37. *Fonctions Presque Périodiques du Type Spécial.* II

Par Shin-ichi MATSUSHITA
Osaka Cité Université

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1955)

§4. *Valeur moyenne.* Pour montrer l'existence des valeurs moyennes dans $\mathfrak{A}(G)$, on peut opérer sans revenir aux définitions primitives; de plus le procédé dû à MM. S. Bochner et J. von Neumann est ici inapplicable, une partie totalement bornée de $\mathfrak{A}(G)$ n'étant nécessairement séparable: *Cf.* Remarque dans [I].[1] Toutefois, en tenant compte du Théorème 1 ci-devant, on peut conduire aisément de l'existence de valeurs moyennes des fonctions *p.p.* numériques à celle des fonctions de $\mathfrak{A}(G)$.

Théorème 4. *Pour toute $\alpha(x)\in\mathfrak{A}(G)$ est associée une et une seule mesure $m[\alpha]=m_x[\alpha(x)]$ (dite valeur moyenne) telle qu'il existe, pour tout voisinage $\omega=\omega(\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_l;\varepsilon)$ dans $\mathfrak{M}$, $\hat{f}_j\in L^0(V_0)\,(1\leqq j\leqq l)$, n éléments $a_1,\dots,a_n$ de G et n nombres $\xi_1,\dots,\xi_n\geqq 0$ avec $\xi_1+\cdots+\xi_n=1$ tels qu'on ait*

(4.1) $\sum_{i=1}^n \xi_i\alpha(xa_iy)-m[\alpha]\subset\omega$, *pour tous* $x,\ y\in G$.

Théorème 5. *La valeur moyenne possède les propriétés suivantes; i) l'application $\alpha\to m[\alpha]$ est linéaire continue, ii) $m[\alpha]=m[\check{\alpha}]=m[\tau_a\alpha]$ $(a\in G)$, où $\check{\alpha}(x)=\alpha(x^{-1})$ et $\tau_a\alpha(x)=\alpha(a^{-1}x)$, iii) si $\alpha(x)=\mu\in\mathfrak{M}$(constante), on a $m[\alpha]=\mu$.*

Théorème 5^bis^. *Pour la valeur moyenne $m[\alpha]$ et pour toute $\hat{f}\in L^0(V_0)$,*

(4.2) $$m_x[\langle\hat{f},\ \alpha\rangle(x)]=\langle\hat{f},\ m_x[\alpha(x)]\rangle.$$

Démonstrations des Théorèmes 4, 5, et 5^{bis}. Étant donné un voisinage $\omega=\omega(\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_l;\varepsilon)$ dans $\mathfrak{M}$, nous désignerons par $m^\alpha(\hat{f}_j)$ les valeurs moyennes numériques des fonctions *p.p.* continues $\langle\hat{f}_j,\ \alpha\rangle(x)$ pour $1\leqq j\leqq l$ (Théorème 1), alors il existe n éléments $a_1,\dots,a_n\in G$ et n nombres $\xi_1,\dots,\xi_n\geqq 0$ tels que $\xi_1+\cdots+\xi_n=1$ qui vérfient simultanément

(4.3) $$\left|\sum_{i=1}^n\xi_i\langle\hat{f}_j,\ \alpha\rangle(xa_iy)-m^\alpha(\hat{f}_j)\right|<\varepsilon,\quad(1\leqq j\leqq l)$$

pour tous $x,\ y\in G$.[2] D'autre part, soit H l'ensembre des translatées

1) S. Matsushita: *Fonctions presque périodiques du type spécial. I*, Proc. Japan Acad., **31**, No. 2; cité [I] dans cette Note. Théorèmes 8, 12 de S. Bochner et J. von Neumann, loc. cit., et Théorème 16 de J. von Neumann, loc. cit., sont inapplicable à présent.

2) Cf. J. von Neumann: *Loc. cit.*, Corollaire du Théorème 14. W. Maak: *Fastperiodische Funktionen*, Chap. II (1951).

$\tau_a \alpha$ pour tout $a \in G$, alors H est borné (selon que $\alpha(x)$ est $p.p.$) et pour une partie compacte quelconque $K \subset G$, il existe un nombre $M_K \geqq 0$ tel que $|\langle \hat{f}, \alpha\rangle(x)| = |\langle \hat{f}, \alpha(x)\rangle| \leqq M_K \|\hat{f}\|_\infty$ pour tout $x \in G$ et toute fonction $\hat{f} \in L^0(V_0)$ de support contenu dans K; de l'inégalité (4.3) il en résulte que $|m^\alpha(\hat{f})| < M_K \|\hat{f}\|_\infty + \varepsilon$ et donc $|m^\alpha(\hat{f})| < M_K \|\hat{f}\|_\infty$ (ε étant arbitraire),[3] ce qui montre alors que m^α est une mesure de Radon sur V_0 puisque m^α est clairement linéaire sur $L^0(V_0)$. En posant $m[\alpha] = m^\alpha$, cela prouve à la fois (4.1), i), ii), iii) de Théorème 5, et (4.2). L'unicité de la valeur moyenne $m[\alpha]$ est évidente, car pour $\omega_{\frac{1}{2}} = \omega(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_l; \varepsilon/2)$, si $\sum_{i=1}^m \xi_i \alpha(x a_i y) - m[\alpha] \subset \omega_{\frac{1}{2}}$ et $\sum_{k=1}^n \delta_k (x a_k y) - m'[\alpha] \subset \omega_{\frac{1}{2}}$, on a $m[\alpha] - m'[\alpha] = (m[\alpha] - \sum_{i,k=1}^{m,n} \xi_i \delta_k \alpha(a_i a_k)) - (m'[\alpha] - \sum_{i,k=1}^{m,n} \xi_i \delta_k \alpha(a_i a_k)) \subset \omega_{\frac{1}{2}} + \omega_{\frac{1}{2}} \subset \omega$, d'où $m[\alpha] = m'[\alpha]$.

Avant d'aller plus loin, nous examinons quelques exemples intéressants.

Exemple 1. Soit G un groupe abélien compact; son dual $\hat{G} = V_0$ est alors discret et $\alpha(x) = \chi(x) d\chi$, $\alpha_0(x) = \chi_0(x) d\varepsilon_{\chi_0}$, et $\alpha_\infty(x) = \alpha(x) - \alpha_0(x)$ appartiennent à $\mathfrak{A}(G)$, où $d\chi$ désigne la mesure de Haar sur $\hat{G}$, qui est adoptée comme une masse $+1$ placée en chaque $\chi \in \hat{G}$, c'est-à-dire $d\chi = d\varepsilon_\chi$, et χ_0 l'élément neutre de $\hat{G}$($d\varepsilon_{\chi_0}$ est alors la *distribution de masse* de Dirac). Pour tout voisinage ω dans $\mathfrak{M}$, il existe évidemment $a_1, \ldots, a_n \in G$ et $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (nombres positifs) avec $\xi_1 + \cdots + \xi_n = 1$ tels qu'on ait $\sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_\infty(x a_i y) \subset \omega$ pour tous $x, y \in G$, d'où résulte $m[\alpha_\infty] = 0$. Par contre, pour toute $\hat{f}_0 \in L^0(V_0)$ on a

$$\langle \hat{f}, m_x[\alpha_0(x)]\rangle = m\left[\int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi) d\varepsilon_{\chi_0}(\chi)\right] = \hat{f}(\chi_0) \text{ (d'après (4.2)),}$$

d'où résulte $m[\alpha_0] = d\varepsilon_{\chi_0}$, aussi $m[\alpha] = m[\alpha_0] + m[\alpha_\infty] = d\varepsilon_{\chi_0}$.

Dans ces circonstances, nous comprenons exactement que $\alpha(x)$ ainsi définie admet un ensemble non dénombrable des matrices d'expansion $\neq 0$; en effet, pour tout caractère $\chi(x)$ de G on a $m_x[\chi(x^{-1})\alpha(x)] = m_x[\alpha(x)] = d\varepsilon_{\chi_0} \neq 0$.[4][5]

Exemple 2. Soit G un groupe *l. c.* quelconque; tout produit $f(x) \cdot \mu$ d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$ par une $f \in A(G)$, leur combinaison linéaire finie $\sum_i f_i(x) \cdot \mu_i$, et sa limite vague appartiennent à $\mathfrak{A}(G)$. On a évidemment $m_x[\sum_i f_i(x) \cdot \mu_i] = \sum_i m_x[f_i] \cdot \mu_i$ et voit facilement que la première et la seconde admettent expansions de Fourier tandis que

3) N. Bourbaki: *Loc. cit.* [1], Chap III, §2, Proposition 8.

4) Cf. Corollaire 1 de Théorème 1 [I].

5) Dans ce cas, il est évident que $\chi(x^{-1})\alpha(x) = \overline{\chi(x)}\alpha(x) = \alpha(x)$ pour tout caractère (continue) $\chi(x)$ de G; lorsqu'on parle d'un caractère, il aura été toujours supposé d'être continu.

la dernière n'est pas necessairement ainsi, *p. ex.* $\alpha(x)$ mentionnée ci-dessus (*Exemple 1*) est limite vague de fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{m}\chi_i(x)d\varepsilon_{\chi_i}$.

Théorème 6. *α) Le support de la valeur moyenne* $m[\alpha]$ *est contenu dans la réunion des supports de* $\alpha(x)$, $x\in G$. *β) Si* $\alpha(x)$ *est uniformément bornée sur* G *(c'est-à-dire,* $\sup_{x\in G}\|\alpha(x)\|\leqq k$*), il en est ainsi de* $m[\alpha]$.

Démonstration. En vertu de (4.2) $\langle\hat{f},\ \alpha\rangle=0$ entraîne $\langle\hat{f},\ m[\alpha]\rangle=0$, d'où l'assertion α). Ensuite, $|\langle\hat{f},\ m[\alpha]\rangle|=|m_x[\langle\hat{f},\ \alpha(x)\rangle]|\leqq m_x[|\langle\hat{f},\ \alpha(x)\rangle|]\leqq m_x[k\cdot\|\hat{f}\|_\infty]=k\cdot\|\hat{f}\|_\infty$, d'où $\|m[\alpha]\|\leqq k$, ce qui prouve l'assertion β). En voici encore un exemple:

Exemple 3. Soit G un groups *l. c.* abélien et supposons que $f(x)$ $(\in A(G))$ soit la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure bornée $\mu\in\mathfrak{M}$. D'après le Corollaire 2 du Théorème 1, on sait que $\alpha(x)=\chi(x)d\mu(\chi)$ est une fonction de $\mathfrak{A}(G)$ et, de plus, de la forme $\sum_{i=1}^{\infty}a_i\chi_i(x)d\varepsilon_{\chi_i}$ dont $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|<+\infty$. Or, en vertu du Théorème 6 ci-dessus, $m[\alpha]$ est bornée et son support est contenu dans l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{\infty}\chi_i$, donc à fortiori $m[\alpha]$ peut s'écrit $=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i d\varepsilon_{\chi_i}$, où $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=k<+\infty$. D'ailleurs, il existe un filtre $\mathfrak{F}_G=\{g^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ sur l'espace des fonctions sommables de type positif sur G, suivant lequel $\hat{g}^\lambda$ (transformée de Fourier de g^λ) converge vers la constante un uniformément sur toute partie compacte de $\hat{G}$ et en même temps la mesure $g^\lambda(x)dx$ vers la masse $+1$ en e (étroitement): de plus, ces g^λ peuvent être considérées à la fois positives, de type positif, et de L^1-norme 1.[6] D'où il vient aussitôt que $0\leqq\hat{g}^\lambda(\chi)\leqq1$ sur $\hat{G}$.

Étant donné un nombre $\varepsilon>0$, il existe un entier N assez grand tel qu'on ait $\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i|<\varepsilon/2$ et une $\hat{g}^\lambda\in\mathfrak{F}_G$ telle que $\|1-\hat{g}^\lambda\|_\infty<\varepsilon/2k$ sur le compact $\bigcup_{i=1}^{N}\chi_i$; alors on a

$$\int_G g^\lambda(tx^{-1})f(t)dt=\int_{\hat{G}}(\hat{g}_x^\lambda)(\chi)d\mu(\chi)=\int_{\hat{G}}\hat{g}^\lambda(\chi)\chi(x)d\mu(\chi),$$

ce qui est $=\langle\hat{g}^\lambda,\ \alpha\rangle(x)$, et $\left|\langle\hat{g}^\lambda,\ m[\alpha]\rangle-\int_G dm[\alpha]\right|\leqq\sum_{i=1}^{\infty}\left\|1-\hat{g}^\lambda\right\|_\infty\cdot\left|\xi_i\right|\leqq(\varepsilon/2k)\cdot\sum_{k=1}^{N}\left|\xi_i\right|+\sum_{k=N}^{\infty}\left|\xi_i\right|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$, d'où $\langle\hat{g}^\lambda,\ m[\alpha]\rangle\longrightarrow\int_{\hat{G}}dm[\alpha]$ avec $\lambda\in\Lambda$. D'autre part, $\langle\hat{g}^\lambda,\ m[\alpha]\rangle=m_x[\langle\hat{g}^\lambda,\ \alpha\rangle(x)]\longrightarrow m_x[f(x)]$, car $\int_{\hat{G}}g^\lambda(tx^{-1})f(t)dt\longrightarrow f(x)$ (uniformément) avec λ. Enfin, on conclut

$$m_x[f(x)]=\int_{\hat{G}}dm_x[\alpha(x)]. \tag{4.2'}$$

6) H. Cartan-R. Godement: *Loc. cit.*, n° 18. S. Matsushita [1], n° 3.

§ 5. Nous avons vu, au début de ma Note précédente [I], qu'une fonction de $\mathfrak{A}(G)$ n'admet pas nécessairement l'expansion de Fourier (au sens usuel); voir l'Exemple 1 ci-dessus. Puisqu'il en est ainsi, notre intérêt à présent se porte exclusivement au coefficient de Fourier, mais non à la série de Fourier elle-même. Cependant, comme nous montrerons ultérieurement, il y a des cas où l'existence exacte d'une série de Fourier peut être assez aisément vérifiée; *p. ex.* le cas où $\alpha(x)$ appartient à la fois aux deux espaces $\mathfrak{A}(G)$ et $\mathfrak{A}^1(G)$. D'abord nous allons démontrer le

Théorème 7. *L'ensemble des entrées (termes) $D_\nu(x)$ de représentations unitaires irréductibles de G de dimension finie, telles que $m_x[\overline{D_\nu(x)}\alpha(x)]\neq 0$ pour une $\alpha(x)\in\mathfrak{A}(G)$ s'identifie avec la réunion des ensembles de celles pour toutes $\langle\hat{f},\alpha\rangle(x)$, quand $\hat{f}$ décrit l'espace $L^0(V_0)$.*

Démonstration. Comme nous l'avons vu au Théorème 5^{bis} ci-dessus, on a $\langle\hat{f},\ m[\overline{D_\nu(x)}\alpha(x)]\rangle = m_x[\langle\hat{f},\ \overline{D_\nu(x)}\alpha(x)\rangle] = m_x[\overline{D_\nu(x)}\langle\hat{f},\alpha\rangle(x)]$, ce qui exprime que le dérnier membre $\neq 0$ entraîne $m_x[\overline{D_\nu(x)}\alpha(x)]\neq 0$, et réciproquement si $D_\nu(\cdot)$ est telle que $m_x[\overline{D_\nu(x)}\langle\hat{f},\alpha\rangle(x)]=0$ pour toute $\hat{f}\in L^0(V_0)$, la mesure $m_x[\overline{D_\nu(x)}\alpha(x)]$ est identiquement nulle. Cela achève la démonstration.

Analogue au cas des fonctions numériques *p.p.*, on appellera *coefficient d'expansion de Fourier pour* $D_\nu(\cdot)$ la mesure de moyenne $\sqrt{n_\nu}\cdot m_x[\overline{D_\nu(x)}\alpha(x)]$, où n_ν (entier) désigne le degré de la représentation à laquelle $D_\nu(\cdot)$ appartient; alors on a aussitôt le

Théorème 8 (Théorème de l'unicité). *Les fonctions de $\mathfrak{A}(G)$ qui possèdent les mêmes coefficients d'expansion de Fourier sont identiques.*

Cela revient à dire que dans $\mathfrak{A}(G)$ toute fonction peut être déterminée par ses coefficients d'expansion de Fourier, encore qu'elle n'admette pas l'expansion de Fourier elle-même. Ici, remarquons aussi bien que la plupart des résultats très élémentaires sur les *modules de représentation*, ce qui se fondent à MM. E. R. van Kampen et J. von Neumann, peut être ressuscitée sans peine, moyennant d'éventuelles modifications supplémentaires sur les topologies, toutefois il faut dire que la grande partie du reste, *p. ex.* théorème d'isolation, théorème de décomposition, etc.,[7] sont, sous les formes originales, en défaut pour $\mathfrak{A}(G)$.

Or, les résultats énoncés ci-dessous sont assez fondamentaux et rendront de nombreux services dans le *théorie de représentation unitaire* et *l'analyse harmonique*; ce donneront notamment une connexion bien réussie entre les représentations de dimension finie et celles de dimension infinie. Tout d'abord, nous nous proposons de dire, s'il

7) S. Bochner-J. von Neumann: *Loc. cit.* Théorèmes 33, 34, et 35.

n'y a aucune ambiguïté, qu'*une* $\alpha(x) \in \mathfrak{A}(G)$ *appartient à un module* (*de représentation*) M quand $m_x[D^{\nu}_{pq}(x)\alpha(x)]=0$ pour telles $D^{\nu}_{pq}(\cdot)$ que

(5.1) $$\mathfrak{D}^{\nu}(\cdot)=(D^{\nu}_{pq}(\cdot))_{p,q}, \quad \text{où} \quad \mathfrak{D}^{\nu} \bar{\in} M.$$

En vertu du (2.4), on a aussitôt:

Théorème 9a. *Si* $\alpha(x)$ *appartient à un module* M, *il en est ainsi de* $\langle \hat{f}, \alpha\rangle(x)$ *pour toute* $\hat{f} \in L^0(V_0)$ *et réciproquement.*

On sait que, quelque ensemble des représentations (de dimension finie) de $G, \mathfrak{S}=\{\mathfrak{D}^{\nu}(\cdot)\}$, que soit donné, il y a un module M qui est le plus petit des modules contenants tous les $\mathfrak{D}^{\nu}$ de $\mathfrak{S}$. Nous écrirons maintenant $M_{\mathfrak{S}}=M_{\mathfrak{D}}$, pour tel $\mathfrak{S}$ que se forme d'une seule $\mathfrak{D}$.

Théorème 9b. *Pour toute* $\alpha(x) \in \mathfrak{A}(G)$ *et tout* $M_{\mathfrak{D}}$, *où* $\mathfrak{D}^{\nu}(\cdot)=(D^{\nu}_{pq}(\cdot))_{p,q}$,

(5.2) $$\alpha_{\mathfrak{D}}(x)=n_{\nu}\cdot\sum_{p,q=1}^{n_{\nu}} D^{\nu}_{pq}(x)\cdot m_x[D^{\nu}_{pq}(x)\alpha(x)]$$

appartient à $\mathfrak{A}(G)$ *et à* M; *de plus, son coefficient de Fourier pour toute* $D^{\nu}_{pq}(\cdot)$ *dans* $\mathfrak{D}^{\nu}(\cdot)$ *coïncide avec celle de* $\alpha(x)$ *même.*

En effet, on a $\sqrt{n_{\nu}}\cdot m_x[\overline{D^{\nu}_{ij}(x)}\alpha_{\mathfrak{D}}(x)]=n_{\nu}^{\frac{3}{2}}\cdot\Big(\sum_{p,q=1}^{n_{\nu}}\frac{1}{n_{\nu}}\delta_{ip}\delta_{jq}m_x[\overline{\mathfrak{D}^{\nu}_{pq}(x)}\alpha(x)]\Big)=\sqrt{n_{\nu}}\cdot m_x[\overline{D^{\nu}_{ij}(x)}\alpha(x)]$, comme $m_x[\overline{D^{\nu}_{ij}(x)}D^{\nu}_{pq}(x)]=\frac{1}{n_{\nu}}\delta_{ip}\delta_{jq}$ (δ_{ij} désigne la *delta de Kronecker*).

On appelle *section de* $\alpha(x)$ *dans* $M_{\mathfrak{D}}$ la fonction *p.p.* $\alpha_{\mathfrak{D}}(x)$ définie par (5.2) ci-dessus. Si M est un module fini, c'est-à-dire $M=M_{\mathfrak{S}}$ où $\mathfrak{S}=\{\mathfrak{D}_1,\dots,\mathfrak{D}_l\}$, on peut généraliser la notion de section en le cas $M=M_{\mathfrak{S}}$ de manière qu'on pose $\alpha_M(x)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_{\mathfrak{D}_i}(x)$. Il est clair que ces $\alpha_{\mathfrak{D}}(\cdot)$ admettent leurs expansions de Fourier.

Désignons maintenant par $P(G)$ l'ensemble de toutes les fonction continues de type positif sur G, et par $\Pi(G)$ l'enveloppe lenéaire complexe de $P(G)$: si $m_x[\alpha(x)]$ est bornée, sa transformée de Fourier-Stieltjes $\hat{\alpha}(x)=\int_{V_0}\varphi(x)dm_x[\alpha(x)]$ est bien definiée et égale presque partout à une fonction $\in \Pi(G)$.[8] Montrons alors l'égalité importante:

Théorème 10. *Si* $\alpha(x) \in \mathfrak{A}(G)$ *est uniformément bornée sur* G, *c'est-à-dire,* $\alpha(x) \in \mathfrak{M}^1$ *pour tout* $x \in G$, *on a*

(5.3) $$m_x[\langle \hat{g}, \alpha\rangle(x)]=\int_G g(x)\overline{\hat{\alpha}(x)}dx,$$

pour toute $g \in L^0(G)$ *avec sa transformée de Fourier* $\hat{g}$.

En effet l'application de la formule de Fubini permet, par un calcul élémentaire, d'obtenir les égalités suivantes: le premier membre=

$$\langle \hat{g}, m_x[\alpha(x)]\rangle=\int_{V_0}\int_G \overline{\varphi(t)}g(t)dt\cdot dm_x[\alpha(x)](\varphi)$$
$$=\int_G g(t)\Big[\int_{V_0}\overline{\varphi(t)}dm_x[\alpha(x)](\varphi)\Big]dt=\int_G g(x)\overline{\hat{\alpha}(x)}dx,$$

ce qui montre (5.3). (à suivre)

8) Si G est abélien ou bien compact, nous n'avons besoin de ce mot «presque partout».