n'écrivons pas ici.[2] Parmi les propriétés que possède ω, nous signalons une: ω définit un parallélisme absolu dans H'.

2. La Notion de "Complet"

Soit x_0 un point de la base B et $c(t)$, où $0 \leq t \leq 1$, est une courbe dans B commencant par x_0. $\sigma(c(t))$ est une courbe dans E qui couvre $c(t)$. Pour tout $t \in [0, 1]$, soit $\bar{c}(t)$ un point de F_{x_0} obtenu par le déplacement parallèle du point $\sigma(c(t))$ le long de $c^{-1}(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$. La

1) C. Ehresmann: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie à Bruxelles, 29 (1950). S. Kobayashi: Connexion des variétés fibrées, C. R., **238**, 318 (1954).

2) C. Ehresmann: Les connexions infinitésimales. Bruxelles.

courbe $\bar{c}(t)$ dans F_{x_0} est dite le développement de $c(t)$ dans la fibre F_{x_0}.

Inversement, considérons une courbe $\bar{c}(t)$ dans F_{x_0} commençant par $\sigma(x_0)$. En général, il n'existe pas toujours de courbe $c(t)$ dans B commençant par x_0 dont le développement est $\bar{c}(t)$. (Mais si elle existe, elle est unique.) La variété fibrée E à connexion de Cartan est dite complète, si, pour toute courbe $\bar{c}(t)$ dans F_{x_0} commençant par $\sigma(x_0)$, il existe une courbe $c(t)$ dans la base B commençant par x_0 dont le développement est $\bar{c}(t)$. Notre théorème fondamental est le suivant:

Théorème 1. *Soit E une variété fibrée à connexion de Cartan et H' la variété fibrée principale associée à E. Soit ω la forme différentielle qui définit la connexion de Cartan. Pour que E soit complète, il faut et il suffit que tout champ de vecteurs v défini sur H' tel que $\omega(v)$ soit une constante engendre un groupe de transformation à 1-paramètre global.*

3. Application du Théorème 1

Ce théorème donne une démonstration simple du théorème suivant qui est une généralisation du théorème de Myers[3] et qui est démontré par Ehresmann d'une autre manière.[4]

Théorème 2. *Soient $E(B, F, G, H)$ et $\overline{E}(\overline{B}, F, G, \overline{H})$ deux variétés fibrées à connexion de Cartan analytique complète. Si B et $\overline{B}$ sont simplement connexe, tout isomorphisme local de E dans $\overline{E}$ se prolonge à un isomorphisme global de E sur $\overline{E}$.*

On peut appliquer le théorème 1 au problème du champ de vecteurs de Killing.

Théorème 3.[5] *Soit V une variété riemannienne complète. Alors tout champ de vecteurs de Killing engendre un groupe d'isométrie à 1-paramètre global.*

On peut démontrer un théorème analogue pour une connexion affine (projective ou conforme) complète.

---

3) S. B. Myers: Riemannian manifolds in the large, Duke Math. J., **1**, 39 (1935).

4) C. Ehresmann: Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan, C. R., **206**, 1433 (1938).

5) Ce théorème 3 m'a été suggéré oralement par K. Nomizu.