13. *Sur un Théorème de M. G. Thierrin Concernant Demi-groupe Limitatif*

Par Kiyoshi ISÉKI
Kobe University
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 18, 1955)

Un groupoide E, que nous décrirons sous forme multiplicative, est dit demi-groupe si l'on a

$$a(bc)=(ab)c$$

quels que soient a, b, c de E. Pour plus de détails concernant demi-groupe, voir P. Dubreil (1).

Conformément à la terminologie de M. G. Thierrin (6), un demi-groupe est dit limitatif à droite si $ax=bx=a$ entraîne $a=b$. On définit d'une manière analogue un demi-groupe limitatif à gauche. Un demi-groupe vérifiant la règle de simplification à droite et à gauche, c'est-à-dire, semi-groupe, est évidemment limitatif.

M. G. Thierrin (6) a démontré le remarquable résultat suivant.

Théorème. Tout demi-groupe limitatif fini est un groupe.

Ce théorème, qui est dû à M. G. Thierrin, résulte immédiatement la proposition suivante (cf. P. Dubreil (1), p. 54).

Proposition. Tout semi-groupe fini est un groupe.

Dans cette Note, je démontrerai la généralisation suivante du Théorème.

Théorème 1. Tout demi-groupe compact limitatif est un groupe compact.

Du Théorème 1, on déduit le théorème connu:

Théorème 2. Tout semi-groupe compact est un groupe compact.

Nous supposerons que la topologie est séparée. D'après M. G. Thierrin (4), un demi-groupe E est dit inversé si pour tout $x \in E$, il existe un élément $x' \in E$ tel que les éléments xx' et $x'x$ soient idempotents. M. G. Thierrin (6) a démontré que,

Proposition 1. Tout demi-groupe inversé et limitatif est un groupe.

D'autre part, M. G. Thierrin ((5), (7, Chap. I) ou A. H. Clifford et D. D. Miller (2)) introduit une classe nouvelle d'un demi-groupe, homogroupe.

Un demi-groupe E est dit homogroupe, s'il existe un élément $e \in E$ idempotent et permutable avec chaque élément de E et, pour tout $x \in E$ il existe un élément $x' \in E$ tel que $xx'=e$.

Dans ma Note (K. Iséki (3)), nous avons montré que

Proposition 2. Tout demi-groupe compact abélien est un homogroupe.

Pour prouver le théorème 1, soit E un demi-groupe compact limitatif. L'adhérence $\overline{(a)}$ du sous-demi-groupe cyclique (a) engendré par un seul élément a est un sous demi-groupe compact abélien de E. (Ses éléments d'un demi-groupe cyclique (a) sont les puissances de a.) D'après la proposition 2, $\overline{(a)}$ est un homogroupe. Nous conclunons donc qu'il existe un élément a' de $\overline{(a)}$ tel que $aa'=a'a=e_a$ où e_a est un idempotent et $e_a \in \overline{(a)}$. Par conséquent E est un demi-groupe inversé. La proposition 1 implique que E est un groupe. Nous avons ainsi démontré notre théorème.

Références

1) P. Dubreil: Algèbre I, Paris (1946).
2) A. H. Clifford and D. D. Miller: Semigroups having zeroid elements, Amer. Jour. Math., **70**, 117–125 (1948).
3) K. Iséki: On compact abelian semi-groups, Michigan Math. Jour., **2**, 59–60 (1953).
4) G. Thierrin: Sur les demi-groupes inversés, C. R. Acad. Sci., Paris, **234**, 1336–1338 (1952).
5) G. Thierrin: Sur les homogroupes, C. R. Acad. Sci., Paris, **234**, 1519–1521 (1952).
6) G. Thierrin: Sur quelques classes de demi-groupes possédant certaines propriétés des demi-groupes, C. R. Acad. Sci., Paris, **238**, 1765–1767 (1954).
7) G. Thierrin: Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Thèse, Paris (1954).